МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

• ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1965 •

С. А. ГАСТЕВА, Б. И. КРЕЛЬШТЕЙН,
С. Е. ЛЯПИН, М. М. ШИДЛОВСКАЯ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

под общей редакцией
С. Е. ЛЯПИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Часть первая

Общая методика математики

Глава I. *Математика как учебный предмет*

§ 1. О задачах советской школы и целях преподавания математики 5
§ 2. Математика как наука и как учебный предмет 9
§ 3. Преподавание математики при политехническом обучении . . . 14
§ 4. Математика и смежные предметы, связь между ними 21
§ 5. Воспитательная работа на уроках математики 24
§ 6. Учебные планы и программы 37

Глава II *Принципы, формы и методы преподавания математики в восьмилетней школе*

§ 7. Общие принципы советской дидактики в преподавании математики 40
§ 8. Опыт, интуиция и логика при обучении математике в восьмилетней школе. Анализ и синтез. Индукция и дедукция в школьном преподавании. Аналогия 50
§ 9. Математические понятия и методика формирования их 58
§ 10. О логических ошибках учащихся, источниках возникновения и мерах предупреждения их 77
§ 11. Борьба за качество знаний учащихся 80
§ 12. О культуре математической речи 88
§ 13. Беседа, самостоятельная работа учащихся и лекция 94
§ 14. Наглядность в преподавании математики. Лабораторные работы. Практические работы 97
§ 15. Работа с учебником 102

Глава III. *Организация преподавания математики*

§ 16 Организация урока 105
§ 17. Подготовка учителя к уроку 111
§ 18. Повторение пройденного материала 114
§ 19. Устные упражнения на уроках математики 117
§ 20. Домашние задания, проверка выполнения их 120
§ 21. Проверка знаний и умений учащихся 122
§ 22. Оценка знаний учеников 132
§ 23. Анализ письменных работ учеников и разбор ошибок в классе 133

§ 24. Меры предупреждения неуспеваемости и работа с отстающими учениками 135
§ 25. Ученические тетради и записи в них 136
§ 26. Выпускные экзамены в VIII классе по математике 138
§ 27. Внеклассная работа по математике 141
§ 28. Математический кабинет 155

Часть вторая

Методика преподавания арифметики

Глава I. *Арифметика как учебный предмет*

§ 1. Цели преподавания арифметики 159
§ 2. Научный и школьный курс арифметики . . . . . —
§ 3. Курс арифметики в начальных классах школы 160
§ 4. Систематический курс арифметики 162
§ 5. Общие методические принципы изучения систематического курса арифметики 163

Глава II. *Арифметические задачи*

§ 6 Виды задач и приемы решения их 166
§ 7 Методика обучения решению задач 178
§ 8. Устные упражнения по арифметике 190

Глава III. *Натуральные числа*

§ 9. Нумерация устная и письменная 196
§ 10. Система арифметических действий 199
§ 11. Законы арифметических действий 203
§ 12. Делимость чисел 212

Глава IV *Обыкновенные дроби*

§ 13. Различная последовательность изучения тем «Десятичные дроби» и «Обыкновенные дроби» 221
§ 14. Введение понятия дроби. Преобразования дробей 223
§ 15. Действия над дробями 231

Глава V *Десятичные дроби Проценты. Приближенные вычисления*

§ 16 Общие вопросы 253
§ 17 Запись и чтение десятичных дробей 254
§ 18. Преобразования и сравнение по величине десятичных дробей . . 256
§ 19. Действия над десятичными дробями . . . . . —
§ 20. Обращение обыкновенных дробей в десятичные дроби 261
§ 21. Проценты в школьном курсе 264
§ 22. Приближенные вычисления 271

Глава VI. *Отношения и пропорции. Пропорциональные величины*

§ 23. Отношения 280
§ 24. Пропорции 284
§ 25. Прямая и обратная пропорциональность величин 289
§ 26 Задачи на пропорциональные величины 296
§ 27. Задачи на деление прямо и обратно пропорционально данным числам 301

Часть третья

Методика преподавания алгебры

Глава I. *Алгебра как учебный предмет*

§ 1. Из истории возникновения алгебры 307
§ 2. О преподавании алгебры в восьмилетней школе 310
§ 3. О системе упражнений по алгебре 312
§ 4. Введение буквенной символики 324
§ 5 Степень числа и коэффициент 329
§ 6. Числовое значение буквенного выражения 331

Глава II. *Рациональные числа*

§ 7 Понятие о рациональном числе 333
§ 8 Действия над рациональными числами 343

Глава III. *Тождественные преобразования*

§ 9. Методика изучения тождественных преобразований алгебраических выражений 351
§ 10 Разложение многочленов на множители 354
§ 11. Алгебраические дроби 370

Глава IV. *Уравнения и функции в VI и VII классах*

§ 12. Пропедевтика и учение об уравнениях в восьмилетней школе . . 377
§ 13. Систематическое изучение уравнений 387
§ 14. Начальные сведения о неравенствах 396
§ 15 Функциональная пропедевтика 398
§ 16. Изучение функциональной зависимости в VII классе 401
§ 17. Системы уравнений первой степени с двумя неизвестными . . 409
§ 18. Решение задач на составление уравнений 418

Глава V. *Квадратный корень, кубический корень и логарифмическая линейка*

§ 19. Квадратный и кубический корни 424
§ 20 Действия над радикалами 435
§ 21. Логарифмическая линейка 436

Глава VI. *Уравнения и функции в VIII классе*

§ 22 Квадратные уравнения 445
§ 23. Система уравнений высших степеней 453
§ 24 Функции и графики 455
§ 25 Графическое решение уравнений 467

Часть четвертая

Методика преподавания геометрии

Глава I. *Геометрия как учебный предмет восьмилетней школы*

§ 1. Цели преподавания геометрии 472
§ 2. Научный и школьный курс геометрии 473
§ 3. Содержание курса геометрии восьмилетней школы 477
§ 4. О порядке построения курса планиметрии 480

Глава II. *Основные вопросы методики преподавания геометрии в восьмилетней школе*

§ 5. Геометрический материал в курсе арифметики V класса 489
§ 6. О преподавании геометрии в VI—VIII классах 506
§ 7. Методика обучения доказательству геометрических предложений, введение понятия теоремы, аксиомы 516
§ 8. Наглядные пособия 543
§ 9 Самостоятельные и практические работы учащихся 546
§ 10 Геодезические работы 549

Глава III. *Задачи в курсе геометрии*

§ 11. Общие соображения 553
§ 12 Задачи на вычисление 558
§ 13 Задачи на доказательство 565
§ 14 Задачи на построение 571
§ 15 Устные задачи и упражнения 595

Глава IV. *Основные темы курса геометрии восьмилетней школы*

§ 16 Первая тема курса геометрии VI класса 600
§ 17 Треугольник 615
§ 18. Симметрия 633
§ 19. Параллельные прямые. 655
§ 20. Четырехугольники 662
§ 21. Окружность 665
§ 22. Пропорциональные отрезки Подобие фигур 670
§ 23. Тригонометрические функции острого угла и решение прямоугольных треугольников 686
§ 24 Элементарные сведения по стереометрии 695
§ 25. Вопросы измерения Вычислении площадей и объемов 710

Литература 730

Книга рекомендована к изданию
Учебно-методическим Советом
Министерства просвещения РСФСР

Предлагая настоящую книгу вниманию учителя, мы не ставили перед собой задачу осветить подробно все вопросы преподавания математики. Более полно в ней разобраны те разделы, которые являются для восьмилетней школы новыми, и те, которые потребовали нового освещения и методического подхода в связи с перестройкой школы. Авторы старались приблизить изложение всех вопросов преподавания математики к запросам учителя; в основу изложения некоторых вопросов положен опыт лучших учителей, получивший одобрение у широкой педагогической общественности.

Книга рассчитана в первую очередь на молодых учителей; она может служить также учебным пособием по методике преподавания математики для студентов педвузов.

Общая методика математики написана Б. И. Крельштейном, кроме параграфов 3, 5, 11, 27 и 28, написанных С. Е. Ляпиным, и параграфов 7 и 16, написанных А. И. Поспеловым.

Методика арифметики написана С. А. Гастевой.

В методике алгебры главы I, III, IV принадлежат Б. И. Крельштейну, главы II, V и VI — С. Е. Ляпину.

Методика геометрии написана М. М. Шидловской, кроме главы III, написанной М. А. Щукиной, параграфов 18 и 24, написанных Х. Б. Абуговой, и параграфов 10 и 24, написанных Б. И. Крельштейном.

Общая редакция принадлежит С. Е. Ляпину.

Авторы приносят благодарность Е. С. Березанской и П. А. Буданцеву, внимательно просмотревшим всю рукопись и давшим ряд ценных указаний, и всем, принявшим участие в предварительном обсуждении книги.

Авторы с искренней признательностью примут все указания и пожелания читателей и учтут их в последующей работе над книгой.

ВВЕДЕНИЕ

Советская педагогика, руководствуясь общим учением марксизма-ленинизма о коммунистическом воспитании молодежи, выработала ряд принципов обучения детей. Эти принципы касаются отбора учебного материала, его изложения, методов обучения, организации занятий и т. д.

При обучении математике необходимо руководствоваться этими основными положениями педагогики. Методика математики должна решить следующие три основные задачи.

1. Что должно составлять содержание математики как учебного предмета в советской средней школе и каковы цели изучения математики в целом и каждого из разделов предмета.

2. В какой последовательности должен быть расположен учебный материал математики при изучении его в школе.

3. Какие методы и приемы являются эффективными для наиболее полного и глубокого изучения учебного материала математики.

Методика математики, опираясь на опыт советской школы, устанавливает, что лучше всего в курсе элементарной математики служит общему и математическому развитию учащихся, что способствует более глубокому развитию у них материалистического мировоззрения, что служит подготовке учеников к практической деятельности. Методика математики выясняет, какие методы и формы организации обучения математике обеспечивают учащимся наиболее прочные систематизированные и сознательные знания и навыки, установленные программами, какие разделы школьного курса наиболее сложны и как облегчить учащимся усвоение этих разделов. Методика математики занимается систематизацией упражнений и задач, классификацией их по степени трудности и важности; устанавливает характер контрольных вопросов и задач, которые позволяют с максимальной объективностью и достоверностью проверять знания и навыки учеников; изучает, какой материал из истории развития математической науки способствует уяснению учениками предмета и освещает роль русских математиков в развитии науки; изучает и обобщает лучший опыт учителей математики.

Вопросы методики преподавания математики всегда интересовали русских ученых — математиков и педагогов.

Большинство из них защищало передовые методические принципы: сознательность обучения, развитие самостоятельной работы учащихся, жизненность учебного материала; они вели активную борьбу с проникновением в русскую школу реакционных взглядов некоторых иностранных педагогов.

Академик С. Е. Гурьев (1764—1813), А. Н. Острогорский (род. в 1840 г.), В. А. Латышев (1850—1912) разработали основы прогрессивной методики геометрии, исходя из материалистических взглядов на геометрию. Так, А. Н. Острогорский писал, что «понятие идет за наблюдением, что оно имеет в основании своем мир реальный, существующий» (Материал по методике геометрии, 1884, стр. 8). Вопросами преподавания алгебры занимались А. Н. Страннолюбский (1839—1903), В. П. Шереметьевский (ум. в 1919 г.), К. Ф. Лебединцев (1872—1925). Большое влияние на постановку преподавания математики оказали выступления и работы академиков П. Л. Чебышева (1821—1894), В. Я. Буняковского (1804—1889), М. В. Остроградского (1801—1861). Последний написал учебник элементарной геометрии, конспект по тригонометрии и ряд статей, посвященных вопросам преподавания математики в средней школе.

Вопросы преподавания математики постоянно обсуждались на страницах специальных журналов, из которых наибольшей известностью пользовались: «Вестник опытной физики и элементарной математики» (издавался до 1917 г.), «Математическое образование» (издавался с перерывом с 1912 по 1930 г.) и др. Многие статьи этих журналов представляют интерес и до настоящего времени.

Большое влияние на преподавание математики в средней школе оказали работы I Всероссийского съезда преподавателей математики (Петербург, 1911) и II съезда (Москва, 1913).

Великая Октябрьская социалистическая революция открыла широкую возможность разработки вопросов преподавания математики на основе наиболее передовых идей, многие из которых принадлежат прогрессивным представителям нашей отечественной математики. Из этих идей наиболее важными являются: идея функциональной зависимости и учение о функции, развитие понятия числа, идея преобразований, освещение математического материала с позиций диалектического материализма, проблема связи теории и практики, вопрос о развитии инициативы учащихся.

В советское время вопросам преподавания математики в средней школе уделяют внимание многие ученые математики нашей страны.

В разработке методики преподавания математики участвует широкий круг ученых, методистов и учителей, которые печатают свои работы и делятся опытом на страницах журнала «Математика в школе» и различных методических сборников.

Часть первая

ОБЩАЯ МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА I

МАТЕМАТИКА КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

§ 1. О задачах советской школы и целях преподавания математики

Особенность общего образования в нашей стране заключается в том, что оканчивающий школу прежде всего должен быть готовым стать в ряды строителей коммунистического общества, отчетливо понимать политические и хозяйственные задачи Советского государства, определенные Программой Коммунистической партии и Советской конституцией. Каждый оканчивающий школу должен владеть установленным в учебной программе объемом общеобразовательных знаний и обязательно уметь полученные знания прилагать в жизни, иметь навык самостоятельно работать с книгой, уметь трудиться настойчиво, упорно и целеустремленно с сознанием ответственности за качество своей работы.

С первых лет после Великой Октябрьской социалистической революции Коммунистическая партия Советского Союза и Советское правительство постоянно заботятся о постановке коммунистического воспитания и обучения детей в школе и о путях развития школы.

Советская школа всегда развивалась на основе марксистско-ленинского принципа — соединения обучения с производительным трудом. Это направление развития советской школы принимало различные формы, но принцип сохранялся. Особо важную роль стал играть этот принцип в годы бурного роста техники и всех отраслей народного хозяйства нашей страны, когда потребовались многочисленные кадры образованных специалистов и рабочих, когда стали стираться грани между умственным и физическим трудом.

Задачи советской школы сформулированы во многих партийных документах.

Наиболее четко и ясно они выражены в Программе Коммунистической партии Советского Союза, принятой XXII съездом КПСС 31 октября 1961 г.

В Программе сказано: «Переход к коммунизму предполагает воспитание и подготовку коммунистически сознательных и высокообразованных людей, способных как к физическому, так и умственному труду, к активной деятельности в различных областях общественной и государственной жизни, в области науки и культуры (Материалы XXII съезда КПСС, Госполитиздат, М., 1961, стр. 413).

Дальше в ней указано, что обучение и воспитание подрастающего поколения должно быть тесно связано с жизнью, с производительным трудом. Это позволит человеку после окончания школы сразу включиться в производство и сочетать работу с дальнейшим обучением и образованием в соответствии со своим призванием и потребностями общества.

«Народное образование, основанное на таких принципах, будет способствовать формированию всесторонне развитых членов коммунистического общества, решению одной из важнейших социальных проблем — устранению существенных различий между умственным и физическим трудом». (Там же.)

Среди основных задач в области народного образования Программа КПСС отмечает, что среднее образование должно обеспечивать прочное знание основ наук, усвоение принципов коммунистического мировоззрения, трудовую и политехническую подготовку в соответствии с возрастающим уровнем развития науки и техники, с учетом потребностей общества.

Бурное развитие науки и техники вызывают необходимость совершенствования мастерства работающих на производстве, повышения их квалификации, что непосредственно зависит от общеобразовательной подготовки в области общественных и естественных наук и особенно в области математики.

Из указанных в Программе КПСС общих задач вытекают и стоящие перед предметом математики общеобразовательные и воспитательные цели и задача подготовки учеников к практической деятельности.

Общеобразовательные цели. Сообщить ученикам определенный круг знаний, позволяющих понимать количественные отношения и зависимости простейших явлений реального мира и разбираться в формах его. Эти знания должны содействовать воспитанию у школьников марксистско-ленинского мировоззрения, развивать логическое мышление и пространственное воображение их.

Приобретаемые учениками знания должны дать им достаточно ясное представление о математике как науке и подготовить их к изучению дальнейшего курса математики. Математические знания должны помогать им овладеть основами производства. В процессе обучения школьники должны овладеть простейшими вычислительными навыками, научиться обрабатывать самостоятельно получаемые данные при различного рода измерениях, уметь проверять достоверность получаемых сведений, то есть овладеть научными методами доказательства и контроля. Вместе с этим ученики должны получить навык в постановке и проведении некоторых несложных исследований.

Изучение предмета математики в школе не ограничивается задачей передать ученикам определенную сумму готовых знаний и навыков. Эти знания и навыки должны стать основой математического развития и воспитания учащихся. Требовать от учеников ясных количественных и пространственных представлений нельзя без того, чтобы они умели абстрагировать, то есть пользоваться основным методом математики (примером может служить учение о функции). У школьников надо воспитывать умение систематизировать понятия и предложения, выделять из них существенно важные для построения общей схемы, установления общей закономерности (например, теорема Виета). Кроме того, ученики должны уметь анализировать данный вопрос, вычленять из него частные случаи с учетом того, насколько частный случай исчерпывает все возможности (например, сравнение по величине a^5 и a^3). В задачу математического воспитания входит и приучение учеников к полноценной аргументации. В процессе разбора различного рода законов необходимо сосредоточивать их внимание на требовании полного доказательства и объяснения, не оставляя возможности возражать или сомневаться в заключениях. Принцип полноценной аргументации доказательств требует борьбы против неправомерных обобщений на основании отдельных фактов, борьбы за полноту дизъюнкции, то есть рассмотрения всех возможных разновидностей данной ситуации, борьбы за полноту и выдержанность классификации по одному признаку и единому принципу.

Изучение математики должно содействовать развитию логики умозаключений и на этой основе выработке грамотной речи, точности и лаконичности выражения мысли. В изложении математического материала нельзя допускать многословия; здесь особенно важно поставить каждое слово на свое определенное место.

Для выражения конкретных зависимостей, сокращенного обозначения чисел и действий математика пользуется условными символами. Научить учеников выражать мысли на языке

математических символов и, наоборот, переводить с языка алгебры на родной язык — это задача первостепенной важности и не столь простая, чтобы ее не выделить в общем перечне задач, стоящих перед учителем.

Воспитательные цели. Важной задачей преподавания математики является воспитание у учащихся диалектико-материалистического мировоззрения, чувства советского патриотизма и национальной гордости. На уроках математики нужно показать, что основной движущей силой развития математики является производственная деятельность людей и что все объекты, изучаемые в школе, заимствованы из реального мира. Овладение идеей функциональной зависимости в школьном курсе математики развивает у учеников диалектическое мышление. Задачи, материалом для которых являются факты из жизни, воспитывают любовь и чувство гордости за нашу страну, страну строителей коммунистического общества.

Работа на уроках математики больше, чем работа на уроках любого предмета, должна приучить ученика к настойчивости, упорству, аккуратности, точности, контролю за своими выводами и суждениями, воспитать требовательность и четкость в суждениях.

Преподавание математики должно воспитывать у школьников самостоятельность, инициативу, творческие способности.

Ученик с первых дней занятий по математике получает возможность делать самостоятельные выводы, сначала в результате наблюдений, а позже на основе логических доказательств. Естественно, что преподаватель математики ставит перед собой задачу пробудить у детей интерес к самостоятельным поискам, открытиям и выводам, развить у них пытливость.

Сосредоточенное внимание требуется во всех областях знания, а в математике малейшая невнимательность может стать источником крупных ошибок; таким образом, сам предмет математики воспитывает у учащихся внимание.

Подготовка к практической деятельности при обучении математике состоит в том, чтобы учащиеся приобрели умение и навыки прилагать теорию к практике, то есть использовать знания для решения математических вопросов и задач, возникающих в повседневной жизни в быту и в производственных процессах. Для этого учащиеся должны научиться выделять математическую сторону наблюдаемого явления, жизненного факта и относить его к соответствующему кругу понятий, математических зависимостей и законов. Ученики должны научиться пользоваться инструментами и приборами для измерения, таблицами, справочниками, графиками и логарифмической линейкой для вычислений.

§ 2. Математика как наука и как учебный предмет

Математика, изучаемая в средней школе, значительно отличается от математики как науки. Различие между учебным предметом математики и наукой не только количественное, но в значительной степени качественное.

Чтобы установить общее и различное в математике как науке и в математике как в учебном предмете, надо определить содержание и основные методы их.

Наиболее общий ответ на вопрос, что такое математика как наука, мы находим у Ф. Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира...»[1] Характерной особенностью математического метода является его абстрактность.

Школьный предмет математики занимается изучением вопросов и законов из различных областей математической науки: теоретической арифметики, теории чисел, высшей алгебры, анализа, логического курса геометрии и др.

Но разница между наукой и предметом в следующем: усилия науки направлены к тому, чтобы отыскать и установить возможно полнее и глубже математические законы, которые отражают количественные отношения и пространственные формы реального мира. Математика же как школьный предмет имеет целью сообщить ученикам знания, добытые наукой.

Математика как наука не считается со сложностью устанавливаемых ею законов и с уровнем развития тех, кто будет изучать эти законы. При обучении математике приходится считаться с возрастными особенностями детей и подростков. Ученики по своим возрастным особенностям не всегда могут усвоить и представить себе многое из установленного математической наукой, например, сложные пространственные формы, многие зависимости между величинами и т. д.

Для учеников младших классов средней школы недоступны некоторые зависимости даже между целыми числами. Так, например, учащимся V—VI классов недоступна теорема об общем признаке делимости чисел, поэтому в школе изучаются только немногие следствия из этой общей теоремы. Таким образом, возникает необходимость отбора основного и важного, но при этом вполне доступного для понимания учащимися материала.

Для математики как науки не всегда существенно, как исследователь пришел к открытию той или иной математической истины, важно само доказательство ее. В школе же имеет огромное значение подход к введению нового понятия или закона,

---

[1] См [11].

выбор формы изложения математического предложения. Поэтому приходится проводить подготовительную работу с учениками, чтобы облегчить им понимание изучаемого материала.

Часто, вводя новые понятия или изучая математические зависимости, приходится связывать их с имеющимися у детей представлениями, вызывать у них ассоциацию рассматриваемого математического факта с жизненным явлением.

Доказательство теорем, следующих друг за другом и вытекающих одна из другой, без обращения к опыту учащихся, обычно непонятно им. Степень понимания повышается, когда доказательству теоремы предшествует решение задач, рассмотрение свойств конкретных фигур. В этих случаях ученики начинают понимать необходимость доказательства и самый ход доказательства.

Математика как наука строится и развивается в определенной системе; она вскрывает законы, необходимо вытекающие один из другого в определенной строгой последовательности. Изложение математических предложений в науке часто начинается с принятия за истинные (верные) некоторых основных положений, проверенных многовековым опытом и практикой. Эти первоначальные истины (аксиомы) принимаются в науке без доказательств. Так, в арифметике натуральных чисел приняты без доказательства четыре аксиомы Пеано [1], которые оказываются достаточным основанием для вывода всех законов арифметики при помощи логических рассуждений. В геометрии Евклида принято без доказательства положение, что «через точку вне прямой можно провести только одну параллельную данной прямой», и на основе этого положения путем рассуждений установлено большинство свойств геометрических фигур и тел. Приняв некоторые положения без доказательств как основные, все остальные суждения в математике выводятся из основных по правилам логики.

Учебный предмет математики, представляющий собой основу науки, не может чрезмерно упрощать и нарушать принятую в науке систему. Поэтому в обучении математике логические обоснования и рассуждения должны занимать большое место, особенно в старших классах. Однако в школе приходится считаться с уровнем развития учеников и некоторые положения, которые могут быть доказаны, принимать за верные на основании здравого смысла, но при этом не нарушая последовательности изучения математической теории.

Математика — живая и развивающаяся наука. С развитием и углублением познания человеком действительности постоянно расширяется диапазон научных знаний, вместе с этим совершен-

[1] См. [12], гл. III, стр. 133.

ствуются и методы познания действительности. Об этом свидетельствует история развития математики [1].

В настоящее время математическая наука занимается не только количественными отношениями и пространственными формами, но и другими проблемами, например проблемами исчислений (тензорное, вариационное, исчисление высказываний, что составляет предмет математической логики).

Что касается метода, то математика на современном этапе своего развития изучает объекты с точностью до изоморфизма; иначе говоря, современная математика не изучает объекты в их конкретном виде, а изучает только структуру отношений, в которых они выступают. Геометры прошлых веков в логическом развитии теории опирались на рассмотрение некоторой области объектов, и потому получаемые ими выводы описывали свойства только объектов этой области. В настоящее время ради общности получаемых результатов математики пользуются формальными обоснованиями теории.

На основе такой концепции доказанные теоремы выражают некоторые свойства, присущие объектам различных областей, лишь бы эти объекты имели тождественную структуру отношений. При такой концепции, например, метод координат Декарта позволяет пространство Евклида изоморфно отобразить на область операций линейной алгебры; примером использования изоморфизма может служить связь современной алгебры и топологии. Концепция изоморфизма вызвала к жизни задачу изучения общих свойств произвольных множеств — теорию множеств как фундамент каждой математической дисциплины.

Таким образом, в науке характерной особенностью метода является не только его абстрактность, но и общность. В учебном предмете ни абстрактность, ни тем более общность не могут быть доведены до той степени, до какой они доведены в науке.

Учащиеся восьмилетней школы, конечно, обладают способностью мыслить логически, но их логическое мышление нуждается в развитии, и оно повышается по мере продвижения из класса в класс. Ученики V—VIII классов школы трудно воспринимают абстрактные формулировки, нуждаются в объяснениях и примерах. Усвоение этих формулировок растягивается на некоторый период. Поэтому, например, в алгебре нельзя начинать доказательство теоремы, не разобрав предварительно ряда подготовительных примеров, а в некоторых случаях приходится даже ограничиться только примерами.

В научном курсе прочность построения теории вполне обеспечивается дедукцией, в учебном изложении эта прочность

---

[1] См. П. С. Александров, Математика как наука, М., Известия АПН РСФСР, 1958, вып. 92.

часто достигается посредством указания прямых и обратных взаимных связей между ранее установленными и вновь рассматриваемыми законами. (Это вызывает необходимость повторять пройденное.)

Математическая наука способна развиваться неограниченно, об этом говорит история развития науки. В школьном преподавании указываются «пределы» изложения математических знаний; эти пределы определены программой. Программы в зависимости от различных условий меняются, но на каждом этапе изменения определяют предмет математики, перечисляя вопросы, подлежащие изучению в школе, и, правда несколько схематично, определяют глубину изучения основных математических идей.

Таким образом, наука и предмет математики во многом не совпадают, но вместе с этим они тесно связаны. И хотя развитие математики идет в области очень сложных построений и потому отразить ее движение и современное состояние в учебном предмете чрезвычайно трудно, все же учитель должен стремиться при каждом удобном случае эти связи выявлять и подчеркивать современные идеи науки. В арифметике в этом направлении можно сделать немного, а именно: можно кое-что рассказать из области «высшей арифметики» — теории чисел; например, в связи с изучением простых чисел весьма ценно познакомить учеников с тем, что еще до сих пор до конца не найден закон распределения этих чисел. Но за последние двести лет в этой области сделан ряд открытий, особенно русскими математиками. Знакомство с этими открытиями поможет учащимся представить ход развития науки. Конечно, в весьма элементарной форме, на примерах, следует рассказать ученикам о «догадке» Х. Гольдбаха (члена Петербургской академии наук), заключающейся в том, что «любое натуральное число, большее пяти, представляет собою сумму трех простых чисел», о «догадке» Л. Эйлера (члена Петербургской академии наук) о том, что «всякое четное натуральное число, большее двух, представляет собою сумму двух простых чисел». Эти догадки подтверждались непосредственной проверкой, доведенной до числа 9 000 000, но не были доказаны в общем виде; таким образом родилась знаменитая задача Гольдбаха — Эйлера.

Вероятно, с большим интересом ученики отнесутся к сообщению о том, что великий русский математик П. Л. Чебышев впервые доказал теорему о том, что «между любым натуральным числом (не равным единице) и его удвоением всегда находится хотя бы одно простое».

С удовольствием воспримут ученики рассказ учителя о доказательстве советским ученым Л. Г. Шнирельманом (1930) теоремы: «Существует такое постоянное число k, что всякое на-

туральное число, кроме 1, может быть представлено в виде суммы не более чем k простых слагаемых».

Наконец, как открытие мирового значения следует осветить работу советского академика И. М. Виноградова, решившего почти полностью в 1937 г. задачу Гольдбаха — Эйлера, доказав теорему: «Всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел». Из этого следует, что всякое достаточно большое четное число есть сумма четырех простых чисел [1].

В алгебре учебный предмет наиболее тесно связывается с современной математической наукой через понятие функции; поэтому это понятие должно постоянно находиться в поле внимания учителя.

В алгебре можно сочетать формальное и функциональное начало в изучении ряда вопросов. Например, в теме «Тождественные преобразования алгебраических выражений» надо учить не только этим преобразованиям, но и не опускать возможности показать функциональную природу этих выражений.

Математическая наука, являясь наиболее абстрактной среди других наук, не теряет связи с практикой.

Идея плодотворности связи математической теории с практикой наиболее четко была высказана акад. П. Л. Чебышевым. Вот что он писал в статье «Черчение географических карт»: «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее; она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных».

Наши советские ученые, в том числе и математики, постоянно стремятся удовлетворить потребности промышленности, сельского хозяйства и строительства. Так, в период Великой Отечественной войны, в период восстановления и реконструкции народного хозяйства математики оказали огромную помощь в перестройке промышленности и сельского хозяйства, известно, каких научных высот наши ученые достигли в освоении космоса.

Потребности экономики, техники, сельскохозяйственной практики, биологической, медицинской и многих других наук, стремление проникнуть в космические миры и изучить их, выдвинули ряд проблем, которые не могут быть решены без математической обработки. А это вызвало к жизни новые математические дисциплины: кибернетику, теорию информации, линейное программирование, теорию игр и др.

Современные программы математики для восьмилетней школы не содержат вопросов из этих новых дисциплин.

Надо остановиться еще на том, как освещаются научные знания с идеологической стороны.

[1] См. [119].

Идеалисты в борьбе с материалистами пытаются использовать абстрактный характер математической науки, чтобы обосновать свою «теорию». Так, немецкий философ Дюринг считал, что математику можно вывести прямо из головы, не прибегая к опыту из внешнего мира. Развитие математики, с точки зрения идеалистов, никак не связано с общими историческими условиями развития общества, не зависит от открытий и развития других наук, математика совершенствуется сама по себе.

В свое время Ф. Энгельс, а затем В. И. Ленин, в своей работе «Материализм и эмпириокритицизм», разоблачили реакционность философских взглядов идеалистов. Вся история развития математики показывает несостоятельность положений идеалистов. Тот факт, что математика занимается изучением законов реального мира в наиболее общем виде, отвлекаясь от конкретных фактов, не делает ее наукой, независимой от действительности. Известно, что развитие капитализма поставило перед науками ряд важных проблем. Решение их зависело от астрономии, механики, физики и математики, которая должна была обобщить подмеченные законы реальной действительности. Именно в этот период математика значительно продвинулась вперед и обогатилась рядом открытий, вызвавших к жизни аналитическую геометрию, дифференциальные и интегральные исчисления.

Как показано выше, и на современном этапе важнейшим движущим фактором развития математики является прогресс производительных сил. В изложении учебного материала этот фактор развития математики должен освещаться с достаточной полнотой.

В математике как науке все явления окружающего мира рассматриваются в их развитии и движении, то есть с диалектической точки зрения. Такой взгляд позволяет правильно и наиболее глубоко вскрывать сущность явлений. В школьном курсе математики развитие такого взгляда в известной мере обеспечивается подходом к изучению учебного материала. Так, например, в геометрии свойства отдельных фигур изучаются в свете геометрических преобразований, в алгебре свойства функций изучаются при различных условиях изменения функций и т. д.

§ 3. Преподавание математики при политехническом обучении

Обучая школьников математике, надо достичь того, чтобы ученики видели математику в жизни и применяли ее к решению практических задач.

При политехническом обучении особое внимание должно быть обращено на решение задач, взятых из жизни, и на усиление некоторых разделов математики, имеющих применение в технике и быту.

Мы думаем, что практическое применение математики не должно составлять какого-то особого раздела, а органически входить в каждую тему.

Остановимся на этом несколько подробнее.

1. Данные, которые встречаются в задачах, должны соответствовать действительности, а все расчеты проводиться по правилам, установленным в математике.

К сожалению, не все авторы задачников соблюдают эти требования. Приведем несколько примеров.

1. Для приготовления булок было взято 36 *кг* муки, припек был равен $^1/_6$ веса муки. Сколько выпечено из этой муки булок, если каждая весит 150 *г*?

Как известно, припек в среднем равняется 35%, а не $\frac{1}{6}$.

2. Колхозник привез для продажи на базар 366 *кг* 120 *г* помидоров...

Здесь 120 *г* вряд ли стоит принимать во внимание.

3. Вместимость бака $1276\frac{7}{8}$ *л*...

Ясно, что $\frac{7}{8}$ *л* и даже 6 л не имеют существенного значения для емкости такого бака.

Авторам задачников эти данные нужны были для того, чтобы задачи стали более полноценными в математическом отношении, а «жизненность» задач в этих случаях пострадала.

2. Всякая задача с практическим содержанием должна быть полноценной в математическом отношении. Приведем пример.

Стержень длиною $L=2000$ *мм* был сварен из двух различных марок стали: сталь 1Х18Н97 с коэффициентом линейного расширения $\alpha_1=17\cdot10^{-6}$ и сталь 20 с коэффициентом линейного расширения $\alpha_2=12{,}1\cdot10^{-6}$. После сварки стержень проточили по наружной поверхности. В дальнейшем потребовалось определить положение сварного шва, так как он стал незаметен после проточки, то для этого поступили следующим образом: стержень нагрели до температуры $t=200°\,C$ и измерили его температурное удлинение, которое оказалось равным $\Delta L=0{,}58$ *мм*. По имеющимся данным необходимо определить длину каждого из участков стержня.

Математическое содержание задачи

$$\begin{cases} x+y=L, \\ \alpha_1 tx+\alpha_2 ty=\Delta L, \text{ где } t=200°C. \end{cases}$$

Нам кажется, что ученик затратит много усилий на понимание содержания задачи, в то время как ценность данной задачи в математическом отношении невелика.

Мы вовсе не возражаем против технических терминов, но в восьмилетней школе марка стали 1Х18Н97 мало что говорит ученику, а в то же время подобные термины затемняют смысл задачи.

3. Задачи должны соответствовать развитию и интересам учащихся и быть доступны пониманию.

Задачи на социально-экономические темы всегда интересуют учащихся и имеют весьма важное воспитательное значение (см. § 5). Заметим, что не следует, если это не потребуется в дальнейшем, приводить устарелые данные, например приводить урожай зерновых культур 1935 г., если не сравнивать его с урожаями более позднего времени.

Задачи жизненного характера попутно должны давать ученикам полезные сведения.

Приведем несколько примеров.

1. Из одной тонны пшеницы можно получить крупу полтавскую, пшеничные хлопья и кормовые отходы, причем число килограммов полтавской крупы относится к числу килограммов пшеничных хлопьев и к числу килограммов кормовых отходов как 63 : 95 : 42. Сколько килограммов каждого вида продуктов можно получить из тонны пшеницы?

2. Определить площадь и кубатуру квартиры, состоящей из трех комнат, коридора и кухни, если размеры одной комнаты 6 *м* на 4,8 *м*, второй 5,2 *м* на 3,2 *м*, третьей 6 *м* на 3,5 *м*, размеры кухни 4 *м* на 3 *м*, длина коридора 11,5 *м* и ширина 1,7 *м*, площадь ванной и уборной 8 *кв. м*, высота помещения 3,2 *м*.

Вообще следует приучать школьников производить все расчеты, которые встречаются в их жизни. Например, после окончания четверти сами ученики должны подсчитать число одинаковых оценок по каждому предмету и найти процентное отношение отличных, хороших и т. д. оценок к числу всех оценок, средний балл и т. д.

3. Скорый поезд выходит из Ленинграда в 22 *ч* 15 *мин* и прибывает в Москву в 9 *ч* 35 *мин*. Расстояние между Москвой и Ленинградом 651 *км*. Определить среднюю скорость поезда.

Р е ш е н и е. Время движения поезда

$$(24\ ч + 9\ ч\ 35\ мин) - (22\ ч\ 15\ мин) = 11\ ч\ 20\ мин.$$

Средняя скорость поезда

$$v = \frac{651}{11\frac{1}{3}} \approx 57{,}44 \quad \frac{км}{ч}.$$

а) Поезд имел остановки на станциях: Малая Вишера — 12 *мин*, Бологое — 15 *мин*, Калинин — 13 *мин*.

Определить среднюю скорость поезда без остановок (техническую скорость).

Решение. Время движения равняется

$$11\ ч\ 20\ мин - 40\ мин = 10\ ч\ 40\ мин.$$

Скорость будет

$$v = \frac{651}{10\frac{2}{3}} \approx 61{,}6\ \frac{км}{ч}.$$

Примечание. Не следует в данной задаче перечислять станции, на которых поезд имел остановку: это отвлечет внимание учащихся. Достаточно указать, что продолжительность остановок равнялась 40 *мин*.

В VIII классе можно предложить следующую задачу.

4. Скорость скорого поезда на дороге Москва — Ленинград в связи с укреплением дорожного полотна и повышением мощности электровоза может быть увеличена на 50 *км/ч*. Тем самым можно сократить время пробега на 2 *ч* 10 *мин*. Определить первоначальную скорость скорого поезда (расстояние от Москвы до Ленинграда ~ 650 *км*).

Решение.

$$\frac{650}{x} - \frac{650}{x+50} = 2\frac{1}{6}.$$

$\left(\text{Ответ: } 100\ \frac{км}{ч}.\right)$

Аналогичные задачи можно составить на движение пароходов, автобусов и т. д. Приведенные задачи имеют преимущество над обыкновенными задачами: «Поезд вышел из пункта A в пункт B и т. д.», ибо учащиеся знакомятся с фактическими расстояниями между городами, с действительными скоростями и временем движения поездов.

Примечание. В зависимости от территориального расположения школы можно взять расстояние от Москвы до данного города или до ближайшего областного центра.

4. Как мы уже указали, графики, таблицы, счетная линейка имеют особое значение при изучении математики в политехнической школе.

Заметим, что графики должны не только служить для иллюстрации некоторых математических положений, но и быть орудием так же, как и логарифмическая линейка, для вычислений. Не следует откладывать использование графиков и простейших номограмм до того момента, как их можно полностью обосновать.

Применение графиков для вычислений можно показать в младших классах, добавив, что обоснование будет дано несколько позднее. Приведем пример.

1. Найти неизвестный член пропорции $4{,}5 : 2{,}1 = x : 3{,}5$.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат (рис. 1). Масштаб примем $1 = 1$ *см*. Отложим отрезки: $OA = 2{,}1$ *см*; $OB = 4{,}5$ *см*; $OC = 3{,}5$ *см*.

Соединим точки A и B прямой и через точку C проведем прямую $CD \parallel AB$.

Длина отрезка OD будет равна искомому члену пропорции.

Действительно, $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, отсюда $\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}$, следовательно,

$$x=OD=\frac{OC\cdot OB}{OA}=\frac{4{,}5\cdot 3{,}5}{2{,}1}=7{,}5.$$

Покажем, как нахождение четвертой пропорциональной можно применить к задачам на проценты.

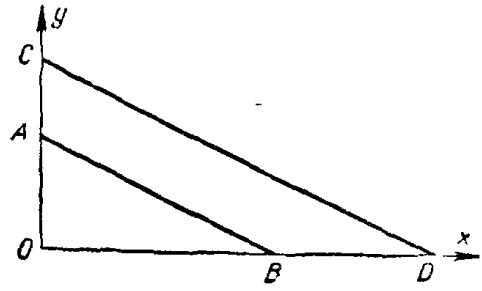


Рис. 1

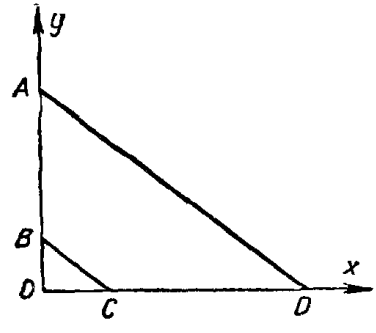


Рис. 2

а) Нахождение $p\%$ ($p=20\%$) от числа a ($a=8$). Возьмем прямоугольную систему координат. На оси OX будем откладывать проценты, на оси OY числа (масштабы можно брать различные, например, на оси OX $1=1$ *мм*, на оси OY $1=1$ *см*). На оси OX (рис. 2) отложим отрезки $OC=p$; $OД=100$; на оси OY — $OA=a$ ($a=8$).

Соединим точки A и D прямой. Из точки C проведем прямую, параллельную AD: $BC \parallel AD$.

Длина отрезка OB и будет равняться $p\%$ от числа a. Действительно, $\triangle OBC \sim \triangle OAD$, отсюда

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OD},$$

$$OB=\frac{OC\cdot OA}{OD}=\frac{p\cdot a}{100}=\frac{20\cdot 8}{100}=1{,}6.$$

б) Нахождение числа a, если $p\%$ ($p=25\%$) равняется числу b ($b=2$).

Решение. На оси OX будем откладывать проценты (масштаб $1=1$ *мм*), на оси OY числа (масштаб $1=1$ *см*). Отложим отрезки: $OC=p$; $OD=100$ (рис. 3); $OB=b$.

Соединим точки C и B прямой и из точки D проведем прямую $AD \parallel BC$.

Длина отрезка OA и будет равна числу a, $p\%$ которого равняется числу b. Действительно, $\triangle OBC \sim \triangle OAD$, отсюда

$$OA = \frac{OD \cdot OB}{OC} = \frac{100 \cdot b}{p} = \frac{100 \cdot 2}{25} = 8.$$

в) Нахождение процентного отношения чисел a и b ($a=6$; $b=8$).

Решение. На оси OX будем откладывать проценты (масштаб $1 \equiv 1$ *мм*), на оси OY числа (рис. 4). Отложим $OA=a$ и $OB=b$ (масштаб $1 = 1$ *см*). Отложим на оси OX отрезок $OD=100$. Соединим точки B и D прямой. Из

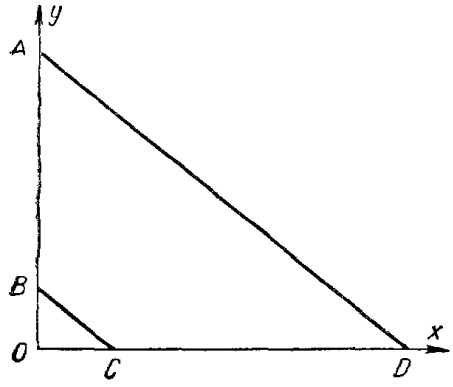


Рис. 3

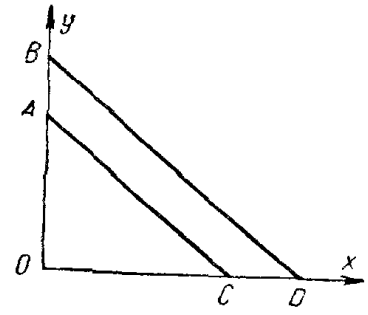


Рис. 4

точки A проведем прямую $AC \parallel BD$. Длина отрезка OC будет равняться процентному отношению чисел a и b.

Действительно, $\triangle OCA \sim \triangle OBD$, отсюда $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$;

$$OC = \frac{OA \cdot OD}{OB} = \frac{a \cdot 100}{b} = \frac{6 \cdot 100}{8} = 75\%.$$

5. При политехническом обучении особое внимание должно быть обращено на приложение математики к технике.

На уроках арифметики можно предлагать ученикам задачи следующего вида.

1. Для передачи вращения от одного вала к другому служат зубчатые колеса (шестерни). Для того чтобы число оборотов I и II валов было различно, берут шестерни разных размеров. На числовых примерах следует установить соотношение между числом зубцов N, числом оборотов n и радиусом колеса r (рис. 5). После этого устанавливается следующая формула:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Далее можно давать разнообразные задачи на зубчатые передачи, например:

«Шестерня имеет 24 зубца и делает 100 оборотов в минуту. Определить, какую шестерню (со сколькими зубцами) надо насадить на второй вал, чтобы он делал 300 оборотов в минуту».

Зубчатые колеса хорошо связать с коробкой передачи скоростей в автомобиле и тракторе.

По мере изучения физики число задач прикладного характера будет увеличиваться, так как их можно пополнить задачами на вычисление удельного веса, теплоемкости тел, на применение закона Архимеда. Такие задачи можно подбирать из задачников по физике.

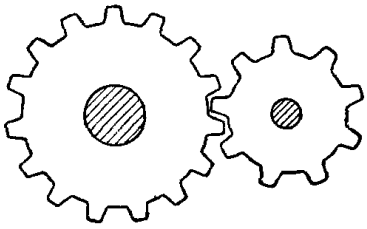


Рис. 5

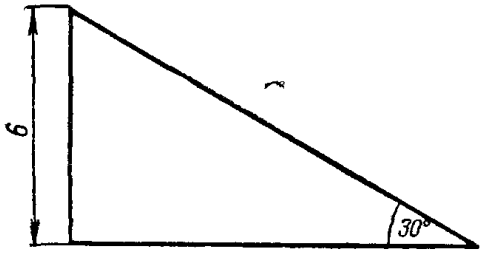


Рис. 6

В технике часто приходится находить центр тяжести различных деталей. Поэтому на уроках математики можно предлагать такие задачи, как:

«Найти центр тяжести прямоугольного треугольника» (рис. 6).

Решение. Гипотенузу данного треугольника легко найти. Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Затем следует воспользоваться теоремой о точке пересечения медиан треугольника. Полезно показать, что если подвесить треугольник, прикрепив нить в центре тяжести, то треугольник будет в устойчивом равновесии.

При изучении различных функциональных зависимостей особенно удобно показать приложение математики к практике.

Так, например, при помощи квадратичной функции можно выразить зависимость между пройденным расстоянием и временем при равноускоренном движении $\left(S=\frac{at^2}{2}\right)$, зависимость между выделяющимся теплом в проводнике с сопротивлением R и величиной силы тока I $(Q=kI^2Rt)$ и т. д.

В геометрии можно найти также много примеров из практической жизни. Наиболее распространенным является приложение геометрии к измерениям на местности. Следует познакомить

учеников с линейным и поперечным масштабом Можно предложить им следующие упражнения: пользуясь планом, найти расстояние между пунктами *А* и *Б*, если известен масштаб. Путь может быть измерен по дороге, которая представляет ломаную линию. Определить по плану площадь какого-нибудь участка земли и его действительные размеры.

6 Полезны задачи по геометрии, когда дан чертеж с указанием размеров.

1. В полукруг радиуса $r=3{,}5$ *см* вписан круг (рис. 7). Найти площадь заштрихованной фигуры.

2. Найти площадь заштрихованной фигуры, если сторона квадрата равна $a=3$ *см* (рис. 8).

3. Найти площадь детали, размеры которой даны на чертеже (рис 9).

4. Найти площадь вырезанной части головки гаечного ключа, размеры которого даны на чертеже (рис. 10).

5. Сколько весят 100 латунных втулок? Диаметральный размер втулки дан на чертеже (рис. 11). 1 $см^3$ латуни весит 8,7 *г*.

6. Найти объем защитной покрышки (рис. 12).

7 Возникает вопрос, в каком объеме и когда можно употреблять технические термины. Поясним на примере.

Задача. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при основании 26°. Известно, что $BC=650$ *см*; $BD=150$ *см*. Найти AC и ED (рис. 13).

Решение. $AC=2\cdot KC=2\cdot BC\cos 26^\circ\approx 1214$ (*см*);

$$ED=2MD=2\cdot 150\cos 26^\circ\approx 270 \text{ (см)}.$$

Эта же задача, если перевести ее на язык строителя, будет иметь несколько другую формулировку:

«Определить длину ригеля (ED) и длину пролета (AC), если длина стропильной ноги (BC) равна 650 *см* и стойка DE подпирает стропильную ногу на расстоянии 150 *см* от конька крыши».

Введение технических терминов усложняет задачу, если ученики незнакомы с ними, поэтому такие термины следует употреблять в V—VIII классах осторожно, а в IX—X классах использование технических терминов, преимущественно связанных со специальностью, приобретаемой учащимися, обязательно.

§ 4. Математика и смежные предметы, связь между ними

Математическими знаниями ученики пользуются при изучении других предметов, особенно при изучении физики, астрономии, черчения, химии и меньше при изучении географии, естествознания.

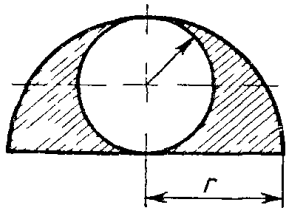


Рис 7

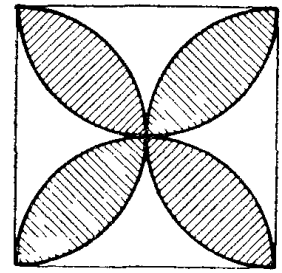


Рис 8

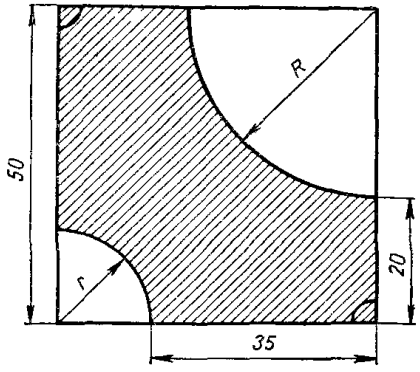


Рис 9

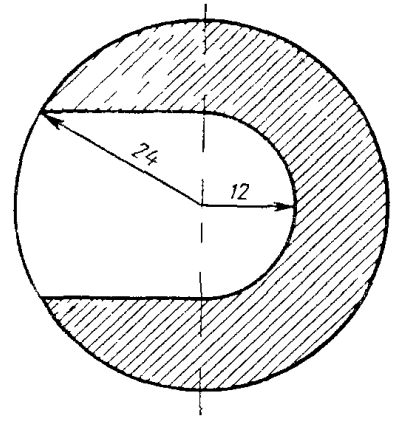


Рис 10

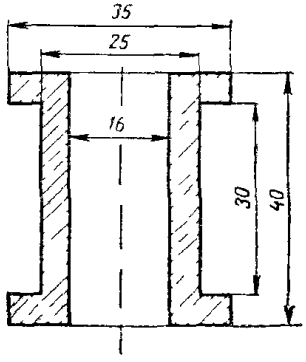


Рис 11

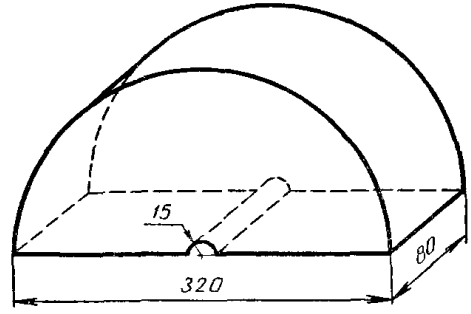


Рис 12

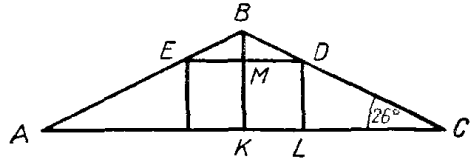


Рис 13

Вопрос о связи математики с другими предметами стоял и в дореволюционной школе, но особенное значение ему было придано после революции.

Уже в программе 1918 г. в объяснительной записке указано: «...помогая предметам, пользующимся математикой, она (математика) находит в них часто точки отправления при изучении того или иного вопроса, что особенно часто может иметь место при последовательно проведенном согласовании преподавания по различным отделам математики и таким предметам, как начальный курс природоведения, географии, ручного труда, физики, химии и т. п.».

В настоящее время согласование программы по математике с другими предметами более или менее осуществлено. Так, например, необходимые для курса физики VI класса сведения о параллелепипеде, площади его поверхности и объеме ученики получают в курсе арифметики V класса; некоторые сведения о функциях и графическом выражении их изменения они получают в курсе VII класса. Знания по математике широко используются на уроках труда при расчетах, разметке и вычерчивании эскизов.

Круг знаний по теории геометрических построений, которые учащиеся получают в VII классе, применяется ими в дальнейшем на уроках черчения.

Использование в математике материалов других предметов программой трудно предусмотреть, оно должно осуществляться учителем и предусматриваться при планировании материала и подготовке к урокам.

Так, изучая уравнения, следует решать и такие, которые выражают зависимость между физическими величинами, например: уравнение теплового баланса, уравнение линейного расширения тел при нагревании и т. п.

Изучение функций полезно начать с рассмотрения конкретных зависимостей из физики, химии. При изучении процентов, пропорций и других разделов программы желательно использовать задачи из химии и физики (смеси, сплавы, растворы и т. п.). Примеры:

1. Сколько следует добавить в 240 *г* воды растворимого вещества, чтобы получить 20-процентный раствор?

2. 400 *г* 4-процентного раствора упарены до 200 *г*. Какой концентрации стал раствор?

Материал смежных предметов с большим успехом может быть использован при повторении пройденного по математике. Например, при повторении вопросов прямой пропорциональности может быть использован материал по физике: изменение пути при равномерном движении прямо пропорционально изменению времени; изменение веса прямо пропорционально изменению объема. При повторении вопросов обратно пропорцио-

нальной зависимости могут быть использованы технические конструкции — сцепление системы шестеренок, системы ременных передач.

Не менее важно выявлять и подчеркивать взаимосвязи между предметами самой математики. (Известно, что ученики VI—VII класса считают математикой алгебру, а геометрию считают особым предметом.)

Целесообразно вводить решение арифметических задач алгебраическим методом. Использование уравнений в решении задач не вызывает затруднений у учеников, а вместе с этим облегчает рассуждения, содействует умению выражать зависимости между искомыми и данными задачами. Достаточно решить любую задачу с конкретным условием, в которой по сумме и разности чисел надо найти эти числа, чтобы ученики почувствовали силу и простоту алгебраического метода решения задачи.

Чрезвычайно важно, чтобы школьники возможно раньше усвоили алгебраический метод решения задач в геометрии.

Надо учить их при решении геометрических задач на вычисление устанавливать зависимость на основе геометрических теорем и выражать эту зависимость системой уравнений.

Решение некоторых алгебраических задач геометрическими средствами, например с помощью графиков, всегда вызывает у учащихся интерес и воспитывает у них правильное понимание своеобразного единства математических дисциплин.

§ 5. Воспитательная работа на уроках математики

В новой Программе КПСС намечен величественный план построения коммунизма в нашей стране. Одной из важнейших задач этого плана является воспитание всех трудящихся нашей страны в духе высокой идейности и преданности коммунизму, коммунистического отношения к труду.

В процессе формирования нового человека одно из почетных мест принадлежит советской школе.

Математика, на которую отводится около 17% всего учебного времени, не может стоять в стороне от решения общих задач, стоящих перед школой, в воспитании человека коммунистического общества.

Воспитательные цели преподавания математики изложены выше (§ 1).

Успех политико-воспитательной работы при обучении математике возможен только тогда, когда сам учитель будет любить и знать свою страну и отдавать все свои силы коммунистическому воспитанию подрастающего поколения. Для этого учитель должен упорно работать над повышением своего идейно-теоре-

тического уровня, следить за развитием науки и наряду с этим совершенствовать свое мастерство в области преподавания математики.

Для выработки у учащихся правильного понимания математики в духе диалектико-материалистического учения необходим материалистический подход к основным положениям математики. Например, нельзя сразу начинать курс геометрии с утверждения, что точка не имеет измерения, что линия не имеет ширины, и т. д. Необходимо проделать с учениками большую подготовительную работу, указав, что понятие о точке, линии и многие другие математические понятия возникли в результате практической деятельности людей, например, при измерении длин в природе. Непосредственно на опыте человек убедился, что толщина веревки, которой он пользовался при измерении, не имела значения. Отсюда через абстракцию получилось понятие о линии, определяемой у Евклида как длина без ширины. Далее, вбитый в землю колышек определял место, откуда начиналось измерение, и измерение было тем точнее, чем колышек тоньше. Таким образом, путем абстракции от натуральных объектов создалось понятие о точках, не имеющих никаких измерений, о бесконечной прямой, о теле, имеющем только форму и объем, и т. д. Полезно, если учитель в VI классе расскажет ученикам о том, как возникла геометрия в древнем Египте и Ассиро-Вавилонии...[1]. Вообще, при каждом удобном случае учитель должен указать на те жизненные задачи, которые вызывали развитие математики. Например, дальние морские путешествия вызывали потребность в астрономических вычислениях, что в свою очередь сказалось на развитии тригонометрии. Такие беседы помогут ученикам осознать, что развитие математики как науки во многих случаях зависело от развития производительных сил и в то же время влияло на их прогресс.

Прежде чем приступить к изучению какой-нибудь геометрической фигуры, необходимо проверить, существует ли у школьников соответствующее представление этой фигуры, и указать возможность ее построения. Например, приступая к изучению треугольника, следует построить несколько треугольников и установить, каким условиям должны удовлетворять те три отрезка, из которых может быть построен треугольник.

Необходимо с самых ранних пор, конечно, считаясь с возрастом учащихся, пояснить, какое отношение существует между общими теоретическими рассуждениями и частными суждениями. Учителю следует постоянно обращать внимание учеников на то, что утверждение какого-нибудь положения на основании даже очень большого числа частных случаев еще не обладает достоверностью. Можно привести несколько примеров.

---

[1] Подробно см. ч. IV, § 16.

а) Найдем произведение всех простых чисел до данного простого числа включительно и к произведению прибавим 1.

$$2+1=3;$$
$$2\cdot 3+1=7;$$
$$2\cdot 3\cdot 5+1=31;$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1=211.$$

Напрашивается вывод, что всякое число, равное сумме единицы и произведений всех последовательных простых чисел до k включительно, то есть $P=2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot k+1$, есть простое число.

Если взять $P=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1=2311$, то получится опять простое число. Но следующие два числа, составленные по такому же способу, будут составными числами.

Действительно,

$$P=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1=30\,031=59\cdot 509$$

и

$$P=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17+1=510\,511=19\cdot 26\,869$$

суть составные числа.

б) Рассмотрим трехчлен x^2+x+41.

Если x дать значение 0; 1; 2; 3; 4; ...; 39, то получается простое число, но если положить $x=40$, то получается составное число. Действительно,

$$40^2+40+41=40(40+1)+41=41\cdot(40+1)=41^2$$

С другой стороны, неверным будет утверждение, что опыту, понимаемому в самом широком смысле этого слова, не следует придавать значения. Опыт является базой для многих теоретических рассуждений, хотя он не может служить основанием для безоговорочного распространения некоторого математического предложения на все возможные случаи. Например, пусть каждому ученику предложено транспортиром измерить все три угла треугольника и найти сумму углов треугольника. Получится около сорока случаев. На основании опытных данных, а их достаточно много, получается, что сумма углов треугольника равна приблизительно 180° (возможны отклонения в 1—2° в ту или другую сторону из-за неточности измерения).

После этого учитель ставит перед классом задачу, чему же именно равна сумма углов треугольника, и доказывает теорему о сумме углов треугольника. В этом случае теория подтверждает опыт и является обобщением его, а опыт служит отправным пунктом к обобщению.

Необходимо также показать учащимся, что теория помогает изучать явления, помогает избегать рассмотрения большого числа частных случаев, что экономит время. Например, сум-

ма углов любого выпуклого многоугольника может быть найдена теоретическими рассуждениями и затем полученная формула применена к некоторым частным случаям и проверена на опыте.

Важной частью воспитания материалистического мировоззрения является атеистическое воспитание. Большую роль в этом отношении может сыграть ознакомление учащихся с эпохой упадка математических знаний в V—XII вв. В эпоху царствования римских императоров Феодосия и Юстиниана под воздействием проповедников православия были изданы законы, воспрещающие занятия математикой. Так, в одной из статей законодательства того времени под названием «О злодеях математиках и тому подобных» говорилось: «Совершенно воспрещается достойное осуждения искусство математики». Можно рассказать ученикам о разгроме Александрийской школы, об убийстве талантливой представительницы этой школы Гипатии толпой фанатиков.

На занятиях математического кружка следует рассмотреть вопрос о числовой мистике.

Удачный подбор задач и упражнений имеет большое значение при проведении воспитательной работы на уроках математики.

На школьников производит сильное впечатление величие нашей Родины и те грандиозные задачи, которые разрешаются у нас в настоящее время. Поэтому следует давать задачи на сравнение площадей, занимаемых СССР и другими странами, численности народонаселения, длины железных дорог и т. д. При решении таких задач ученики попутно углубляют свои сведения о нашей родной стране.

Полезно с учащимися вычерчивать диаграммы, построенные на статистических данных из различных отраслей народного хозяйства СССР. Конечно, при этом не следует перегружать каждого ученика выполнением всех расчетов. В некоторых случаях выполнение их следует поручать группе учеников, а затем использовать расчеты всеми учениками класса при вычерчивании диаграмм. Учащиеся убедятся в том, что наша Родина имеет самую большую площадь, по народонаселению занимает одно из первых мест, что у нас наиболее развитая промышленность и т. д.

Материалы для задач и диаграмм можно найти в экономических справочниках или в газетах.

Приведем несколько примеров.

1. Производство электроэнергии в СССР в 1965 г. (по плану) составит 520 млрд. *квт · ч*, что в 267 раз больше, чем в 1913 г., в 11 раз больше, чем в 1940 г., и в 2,2 раза больше, чем в 1958 г. Определить, сколько электроэнергии производилось в 1913 г., в 1940 г. и в 1958 г.

Необходимо показывать ученикам, что достижения Советского Союза велики по сравнению с достижениями капиталистических стран, выявлять преимущество социалистической системы над капиталистической. В некоторых случаях от учителя потребуется очень краткое разъяснение, в других случаях цифровые данные будут настолько очевидны, что не потребуется никакой дополнительной беседы. Следует всегда помнить, что язык цифр во многих случаях является самым убедительным. Обязательным требованием для всякой задачи, взятой из жизни, является ее достоверность.

2. Найти число жителей, приходящихся на одного врача в следующих странах:

Таблица 1

Страны	Население (в тысячах)	Число врачей (в тысячах)	Ответ: число жителей, приходящихся на одного врача
США (1956 г.)	171 229	217	790
Англия (1956 г.)	51 455	42,8	1200
Бельгия (1957 г.)	8 989	9,99	900
СССР (1956 г.) (не включая зубных врачей)	200 200	329,4	670

Примечание. В настоящее время число жителей, приходящихся на одного врача в СССР, еще меньше.

3. Численность населения в СССР

в 1959 г. 208,8 миллиона человек
» 1960 г. 212,3 » »
» 1961 г. 216,2 » »

Найти процент годового прироста населения в СССР.

4. Численность населения США

в 1953 г. 159,64 миллиона человек
» 1957 г. 171,23 » »
» 1960 г. 180,5 » »

Найти средний годовой прирост населения в США.

5. В 1965 г., если принять объем промышленного производства в США за 100%, то объем производства в СССР будет 84,5%. Начиная с 1965 г. после выполнения семилетнего плана на ближайшие годы рост промышленного производства в СССР в год будет составлять 8,6%, а в США — 2,4%. Начертить график динамики производства в СССР и в США. Когда СССР догонит США?

На сколько процентов СССР перегонит США в 1970 г.?

Решение (рис. 14).

$$100+2{,}4x=84{,}5+8{,}6\,x,$$

отсюда

$$x=2{,}5,$$

то есть в середине 1968 г. СССР догонит США.

На задачах можно показать, какое внимание уделяет Советское правительство и партия развитию науки в СССР.

На уроках математики и на кружковых занятиях следует познакомить учащихся с биографиями и работами наших выдающихся математиков. Не всегда можно изложить ученикам суть научных открытий наших замечательных соотечественников, но даже знакомство с их биографиями вызовет чувство гордости и уважения к ним. Такие имена, как Л. Эйлер (1707—1783), Н. И. Лобачевский (1793—1856), В. Я. Буняковский (1804—1889), М. В. Остроградский (1801—1861), П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922), С. В. Ковалевская (1850—1891), А. Н. Крылов (1863—1945), должны быть известны ученикам средней школы. Представляет большой интерес и деятельность современных математиков, как-то: президента Академии наук М. В. Келдыша, академиков В. И. Смирнова, А. Н. Колмогорова, П. С. Александрова, И. М. Виноградова и др. Следует познакомить школьников, хотя бы кратко, с именами более молодых советских математиков, например Ю. В. Линника, А. И. Мальцева и др.

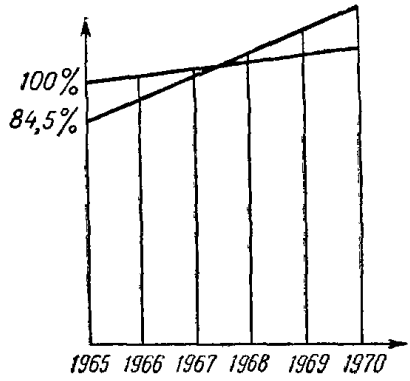


Рис. 14

Развитие навыков коллективной работы. На уроках математики довольно часто можно показать ученикам, что при правильном распределении обязанностей коллектив имеет возможность выполнить такую работу, которая не под силу отдельному члену его.

При этом у каждого ученика развивается чувство ответственности за порученный ему участок работы. При правильной организации труда широко можно использовать и взаимоконтроль.

Приведем пример. Пусть требуется составить таблицу значений для длины окружности или площади круга в зависимости от радиуса (работа выполняется в восьмилетней школе). Организация работы может быть следующая: все ученики в классе объединяются в группы по 3—4 человека, заранее должно быть

заготовлено 40 деревянных или металлических кругов диаметрами 2; 2,5; 3; ... *см*.

Если почему-либо трудно заготовить все круги различных диаметров, то можно изготовить такие, что среди них будут встречаться круги с одинаковыми диаметрами.

Таблица 2

Диаметр окружности (в *см*)	Длина окружности	Отношение длины окружности к диаметру
2		
2,5		
3		
3,5		
и т. д.		

Каждому звену предлагается измерить диаметр и длину окружности четырех кругов. Каждый ученик должен найти диаметр и длину окружности не менее двух кругов.

Произведя соответствующие измерения и вычисления, каждое звено заполняет следующую карточку (см. табл. 2). Учителю легко проверить правильность измерений и вычислений, так как отношение длины окружности к диаметру должно примерно получиться около 3,1.

Необходимо указать срок выполнения работы, по истечении которого на доске вывешивается большой лист бумаги с начерченной на нем системой координат. На оси OX будут отложены длины диаметров, на перпендикуляре к оси OX наносятся соответствующие длины окружностей. Каждое звено на данном листе бумаги отмечает точки, соответствующие длинам окружности для различных диаметров. После этого остается соединить все полученные точки; в данном случае должна получиться прямая линия, которая и будет графиком зависимости длины окружности от диаметра. Заметим, что более значительные ошибки в измерениях и вычислениях будут немедленно обнаружены. Например, если для диаметра $D=4$ *см* найдена длина окружности 14,5 *см*, то соответствующая точка не будет расположена на прямой, проходящей через остальные точки (рис. 15). Дальше дается понятие о числе π.

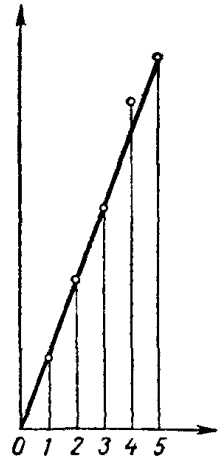


Рис. 15

Помощь предприятиям. Школа во многих случаях может оказать некоторую помощь предприятиям. В колхозах, совхозах, сельсоветах, домоуправлениях постоянно приходится производить ряд расчетов; имеющиеся специальные пособия для различных вычислений или распространены слабо, или пользоваться ими затруднительно. Можно поручить классу составить таблицу, наклеить ее на картон или плотную бумагу и

передать заинтересованным лицам. Большое удовлетворение получат ученики, если удастся облегчить труд счетовода, бригадира и т. д.; конечно, нужно проинструктировать работников, как пользоваться составленной таблицей.

Пример. Как известно, для каждой области установлена базисная жирность молока. Молоко, принятое на заготовительный пункт, нужно переводить на базисную жирность.

Постоянно приходится решать на практике следующую задачу. Базисная жирность молока установлена в 3,8%. Колхоз продал 223 *л* молока жирностью 3,5%. Сколько литров молока нормальной жирности продал колхоз?

В 223 *л* молока содержится жира: $35 \cdot 223$ *г*. В x *л* молока при жирности 3,8% должно быть жира $38x$ *г*. Следовательно,

$$38x = 35 \cdot 223,$$

откуда

$$x = 205{,}5 \ (л),$$

то есть колхоз продал молока нормальной жирности 205,5 *л*.

Таким образом, имеем правило: для пересчета на базисную жирность принятое количество молока в литрах умножается на процент жирности и делится на базисную жирность.

После того как несколько задач такого типа будет решено в классе, можно предложить ученикам составить следующую таблицу (ученики разбиваются на группы, каждой группе поручается определенное задание).

Покажем, как пользоваться данной таблицей (см. табл. 3).

Колхоз продал 285 *л* молока жирностью 3,8% и 318 *л* молока жирностью 4,2%. Сколько молока в пересчете на базисную жирность 4% продал колхоз?

285 *л* молока жирностью 3,8%.

Из таблицы имеем:

200 *л*	190
80 »	76
5 »	4,75
	270,75 *л*

318 *л* молока жирностью 4,2%.

Из таблицы имеем:

300 *л*	315
10 »	10,5
8 »	8,4
	333,9 *л*.

Всего колхоз продал молока 4-процентной жирности $270{,}75 + 333{,}9 = 604{,}65$ *л*, или 604,6 *л*.

Примечание. Необходимо узнать, какая базисная жирность установлена для колхозов вашего района, и составить соответствующую таблицу.

Таблица 3

Пересчет молока на базисную жирность (базисная жирность 4%)

Колнчество молока в литрах	Процент жирности						
	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3	4,4
1	0,95		1		1,05		
2	1,9		2		2,1		
3	2,85		3		3,15		
4	3,8		4		4,2		
5	4,75		5		5,25		
6	5,7		6		6,3		
7	6,65		7		7,35		
8	7,6		8		8,4		
9	8,55		9		9,45		
10	9,5		10		10,5		
20	19		20		21		
30	28,5		30		31,5		
40	38		40		42		
50	47,5		50		52,5		
60	57		60		63		
70	66,5		70		73,5		
80	76		80		84		
90	85,5		90		94,5		
100	95		100		105		
200	190		200		210		
300	285		300		315		
....	....		....		....		

Примечание. Вся таблица должна быть полностью заполнена.

Воспитание чувства уверенности в своих силах. Неоднократно приходится наблюдать, как ученики, решая пример или задачу, немедленно сверяют свое решение с ответом в книге; если результат совпадает с ответом, то учащийся убежден в правильности решения. Когда же ответа в книге нет или когда приходится решать какую-нибудь практическую задачу, то ученик часто сомневается в своем решении. Это происходит потому, что ученик не верит в свои силы, не доверяет собственным рассуждениям и вычислениям. Пока у школьников нет достаточно твердых навыков, ответы в задачнике необходимы. Но вместе с тем полезно проводить тщательную проверку решения. Если не делать этого, то у ученика может выработаться излишняя самоуверенность и переоценка своих сил. С развитием навыков учеников постепенно надо отучать пользоваться ответами в задачниках и добиваться, чтобы они были уверены в правильности своего решения, не прибегая к проверке по книге и контролю учителя. Такая уверенность в своих силах появится, если одну и

ту же задачу решить различными способами (если задача допускает различные решения); получение одного и того же ответа является подтверждением правильности решения. Полезно прибегать изредка к проверке решения с помощью опыта.

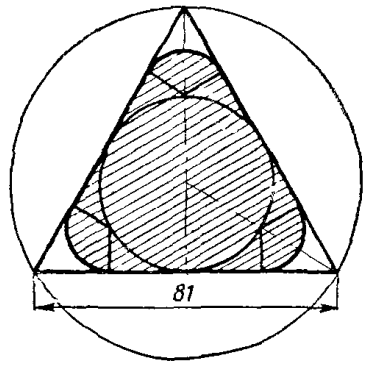


Рис. 16

Пример. Требуется найти вес стальной детали, полученной от срезания концов правильного треугольника (рис. 16); толщина пластинки 5 *мм*, удельный вес стали $7{,}2\frac{Г}{см^3}$.

Решение: Площадь искомой детали

$$S=S_{\Delta}-6S'_{\Delta}+3S_{\text{сект}}=S_{\Delta}-\frac{1}{4}\,S_{\Delta}+S_{\text{кр.}}=\frac{3}{4}\,S_{\Delta}+S_{\text{кр.}}$$

Радиусы описанной около треугольника, вписанной в него окружности и радиус закругления (x) соответственно будут

$$R=\frac{81}{2\cos 30^\circ}\approx 46{,}8\ мм;\quad r=\frac{R}{2}\approx 23{,}4\ мм;\quad x=(R-r)\sin 30^\circ\approx 11{,}7\ (мм).$$

Площадь заштрихованной фигуры будет

$$S=\frac{3}{4}\cdot 2840+432=2130+432=2562\ (мм^2),\ \text{или}\ 25{,}6\ см^2.$$

Вес детали будет

$$P=25{,}6\cdot 0{,}5\cdot 7{,}2\approx 93\ (Г).$$

Затем данную деталь следует взвесить. Если результаты взвешивания и вычисления совпадут в пределах допустимой точности, то правильность математического решения задачи подтверждается на опыте.

Иногда при решении задач на вычисление проверку можно осуществить с помощью измерений. Так, например, плоскую фигуру, площадь которой нужно вычислить, можно в определенном масштабе начертить и с помощью палетки приближенно найти ее площадь, а затем найти площадь этой же фигуры вычислением.

Значительную роль в развитии чувства уверенности в своих силах может сыграть так называемая прикидка результата. Прежде чем приступить к вычислениям, следует грубо определить возможное значение.

Приведем примеры.

Найти приближенный результат выражения

$$\frac{20\frac{8}{15}\cdot 7{,}5 - 54{,}6\cdot\frac{2}{5}}{3\frac{13}{21}\cdot 8{,}2 - 34{,}4 : 14\frac{1}{3}} + 43{,}75 : 11\frac{2}{3} + 24{,}6 : 1{,}5.$$

Округляем числа

$$\frac{20\cdot 7{,}5 - 55\cdot\frac{2}{5}}{4\cdot 8 - 34 : 14} + 44 : 11 + 25 : 1{,}5;$$

$$\frac{150 - 22}{32 - 2} + 4 + 17;$$

$$\frac{128}{30} + 4 + 17, \text{ или } 4 + 4 + 17 \approx 25,$$

то есть окончательный результат будет колебаться около 25.

Приведем еще один пример. Решить уравнение

$$3x^2 - 14{,}8x + 6{,}2 = 0.$$

Округлим коэффициенты

$$3x^2 - 15x + 6 = 0, \text{ или } x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Корни последнего уравнения будут

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} \approx \frac{5 \pm 4}{2}, \text{ откуда } x_1 = \frac{9}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Корни исходного уравнения будут 4,20 и 0,46 с точностью до 0,01.

При сравнительно небольшой затрате времени можно добиться, что ученики будут предвидеть результат ответа с некоторой точностью.

Однако необходимо указать им, что результаты, полученные при помощи прикидки, отнюдь не являются решением поставленной задачи.

Необходимо приучать учащихся работать, учитывая время Каждый учитель знает, что когда дается в классе контрольная работа или самостоятельное упражнение, то часть учеников не успевают выполнить задание и просят добавить несколько минут. В жизни приходится не только правильно разрешать поставленную задачу, но и дать ответ в короткий срок.

Поэтому, давая какое-нибудь упражнение или группу задач, учитель должен указать, что на пример 1 отводится, скажем, 5 минут, на пример 2 — 15 минут, на пример 3 — 10 минут и т. д.

Для тех учеников, которые решили первые три примера рань-

ше указанного срока, следует дать 4-й, возможно, и 5-й примеры. Опасность заключается в том, что погоня за количеством решенных примеров может привести к ухудшению качества решений. Чтобы избежать этого, учитель просматривает, как ученик решил обязательные примеры, и только после этого дает ему дополнительные упражнения. Для сильных учеников учитель заранее может подготовить дополнительный материал, записанный на индивидуальных карточках. Учащийся твердо должен знать, что при оценке его работы принимается во внимание и время, затраченное на выполнение. Поэтому учителю следует на основании опыта предварительно определить время, необходимое для решения каждой задачи и примера.

Планирование. Планирование работы имеет большое значение в любой деятельности человека.

Математика дает широкую возможность воспитать у школьников навыки планирования. К сожалению, в школе на это не всегда обращают должное внимание. Как правило, ученики в большинстве случаев приступают вслепую к решению задачи или примера. Они начинают решать задачу, не отдавая себе отчета, что нужно сделать, как можно выполнить и т. д., и работают на авось.

С младших классов следует приучать детей руководствоваться следующим:

1) прежде всего вдуматься в содержание задачи и уяснить себе, что дано, что нужно найти;

2) наметить план решения, при этом установить, все ли необходимые данные имеются для решения задачи, или имеются лишние данные;

3) выявить, каким способом можно решить задачу.

Прежде чем приступить к решению примера, ученик должен установить порядок действий, в некоторых случаях сделать прикидку и лишь затем приступить к решению.

Составлению плана доказательства теоремы, решения задачи всегда должно уделяться достаточно внимания, иначе ученик не привыкнет к сознательному решению задачи или доказательству теоремы.

Рациональные методы решения. При обучении математике от учеников следует требовать наиболее рациональных способов решения задач и примеров. Поэтому всегда, когда возможно, надо указывать наиболее простой и изящный способ решения или доказательства. Часто последний приходится применять после того, как задача уже решена.

Заметим, что в математике есть своеобразная красота. Для тех учеников, которые поймут эту красоту, математика перестанет быть сухой наукой. Надо показать учащимся, что творчеству в математике открыта широкая возможность. Чем шире будут применяться различные способы решений или доказательства

теорем, тем больше интереса будет у учащихся, а это является одним из условий высокого качества усвоения материала.

Уже в V классе следует познакомить учеников с различными приемами выполнения действий, например: $384 \cdot 25$ (разделить множимое на 4 и полученный результат умножить на 100).

Особенно интересны различные приемы решения, применяемые в алгебре и геометрии.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2+2x+3)^2-2(x^2+2x+2)-17=0$$

Если применять обычный способ, то есть возвести многочлен в первой скобке в квадрат, раскрыть скобки, сделать приведение подобных членов и т. д., то решение данного уравнения будет довольно сложным и займет много времени. Значительно проще решается данное уравнение, если положить

$$x^2+2x+2=y, \text{ или } x^2+2x+3=z.$$

Тогда получится квадратное уравнение

$$(y+1)^2-2y-17=0 \ (1), \text{ или } z^2-2(z-1)-17=0$$

Корни уравнения (1) будут $y_1=4$ и $y_2=-4$.

Далее имеем:

$$x^2+2x+2=4, \text{ откуда } x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}.$$
$$x^2+2x+2=-4 \text{ (корни мнимые).}$$

Пример 2. Построить ромб, если известна сторона ромба и диагональ.

Решение. 1-й способ. Строится треугольник по стороне (диагонали) и двум равным сторонам и т. д.

2-й способ. Строится отрезок прямой, равный данной диагонали, из середины его восстанавливается перпендикуляр, из конца диагонали проводится дуга радиусом, равным стороне ромба, и т. д.

С учащимися следует рассмотреть оба способа решения, сравнить их и установить преимущество одного над другим.

Воспитание аккуратности. Малейшая небрежность в математике приводит к ошибкам, обнаружив которые, работу приходится переделывать. Необходимо бороться с безалаберностью, безответственностью при выполнении работ. Следует требовать от учеников аккуратного выполнения работы как на доске, так и в тетрадях. Все цифры должны быть одинакового размера, написаны красиво, четко. Цифры одноименных разрядов должны быть подписаны соответственно друг под другом и т. д.

Надлежит обращать внимание на ведение тетрадей. Ученик обязан строго соблюдать форму записей, установленную учителем, правильно и аккуратно обращаться с тетрадью (поля

в тетради, обведение формул в рамку, подчеркивание окончательного результата и т. д.).

Одной из причин небрежности являются так называемые черновики, где производятся промежуточные вычисления. Обычно записи в черновиках ведутся кое-как, нет никакого порядка, вычисления замазываются, и порой сам ученик не может разобрать, что там записано. Черновики вырабатывают у детей привычку кое-как относиться к порученной работе. Мы категорически возражаем против такой системы ведения черновиков. По нашему мнению, черновики и чистовики должны вестись одинаково аккуратно.

Можно рекомендовать следующий порядок записи всех вычислений. Страница тетради разделяется на две половины: на одной половине записываются все промежуточные и окончательный результаты, на второй половине промежуточные вычисления. Можно при больших вычислениях применять следующее расположение: для основных вычислений отводится правая страница, для промежуточных вычислений левая страница.

Заметим, что если какое-нибудь вычисление произведено неправильно, то ученик аккуратно его перечеркивает, выполняет его снова; замазывать записи не разрешается.

Ученику должно быть известно, что перечеркивание ему не будет поставлено в вину, а за небрежность отметка будет снижена.

Необходимо требовать от учеников правильного выполнения чертежей, особенно в работах, задаваемых на дом.

В младших классах при выполнении чертежей на классной доске следует пользоваться чертежными приборами (линейкой, угольником, циркулем). В старших классах уже можно требовать выполнения геометрических чертежей на классной доске от руки, в частности по стереометрии. Необходимо добиваться, чтобы ученик мог быстро сделать относительно правильный эскиз чертежа.

§ 6. Учебные планы и программы

Учебные планы и программы по математике, как и по другим учебным предметам, являются государственными документами, обязательными для выполнения и по содержанию и по срокам.

Прежде всего программы определяют целенаправленность обучения математике в школе; программы выделяют основные идеи, которыми должно быть пронизано изучение школьного курса математики: тесная связь обучения с жизнью, трудом, практикой коммунистического строительства; выработка у учащихся правильного представления о математике как науке о пространственных формах и количественных отношениях реаль-

ного мира; раскрытие перед учащимися значения математики в технике и повседневной жизни.

Программы указывают на необходимость добиться сознательного использования учениками правил и формул, а не только механического запоминания их.

Программы направляют учителя на самостоятельные поиски наиболее эффективных приемов обучения, на такую организацию работы школьников, которая служила бы повышению их интереса к математике и на основе интереса к предмету повысила бы математическую культуру учащихся.

В программах по отдельным предметам дается не только содержание учебного материала, но и пояснения к этому содержанию, соответствующие специфике предмета.

Программы предусматривают на первом этапе обучения широкое привлечение наглядности, опытную проверку и разъяснение изучаемых фактов на конкретных примерах.

В построении программ по математике соблюдается принцип систематичности; однако мы встречаемся с тем, что некоторые вопросы повторяются в программах разных классов.

Такое расположение материала, когда к одному и тому же вопросу возвращаются несколько раз, постепенно углубляя и расширяя его или освещая с разных точек зрения с применением различных методов изучения, называется концентрическим Существуют разные взгляды на полезность такого расположения материала. Некоторые педагоги считают, что концентризм в преподавании вреден, и в подтверждение этого взгляда приводят следующие доводы:

а) Концентрическое расположение материала вынуждает учителя на различных ступенях изучения одного и того же вопроса давать различные толкования одним и тем же понятиям, приводить иногда различные определения одних и тех же математических понятий, в выводах одних и тех же зависимостей опираться в младших классах на опыт, на неполную индукцию, в старших классах повторять те же выводы на логической основе. Первоначально сообщенное учащимся обычно настолько крепко укладывается в их памяти и понимании, что вносимые позже изменения воспринимаются ими с трудом и учащиеся часто продолжают пользоваться ранее полученными определениями и обоснованиями.

б) Повторное изучение одного и того же материала, хотя бы и на новой основе, не может вызвать у школьников интереса и нужного внимания, а следовательно, ведет к понижению работоспособности учащихся.

в) Концентрическое расположение материала требует лишнего времени.

Сторонники концентризма считают, что в некоторых случаях концентрическое расположение материала вызывается столь

важными причинами, что, несмотря на указанные выше недостатки, оно необходимо. Этими причинами являются:

а) Необходимость связи теории с практикой.

б) Потребность смежных дисциплин.

в) Предварительное создание у учащихся некоторых наглядных образов и представлений позволяет впоследствии успешно изучать абстрактные положения в математике.

г) Стремление дать более законченные знания оканчивающим восьмилетнюю школу, лучше подготовить их к жизни.

Учитель математики должен учитывать те недостатки, которые может повлечь за собой повторное изучение одного и того же вопроса, тщательно обдумать содержание и методику преподавания. Так, при первом знакомстве с новыми понятиями в младших классах нельзя давать неверные определения, которые позже заменять другими — правильными. Например, нельзя говорить в VI классе, что $\pi = 3{,}14$ или что в параллелограмме углы не прямые. Если нельзя дать правильного определения, надо заменить его описанием или простым показом изучаемых объектов. Возвращаясь в старших классах к знакомым вопросам, надо вести преподавание так, чтобы ученик понял, что он изучает их теперь на более высокой научной основе. Если повторное изучение материала и требует лишнего времени, эта затрата окупается более прочным и сознательным усвоением материала.

Программы предполагают, что ученики постепенно вырабатывают навыки в дедуктивных доказательствах; программы требуют добиться от учащихся прочных навыков в вычислениях и в решении задач систематической тренировкой, но при этом избегая громоздких вычислений и таких задач, которые требуют для решения искусственных приемов и затраты большого количества времени.

«Определяя содержание и объем отдельных тем курса, программа по математике в то же время предоставляет учителю широкие возможности для выбора различных методических путей и приемов в изложении конкретного материала. Время на прохождение отдельных тем, указанное в программе, является ориентировочным».

Эти указания в программе не только позволяют учителю проявлять инициативу и более сознательно выбирать методы и приемы обучения математике, но и стимулируют его к этому.

Педагог вправе, учитывая подготовку учащихся и общее развитие класса, задерживаться на том учебном материале, который оказался более трудным для данного класса, и даже излагать учебный материал с различной глубиной в параллельных классах. Вместе с этим некоторая свобода в выборе методов изложения учебного материала налагает на учителя и большую ответственность за результаты работы.

ГЛАВА II

ПРИНЦИПЫ, ФОРМЫ И МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

§ 7. Общие принципы советской дидактики в преподавании математики

Дидактические принципы выражают общие требования педагогики к учебному процессу.

Соблюдение дидактических принципов является необходимым условием успешного обучения. Покажем, каким образом эти принципы осуществляются в процессе преподавания математики.

Принцип сознательности. Глубокое понимание изучаемого материала является основным условием успешного обучения.

Математика оперирует рядом абстрактных понятий. В связи с этим необходимо выработать у школьников понимание того, что математика изучает количественные отношения и пространственные формы действительного мира и возникла из практических нужд людей. Ф. Энгельс, касаясь вопроса о происхождении математических понятий, писал: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления». На уроках арифметики и алгебры учитель должен показать, что понятие *числа* появилось и развивалось постепенно в связи с практической деятельностью человека.

Практические корни геометрии могут быть убедительно показаны в беседе о возникновении геометрии. При изучении отдельных вопросов математики в школе следует показывать связь их с окружающей действительностью. Так, например, приступая к изучению возможных взаимных положений прямой и плоскости, нужно показать, что каждая комбинация заимствована из окружающей действительности и знание ее поможет глубже изучить свойства окружающих предметов.

Существенное значение имеет четкое понимание определений. Формулируя определение, ученик должен понимать смысл каждого утверждения, содержащегося в нем. Так, например, ученик должен усвоить, что, если из определения параллельных прямых исключить требование, чтобы прямые лежали в одной плоскости, получим определение, которому будут удовлетворять и скрещивающиеся прямые. Необходимо, чтобы ученик умел четко отличать существенные признаки определяемых понятий от несущественных.

Изучив какой-либо раздел, учащийся должен понимать, с какой целью изучался этот раздел, что является главным, существенным в нем, как можно объяснить введенные правила и подмеченные закономерности, какова связь изученного материала с ранее известным.

Существенным моментом при изучении дробей является то, что задача нахождения дроби числа решается умножением на дробь. Это положение дает возможность осознать целесообразность правила умножения дробей, объяснить, почему при умножении на правильную дробь произведение меньше множимого, при умножении на неправильную дробь — больше множимого. Ученики должны знать, в чем сходство и в чем различие между умножением натуральных чисел и дробных чисел.

Усвоение будет более сознательным, если новые идеи будут излагаться как развитие ранее известных. Так, вводя понятие об отрицательных числах, нужно напомнить ученикам историю возникновения натуральных чисел, нуля, дробных чисел. Тогда появление отрицательных чисел ими будет воспринято как естественное продолжение развития понятия о числе.

Осуществление принципа сознательности требует того, чтобы ученик, составляя план решения задачи, мог обосновать выбор каждого действия. Это может быть достигнуто, если он будет пользоваться методом анализа при отыскании плана решения задачи.

Сочетание методов анализа и синтеза даст возможность ученикам понять целесообразность дополнительных построений и выбор определенного плана доказательства теоремы. Чтобы выяснить, насколько усвоено доказательство теоремы, следует предлагать формулировать теоремы, на которые ссылался ученик, доказывая данную теорему, и указывать, где в процессе доказательства использовалось каждое условие теоремы.

Иногда при решении задачи ученик использует теоремы, обратные доказанным, считая, что если верна прямая теорема, то верна и обратная, а иногда ученик не видит различия между прямой и обратной теоремами. Это указывает на то, что материал изучен поверхностно, без достаточного понимания.

Принцип научности. В курсе школьной математики должны найти отображение основные идеи современной математики.

Идея функциональной зависимости должна пронизывать содержание всего школьного курса математики. В связи с этим должно быть уделено большое внимание функциональной пропедевтике при изучении арифметики в V и VI классах. Геометрический материал должен излагаться в свете идей геометрических преобразований. Шире должна осуществляться связь алгебры и геометрии.

Школьные математические курсы не могут отождествляться с соответствующими научными курсами. Однако определения понятий, формулировки теорем и аксиом должны быть безукоризненными с научной точки зрения. К сожалению, иногда ошибочно утверждают, что аксиомой называется предложение, которое вследствие очевидности принимается без доказательства. Нельзя допускать механического перенесения законов действия из одной области чисел в другую область (учащиеся часто делают это).

Осуществление принципа научности выдвигает большие требования к логической стороне изложения. Часть этих требований уже была высказана при рассмотрении принципа сознательности.

Существенно научить школьников отличать признаки понятий от их определений.

Ученики должны четко формулировать условие и заключение теоремы; уметь составить обратную и противоположную теоремы. У них должна быть выработана потребность в доказательстве каждого утверждения, возникающего в процессе доказательства теоремы, и умение записывать эти утверждения в символической форме.

В школьной практике встречаются такие случаи, когда ученики при доказательстве опираются на те факты, которые сами вытекают из доказываемого положения. Умелая работа учителя над подобными ошибками воспитывает у учащихся требовательность к логической строгости рассуждений. Предложение следует сообщить без доказательства, если для учеников это доказательство недоступно. В школе снижена требовательность к доказательству арифметических и алгебраических теорем. Следует помнить, что правильно проведенное рассуждение с использованием конкретных примеров имеет общий характер, если не основывается на частных свойствах этих примеров.

Принцип систематичности в изложении и усвоении материала. Принцип систематичности предполагает изложение курса математики в определенной логической последовательности. Перед изучением какой-либо темы ученик должен изучить материал, который является ее логической основой. Только при последовательном, систематическом изложении материала можно развить у школьников логическое мышление.

В силу возрастных особенностей учащихся система изложе-

ния математики в школе, вообще говоря, не совпадает с системой математики как науки. Так, например, нельзя начинать изложение курса геометрии в школе с системы аксиом.

Систематическое изложение не может быть достигнуто, если ученики не усвоили или забыли материал, который является базой для изучения нового вопроса. Поэтому в преподавании математики важную роль играет систематическое повторение материала. Так, для того чтобы перейти к делению на десятичную дробь, необходимо изучить деление десятичной дроби на целое число и затем повторить правила: 1) об увеличении и уменьшении десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз; 2) о сохранении величины частного при увеличении и уменьшении делимого и делителя в одно и то же число раз. Тогда правило деления на десятичную дробь будет воспринято пятиклассниками как одно из звеньев системы курса арифметики.

Систематичность знаний учащихся может нарушаться вследствие невнимательного отношения их к объяснению учителя, слишком быстрого темпа изложения нового материала, невыполнения домашних заданий и других подобных причин. Таким образом, осуществление принципа систематичности связано с организацией учебного процесса.

Важную роль играет систематичность в подборе упражнений. Упражнения необходимо располагать в порядке нарастания трудностей. Содержание задач должно носить комплексный характер: решая задачи, ученики должны не только закреплять вновь изученный материал, но и повторять ранее пройденный.

Устранение пробелов в знаниях учащихся и полноценная подготовка их к восприятию нового материала — одна из основных задач в деятельности учителя.

Принцип единства теории и практики. Принцип единства теории и практики является основным в марксистско-ленинской теории, и поэтому осуществление его имеет решающее значение в воспитании диалектико-материалистического мировоззрения. Показывая применение изученной теории к практике и указывая на то, что математика развивалась под влиянием практических нужд общества, мы вскрываем материалистическую сущность математики.

Проблема единства теории и практики приобретает особое значение в свете тех задач, которые поставлены перед школой Программой Коммунистической партии Советского Союза.

Все технические и научные расчеты основываются на применении математики. Поэтому политехническое обучение немыслимо без прочных и глубоких знаний самой математики. Однако только усвоение математики далеко не решает проблемы политехнического обучения. Ученики должны овладеть умением применять приобретенные знания по математике к ре-

шению практических задач и задач, возникающих при изучении других наук.

Психологами установлено, что знания, усвоенные в одной области, не переносятся автоматически на другую область. Следовательно, для осуществления политехнизации школьного курса математики необходима определенная целенаправленная деятельность учителя.

В процессе преподавания математики особое внимание должно уделяться тем вопросам программы, которые устанавливают непосредственные связи обучения математике с практикой. К таким вопросам относятся следующие:

1. Устные, табличные и инструментальные вычисления. Большое значение имеет умение рационально выполнять вычисления, делать «прикидку» результата.

2. Приближенные вычисления. В связи с этим важно научить школьников обрабатывать результаты лабораторных и практических работ.

3. Функциональная зависимость. Графики.

Ученики должны овладеть использованием графиков для вычислений (простейшие номограммы), для изучения свойств функций, решения уравнений.

Важное значение имеет умение читать графики, умение по графику составить представление о том, как протекает тот или иной процесс.

4. Вычисление длин, площадей, объемов. Пользование измерительными инструментами. Навыки в измерении длин, площадей и объемов тел с применением средств, которыми пользуются в технике. Знакомство с устройством измерительных инструментов: штангенциркуля, штангенрейсмуса, микрометра, курвиметра.

Решение задач по данным, полученным в результате непосредственного измерения.

5. Умение пользоваться чертежными инструментами. Умение делать чертежи, эскизы и понимать их.

6. Моделирование геометрических фигур. Желательно, чтобы построению модели предшествовал анализ свойств фигуры, расчет ее размеров.

Трудовое и производственное обучение дает возможность установить еще один вид связи преподавания математики с практикой. Наиболее распространенной формой этой связи является решение задач с производственным и практическим содержанием. Тематика задач должна быть главным образом политехнической, то есть должна касаться основных процессов различных производств. К таким задачам относятся задачи о винтовой линии, кривошипно-шатунном механизме, о ременной, фрикционной и зубчатой передачах, обточке на конус, движении по наклонной плоскости, о режущих инструментах, о раз-

метке. К этим задачам следует присоединить задачи о расходе электроэнергии, топлива, горючего, а в сельской школе, кроме того,— расчеты количества удобрений, норм высева семян, кормовых рационов для скота, определение объемов скирды, стога, сарая и др.

В осуществлении политехнического обучения большое значение имеют лабораторные и практические работы учащихся. Особенно велика роль практических работ, выполняя которые, учащиеся видят, как математика, по выражению В. В. Репьева, «применяется к действительным пространственным формам и количественным отношениям, а не к искусственно созданным моделям».

В установлении связи преподавания математики с жизнью значительная роль принадлежит производственным экскурсиям учащихся. Обычно экскурсии организуются преподавателями нескольких предметов, а поэтому носят комплексный характер. По материалам экскурсии ученики. выполняя задание учителя, составляют задачи, чертят диаграммы, графики. Во время экскурсии школьники знакомятся с техническими средствами измерений длин, площадей, объемов; с практическими средствами вычислений. Учащиеся получают возможность познакомиться с механическими способами вычерчивания графиков и с практическим использованием их.

Принцип доступности. Изложение учебного материала ученикам должно находиться в полном соответствии с уровнем их знаний, развитием и возрастными особенностями. У учащихся V—VIII классов слабо развито абстрактное мышление. Поэтому при введении новых понятий, идей следует идти от частного к общему, от известного к неизвестному. Практически это выражается в том, что общим теоретическим выводам предпосылают упражнения с конкретными данными. Так, доказательству теоремы о свойстве вертикальных углов предшествует решение задачи, в которой предлагается найти углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, по одному из углов. Выводу формулы корней квадратного уравнения предшествуют упражнения на выделение полного квадрата из квадратного трехчлена с числовыми коэффициентами и пр. Такие абстрактные понятия, как теорема, функция и т. п., могут быть хорошо усвоены, если проведена соответствующая подготовительная работа. В курсе алгебры VI класса ученикам будет доступно усвоение буквенной символики, если в курсе арифметики V и VI классов учитель использовал буквенную символику для обозначения неизвестных чисел, для записи законов и правил действий и предлагал учащимся составлять числовые формулы при решении задач.

Для того чтобы решение задачи было более доступным, необходима предварительная работа над усвоением условия

задачи. Ученик должен понять условие задачи, смысл каждого слова в тексте задачи, связь между величинами, данными в условии, выполнить краткую запись условия задачи и сделать чертежи и схемы, иллюстрирующие это условие.

Всякой сложной задаче, вызывающей затруднения у учащихся, следует предпослать более простые задачи, комбинацией которых является трудная задача.

Существенное значение имеет планирование учебной работы. Урок не должен быть перегружен учебным материалом. В плане урока необходимо предусмотреть работу по подготовке к восприятию нового материала.

Следует помнить, что для учеников восьмилетней школы изложение становится более доступным, если оно ведется методом беседы при активном участии самих учащихся.

Осуществление принципа доступности не предполагает освобождения учащихся от напряженной мыслительной деятельности. Обучать и воспитывать учащихся нужно в процессе преодоления трудностей, доступных для их возраста.

Принцип активности. Одной из основных задач преподавания математики в средней школе является воспитание у школьников логического и творческого мышления. Эта задача может быть разрешена при условии использования методов преподавания, активизирующих познавательную деятельность учеников.

Необходимо, чтобы ученики принимали деятельное участие в создании новых понятий, в открытии новых для них математических фактов. Они должны участвовать в постепенном создании логической схемы доказательства теоремы, вывода формулы, решения задачи.

Созданию активности учащихся, несомненно, способствует возбуждение интереса к изучаемой теме. С этой целью учитель в начале изложения темы может использовать эксперимент, наблюдения, различные примеры и задачи, показывающие практическую значимость изучаемой темы или ее теоретическую ценность. Например, введение понятия о тригонометрических функциях можно связать с решением задачи на отыскание расстояния до недоступного предмета. Решив такую задачу, ученики будут знать о практическом применении вводимых понятий и поэтому с большим интересом отнесутся к изучению их. Приступая к теме «Обращение обыкновенных дробей в десятичные», нужно обратить внимание учеников на то, что действия над десятичными дробями выполняются проще, чем над обыкновенными. Возникает вопрос: нельзя ли любую обыкновенную дробь заменить десятичной, и если можно, то как это сделать?

Интерес к изучаемому вопросу, сознание необходимости его изучения создают целеустремленное волевое усилие, способствующее проявлению активности учащихся.

Необходимо, чтобы ученики сами обнаруживали новые для них математические факты. В части IV показано, как это достигается с помощью наглядных пособий, чертежей, решения задач. Особенно большая активность учащихся достигается, когда новые знания они приобретают с помощью лабораторных и практических работ. Школьники испытывают большое удовлетворение в том случае, когда им удается самим подметить какую-либо закономерность в изучаемом явлении. Это положительно влияет на отношение учащихся к математике.

У учащихся восьмилетней школы необходимо создать убеждение в необходимости логического доказательства сформулированного предложения. Всегда ли верно то, что подмечено при наблюдении частных случаев, нет ли исключений? Почему необходимо логическое доказательство? Эти вопросы должны возникать у школьников.

При отыскании плана доказательства теоремы или решения задачи большая активность мыслительной деятельности учащихся достигается применением метода анализа. Опыт показывает, что при достаточных усилиях учителя ученики успешно овладевают этим методом.

Нужно добиваться усвоения общих приемов доказательств. Учащиеся должны знать, каким образом доказывается равенство отрезков, углов, треугольников, параллельность прямых и т. п. Так, например, они должны знать, что равенство отрезков доказывается с помощью рассмотрения треугольников, в которые эти отрезки входят, или с помощью теоремы об отрезках параллельных прямых, заключенных между параллельными прямыми, и т. п.

Наиболее эффективно участие учеников в беседе, проводимой эвристическим методом. Продуманная система вопросов помогает учащимся найти способ доказательства теоремы или решения трудной задачи, готовит их к самостоятельной формулировке определения, вывода. В процессе эвристической беседы ученики участвуют в создании цепи логических умозаключений, приводящих к определенной цели — доказательству теоремы или решению задачи. Таким образом, они овладевают методом самостоятельной творческой работы. Необходимо не только продумать систему вопросов, которые будут содействовать развитию мышления, но и подготовить учащихся к тому, чтобы они могли ответить на эти вопросы. Только посильные вопросы и упражнения способны будить мысль учащихся. Непосильные задания не активизируют мышление. Ученики должны быть уверены в возможности преодолеть встретившиеся трудности. Только тогда возможна мобилизация всех их сил и внимания. Замечания учителя, подобные таким, как: «Ты ничего не знаешь», не возбуждают, а подавляют активность детей.

Следует иметь в виду, что вопросы, не требующие напряжения мысли учащихся, подсказывающие ответы, лишь создают внешнюю видимость активной работы и, конечно, не развивают творческих способностей учащихся.

Возбуждению интереса к изучаемому вопросу, несомненно, способствует эмоциональная речь учителя, его авторитет и взаимное уважение между учителем и учениками.

Привитие ученикам навыков в выполнении устных и письменных вычислений возможно только при условии выполнения ими соответствующих самостоятельных работ.

Домашние задания наряду с упражнениями, аналогичными решенным в классе, должны содержать такие, для выполнения которых нужно проявить собственную инициативу, творчество.

Принцип наглядности. Осуществление принципа наглядности при изучении математики состоит в наблюдении различных предметов, моделей, чертежей, рисунков, а также в использовании опыта и представлений, накопленных учащимися. Наглядность в преподавании математики содействует реализации принципов сознательности, доступности и прочности знаний. Необходимость использования наглядных пособий подтверждается психологическими данными. Известно, что основой абстрактного мышления является предметное мышление. Наглядные пособия повышают интерес к изучаемому вопросу и этим содействуют мобилизации внимания учеников.

Весьма ценно с точки зрения наглядности геометрическое толкование арифметических и алгебраических фактов. Так, например, изучение свойств обыкновенных дробей и действий над ними значительно упрощается с помощью изображения дробных чисел в виде отрезков; иллюстрация рациональных чисел с помощью направленных отрезков дает возможность ученикам понять целесообразность правила сложения рациональных чисел и т. п.

Графики функций дают возможность ученикам самостоятельно формулировать свойства функций.

Осуществление принципа наглядности не ограничивается применением наглядных пособий. Изложение материала можно считать наглядным, если учитель в процессе объяснения использовал представления, которые сложились у школьников в результате жизненного опыта.

При решении задач, например задач на движение, широко используются графические иллюстрации.

При введении различных правил арифметики ученики убеждаются в их верности с помощью конкретных примеров.

Применение наглядных пособий должно быть продуманным. Здесь нельзя руководствоваться принципом: чем больше, тем лучше. Постоянная демонстрация наглядных пособий при изу-

чении теории и решении задач тормозит развитие пространственного воображения учеников. Применение большого количества наглядных пособий на одном и том же уроке нецелесообразно, так как при этом у школьников рассеивается внимание и снижается интерес к демонстрируемым пособиям.

Принцип прочности усвоения знаний. Овладение основами наук возможно только при прочном и сознательном запоминании. Преподавание математики необходимо организовать так, чтобы ученики были способны в дальнейшем воспроизводить изученный материал, использовать его при изучении дальнейшего курса теории и уметь применять к решению задач. Только при наличии определенного запаса знаний ученики могут овладевать новыми знаниями и проявлять творческие способности. С другой стороны, знания оказываются тем прочнее, чем больше активности и самостоятельности было проявлено учеником при их усвоении.

Усвоенные знания тем лучше запоминаются, чем более осмысленно они воспринимались. В процессе осмысленного запоминания устанавливаются связи между новым и ранее усвоенным материалом и появляется возможность для анализа и обобщений. Например, преобразования алгебраических выражений можно успешно изучать только при условии прочных и систематических знаний свойств действий рациональных чисел.

Прочность знаний в значительной мере обеспечивается постоянным повторением пройденного материала. Повторение дает возможность углублять знания и систематизировать их.

При изучении математики весьма существенное значение имеет твердость в навыках счета, в навыках выполнения алгебраических преобразований и простейших геометрических построений.

Для лучшего запоминания следует использовать различные способы восприятия: слуховые (речь учителя, учащихся), зрительные (использование кинофильмов, чертежей, чтение книг), а также восприятия с помощью мускульных движений (записи в тетрадях, геометрические построения, изготовление наглядных пособий, моделей).

Более прочному запоминанию содействует речь учащихся. Пройденный материал запоминается лучше, если ученик неоднократно применял его при словесном комментировании решений задач и примеров.

Обязательным условием прочного усвоения является внимание к излагаемому материалу. Если нет хорошей дисциплины учащихся на уроке, то нет и прочных знаний.

Большое значение имеет интерес, с которым ученики изучают материал. Поэтому нужно на уроках математики сообщать исторические факты, решать задачи с практическим содержанием, а иногда и задачи занимательного характера.

§ 8. Опыт, интуиция и логика при обучении математике в восьмилетней школе. Анализ и синтез. Индукция и дедукция в школьном преподавании. Аналогия

Опыт и наблюдение являются самыми надежными источниками знаний и основанием для заключений в обучении математике учеников младших классов. Почти все арифметические законы выводятся в результате рассмотрения конкретных примеров и опытных преобразований; свойства уравнения выводятся на основании рассмотрения числовых примеров, начала курса геометрии в VI классе изучаются преимущественно опытно-интуитивным путем.

Математическая интуиция, догадка, основанная на зрительных впечатлениях и на некотором уже накопленном запасе знаний, занимает значительное место в обучении математике в младших классах.

Способность детей догадываться о некоторых математических законах развивается по мере накопления опыта, зрительных впечатлений, знаний.

Перед учителем всегда стоит задача воспитать у школьников правильное отношение к заключениям, полученным из опыта и на основании интуиции. В соответствии с возрастными особенностями учеников учитель должен показать им, что эти источники знания могут привести к неверным суждениям даже в том случае, когда суждение вынесено после рассмотрения многих аналогичных фактов.

Опыт, наблюдения и интуиция помогают делать предположения, строить гипотезы, которые иногда верны, но иногда опровергаются последующими исследованиями. Логические рассуждения во многих случаях непосильны для детей, потому-то многие математические законы в курсе V—VIII классов выводятся на основании наблюдения и опыта.

В программе по геометрии прямо указано, что особое внимание должно быть уделено воспитанию у детей потребности в логических доказательствах. Неполноценность математических заключений на основании опыта и интуиции в младших классах учитель может иллюстрировать.

Так, например, на основании того, что $2^4=4^2$, нельзя сделать заключения о переместительном законе возвышения в степень или на основании того, что нельзя установить правило сокращения дробей с помощью зачеркивания одинаковых цифр в числителе и знаменателе.

$$\frac{16}{65}=\frac{1}{5};\quad \frac{16}{64}=\frac{1}{4};\quad \frac{49}{98}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Недостаточность заключений, основанных на зрительных восприятиях, легко иллюстрируется примерами «зрительных обманов», которые учитель найдет во многих сборниках «Математических развлечений».

Эти примеры могут служить, конечно, только для начального воспитания правильного отношения к наблюдениям, опыту и интуиции. Надо довести до сознания учащихся, что только логика позволяет прийти к неоспоримым заключениям и выводам. Но понимание этого приходит к учащимся не так просто и быстро, его можно добиться систематической работой на протяжении нескольких лет.

Анализ и синтез

Анализ применяется при доказательстве теорем и при решении различного вида задач — арифметических, алгебраических и геометрических. При доказательстве теорем анализ состоит в том, что рассуждения ведутся по пути от искомого к данным. Ведущим вопросом в этом случае является такой: что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос? Например, при аналитическом методе рассуждений в доказательстве теоремы: «Из наклонных, проведенных из общей точки плоскости к прямой, та больше, основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра, опущенного из этой же точки на ту же прямую, или проекция которой больше» — эти рассуждения будут вестись следующим образом (рис. 17).

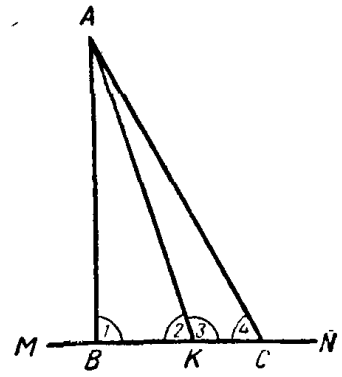


Рис. 17

Нам надо сравнить два отрезка AK и AC. Что нам надо знать для этого сравнения? Надо знать, сторонами какого треугольника эти отрезки являются. Надо знать соотношение между углами треугольника, против которых эти отрезки лежат. Надо знать отношение этих углов к прямому углу ($\angle 1$).

Ответы на поставленные вопросы приводят к выводам:

Отрезки AK и AC являются сторонами треугольника KAC. $\angle 3 > \angle 1$, как внешний угол для $\triangle BAK$, то есть $\angle 3 > d$. Отсюда следует, что $\angle 4 < d$, то есть $\angle 4 < \angle 3$, следовательно, $AK < AC$. При таком анализе мы устанавливаем, что данные в условии соотношения представляют собой условия, достаточные для осуществления доказываемого соотношения.

Синтетические рассуждения при доказательстве теорем — это рассуждения с последующим переходом (с помощью логических умозаключений) от данных в условии доказы-

ваемой теоремы к ее заключению. Ведущим вопросом в этом случае является такой: «Что мы можем узнать по данным условия?»

Доказательство рассмотренной теоремы синтетическим методом проходит так: 1) угол *3* является внешним для $\triangle BAK$, так как $BC > BK$; 2) отрезки AK и AC являются сторонами $\triangle AKC$, в котором $\angle 3 > d$, так как он является внешним по отношению к $\triangle BAK$, значит $\angle 4 < \angle 3$ и т. д.

При решении задач анализ заключается в следующем: исходя из допущения, что искомая фигура построена или искомое значение величины существует, разыскивают те соотношения, которые следуют из этого допущения, затем те соотношения, которые вытекают из этих следствий, и так продолжают до тех пор, пока не приходят к выводу, который может служить исходным соотношением в цепи обратных предложений. Приведем пример.

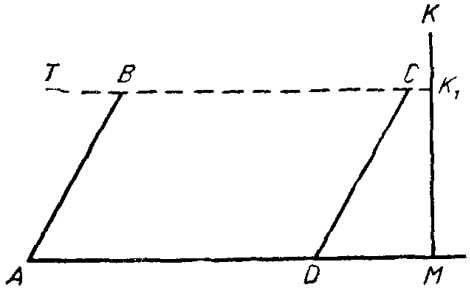


Рис 18

Задача. Построить параллелограмм по заданным элементам его: одна сторона a, высота, опущенная на эту сторону, h и диагональ p.

Рассуждаем так: предположим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 18). Изучаем соотношения между элементами фигуры. Вершина параллелограмма C лежит на прямой, параллельной основанию AD и отстоящей от него на расстоянии, равном перпендикуляру, заданному в условии. К тому же эта точка C (вершина параллелограмма) лежит и на диагонали; значит, точка C является точкой пересечения указанной параллельной прямой и диагонали, проведенной из вершины A. Отсюда становится ясной последовательность построения искомой фигуры:

1) на прямой AM откладываем $AD=a$; 2) строим $MK \perp AM$ и $MK_1=H$; 3) проводим $K_1T \parallel AM$; 4) проводим дугу с центром в точке A и $R=p$; 5) $p \times KT$ в точке C; 6) точку C пересечения дуги с KT соединяем с D; 7) Проводим $AB \| ДС$; 8) $ABCД$ — искомая фигура.

Как видно, в случае решения задачи на построение анализ состоит в установлении тех простых задач, которые являются составными в решении сложной задачи построения искомой фигуры. Таким образом, если анализ при доказательстве теоремы имеет целью показать, что известные (данные в условии) соотношения являются достаточными для существования заключения, то анализ при решении задач помогает установить

условия, необходимые для существования некоторой системы соотношений. После этого посредством синтеза отбирают те условия, которые являются в то же время достаточными.

Синтез же в этом случае состоит в решении задачи путем объединения простых задач в одну составную и включает в себя доказательство того факта, что найденные посредством анализа и использованные при построении необходимые условия существования искомой фигуры являются вместе с тем и достаточными. Мы предлагаем читателю самостоятельно разобраться, в чем состоит анализ и синтез при решении задач на составление уравнений.

В последовательной цепи умозаключений анализ и синтез неотделимо связаны. Так, проводя анализ, то есть следуя от вопроса задачи или заключения, мы вынуждены считаться с тем, что нам известно, и часто данные условия подсказывают нам ответ на очередной ведущий вопрос. И наоборот, следуя синтетическим путем, то есть комбинируя данные задачи (теоремы), мы, естественно, имеем в виду вопрос, на который должны дать ответ.

Таким образом, органическое соединение анализа и синтеза при доказательстве теорем и при решении задач представляет собою единый аналитико-синтетический метод рассуждений.

Индукция и дедукция

Такое умозаключение, посредством которого из единичных или частных посылок делается общий вывод, в курсе логики называется индукцией. Источником индукции и являются обычно опыт и наблюдения. В школьном курсе математики часто пользуются индукцией.

Допустим, мы рассматриваем правило нахождения наименьшего общего кратного двух чисел (НОК). Пусть эти числа 16 и 12.

Ученики по соображению называют ряд чисел, которые являются общими кратными чисел 16 и 12. Сравним состав множителей заданных чисел и найденного наименьшего общего кратного 48. Замечаем, что в НОК (16; 12) входят все сомножители числа 16 и недостающие из числа 12.

Рассматриваем еще один-два подобных примера и замечаем ту же связь между заданными числами и их НОК. На основании этих нескольких однородных фактов выводим, что для нахождения НОК двух чисел необходимо и достаточно одно из них умножить на все недостающие к нему сомножители другого.

После этого мы можем провести общее рассуждение, не опираясь на конкретные примеры, то есть вывести правило дедуктивным путем.

Таким же путем идем и в геометрии: часто сначала на ряде отдельных фактов, например путем измерений, подмечаем некоторую зависимость между элементами фигуры, а затем обобщаем (доказываем) подмеченное посредством дедуктивных рассуждений.

Например, решив ряд задач относительно суммы внутренних углов треугольника непосредственным измерением этих углов, подмечаем, что эта сумма приблизительно равна 180° (индуктивный путь), а затем этот вывод обобщаем, доказывая на основании известных теорем (дедуктивный путь). Примеры применения неполной индукции приведены во II, III и IV частях книги.

В то время как индуктивный метод характеризуется переходом от рассмотренных частных фактов к обобщениям, дедуктивный метод доказательства состоит в том, что, исходя из предыдущих теорем, выводят необходимо вытекающие из них следствия — новые теоремы — без предварительного рассмотрения частных случаев. Так, зная свойство углов при параллельных прямых, мы можем доказать теорему о сумме внутренних углов в треугольнике, не рассматривая предварительно частных случаев.

При дедуктивном методе изложения материала ученики VI и VII классов не понимают, откуда возникла теорема и почему мы делаем различные дополнительные построения. Для того чтобы довести до сознания и полного понимания учащихся не только доказательства, но и необходимость прибегать к ним, желательно дедуктивное доказательство теорем предварить установлением фактов индуктивным методом. Индуктивный метод может выражаться в предварительном решении задач, в геометрических опытах, в измерениях, подсказывающих выводы, достоверность которых затем доказывается.

Во всех приведенных примерах учитель, по существу, пользуется методом научного исследования — анализом: на простых фактах учитель учит детей методу «поисков» и «открытий» некоторых новых соотношений, законов путем изучения конкретных объектов; на этом этапе ученики сопоставляют факты, подмечают характерные и общие свойства явления и т. д. На основе некоторого числа отдельных (частных) наблюдений соотношений или свойств явления они делают общий вывод относительно этих соотношений или свойств для всех явлений данного вида или, как принято говорить, для всего бесконечного множества данного вида (множества чисел, множества треугольников, множества уравнений). Этот путь к выводу на основании ограниченного числа наблюдаемых фактов (а наблюдать неограниченное число фактов невозможно) и представляет собой индуктивный путь «доказательства» закона, характеризующего данное явление.

Иногда выводы, сделанные на основании рассмотрения частных случаев, то есть индуктивным путем, завершаются такими общими рассуждениями, что позволяют учителю записать их в общем виде с помощью букв. Так, при изучении «произведения степеней с одинаковым основанием» учитель может при рассмотрении ряда конкретных примеров ($a^3 \cdot a^4$; $x^2 \cdot x^5$ и др.) сделать рассуждения настолько общими, что ученики сами сделают общий вывод и даже запишут его: ($a^p \cdot a^k = a^{p+k}$), и доказательство теоремы в общем виде можно в таком случае в VI классе и не проводить (см. ч. III, гл. III § 9).

В других случаях, например при установлении зависимости между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения, вывод, сделанный на основании частных примеров, нуждается в логическом доказательстве со ссылками на ранее известные математические законы. Точно так же возможно посредством решения трех задач на построение треугольника по трем сторонам при различных соотношениях сторон прийти индуктивным путем к выводу, что треугольник можно построить (а значит, таковой реально существует) при условии, когда сумма двух сторон больше третьей.

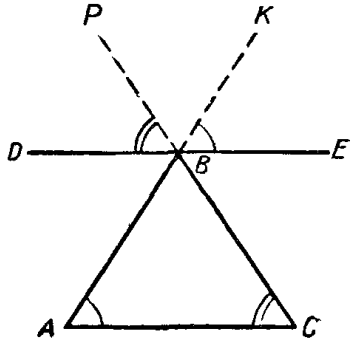


Рис. 19

Но это соотношение в треугольнике становится математической истиной после доказательства соответствующей теоремы. Умозаключения, сделанные на основании ранее установленных предложений, и являются умозаключениями дедуктивного характера. Для дедуктивного умозаключения необходимы две посылки силлогизма: большая посылка, которой является аксиома, или ранее доказанная теорема, или определение, и малая посылка, которой являются данные условия или следствия из них, полученные на основе умозаключений. Третьим элементом дедуктивного рассуждения является заключение, вытекающее из двух посылок.

В качестве примера приведем доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника (рис. 19). Большой посылкой является определение развернутого угла, полученного построением прямой DBE параллельно AC, малой посылкой являются равенства углов $\angle KBE = \angle BAC$ и $\angle PBD = \angle BCA$, как соответственных при параллельных прямых; заключение: $\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 2d$.

Замечание. В цепи умозаключения для простоты опущены промежуточные рассуждения.

При доказательствах необходимо рассматривать все возможные ситуации для данной фигуры или данного соотношения. Так, при

доказательстве теоремы об измерении вписанного угла надо рассмотреть все три возможных положения центра окружности. Если этого не сделать, то вывод нельзя считать полноценным, а значит, и вообще нельзя считать предложение доказанным[1]. На необходимость соблюдать это требование при доказательствах теорем надо постоянно обращать внимание учеников.

Индукция и дедукция, так же как анализ и синтез, взаимосвязаны и дополняют друг друга.

Индукция без дедукции никогда не может привести исследование некоторого факта к вполне достоверным выводам, вывод является только вероятным. Но чтобы произвести дедуктивное умозаключение, необходимо использовать различные общие положения, в установлении и формировании которых принимало то или иное участие индуктивное обобщение. Эта связь дедукции и индукции особенно выявляется в школьном изложении математики. Дедукция и индукция являются вспомогательными приемами для познания объективной действительности. Поэтому выводы, полученные индуктивным путем, нельзя недооценивать и надо, чтобы ученики понимали ценность их на пути установления математических законов.

Не следует смешивать индуктивный метод рассуждений с доказательством при помощи «математической индукции». Принцип математической индукции состоит в следующем: «утверждение справедливо для всякого натурального числа n, если: 1) оно справедливо для $n=1$ и 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального числа $n=k$ следует справедливость его для $n=k+1$». Этот принцип принимается за аксиому, и доказательство с помощью этого принципа имеет дедуктивный характер. Методом математической индукции на уроках в восьмилетней школе не пользуются, но учитель должен хорошо его знать.

В учебной работе дедуктивным методом рассуждения широко пользуются в геометрии начиная с VI класса. Однако учитель должен видеть, что и в других разделах математики, в частности в алгебре, мы пользуемся преимущественно тем же методом. Во многих случаях выводам в алгебре надо придать (и это можно сделать) такую же форму, как это делается в геометрии: выделять условие и заключение и проводить доказательство дедуктивным путем.

Приведем несколько примеров.

1. Если дано a^p, где $a>0$ и p и k — натуральные числа, то $(a^p)^k=a^{pk}$.

2. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$ (см. часть III, гл. III, § 9).

---

[1] См. А. Я. Хинчин, О воспитательном эффекте уроков математики, «Математика в школе», 1962, № 3.

3. Если квадратное уравнение имеет вид $x^2+px+0=0$, то корни его равны:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ ;\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Было бы хорошо, если бы и в курсе арифметики формулировки изучаемых зависимостей облекались в «условные» предложения, например: «если есть две дроби, то произведение их равно...», «если из четырех чисел составлена пропорция, то произведение крайних членов этой пропорции равно...».

Эти формулировки в дальнейшем можно было бы заменять и более простыми, общепринятыми в учебниках, но в первоначальном объяснении учителя формулировки в виде условных предложений давали бы правильное направление мысли учащихся. Несомненно, такая работа учителя по арифметике и алгебре укрепляла бы в умах школьников правильное представление о математике и математических методах. От умения учителя «тактично» подвести учащихся к дедуктивному выводу в арифметике или алгебре зависит степень понимания учениками логической системы этих предметов.

Конечно, в арифметике эту сторону математики можно только наметить, в алгебре многие выводы, в частности о тождественных преобразованиях, нетрудно облечь в форму «доказательной» теории.

Аналогия

Нередко выводы относительно зависимости между величинами или относительно взаимного положения геометрических объектов делаются по аналогии с уже известными зависимостями между другими объектами или взаимными положениями других объектов.

Заключения по аналогии — это заключения по сходству. Этот путь сокращает рассуждения, но так же, как опыт и интуиция, не вполне надежен; он может быть использован только для предположительных заключений (гипотез), справедливость которых должна быть доказана. Эти доказательства часто значительно облегчаются благодаря сходству фактов.

Так обстоит дело с переместительным законом сложения и умножения, со многими свойствами уравнения и неравенства, с теоремами относительно свойств наклонных из общей точки к прямой (в планиметрии) и к плоскости (в стереометрии).

Методом аналогии следует пользоваться в школе, но при этом надо иметь в виду, что ученики нередко, опираясь на рассуждения по аналогии, делают ошибки, например: зная, что если $a\cdot 5=b\cdot 5$, то $a=b$, они считают, что если $a\cdot 0=b\cdot 0$, то $a=b$, или зная, что

$\frac{3 \cdot 2}{8} > \frac{3}{8}$, ученики иногда полагают, что $\frac{a \cdot b}{c} > \frac{a}{c}$. Подобные ошибки следует, конечно, предупреждать или разбирать самым тщательным образом.

§ 9. Математические понятия и методика формирования их

1. Математические понятия. Нужно отчетливо представлять, что математические понятия, несмотря на свою абстрактность, отражают свойства и закономерности реального мира.

Рассмотрим пример возникновения математического понятия. На полу комнаты мы видим мяч, имеющий форму шара,— этот процесс в нашем сознании называется в логике *восприятием.* Мы вышли из комнаты и уже не видим мяча, но его образ сохранился в нашей памяти, в нашем сознании, у нас создалось *представление* о мяче. Мы видели много различных шаров: мячей, шариков для подшипников, конфеток драже. Отвлекаясь от индивидуальных признаков разных шариков (одни резиновые и упругие, другие металлические и твердые, третьи красные и сладкие), мы сохраняем в сознании и выделяем среди множества различных виденных нами предметов только существенную особенность всех этих шариков — *форму:* у нас *создается понятие шара вообще.* Таким образом, *понятие* о предмете или некотором факте в нашем сознании *складывается в результате обобщения массы воспринимаемых* и представляемых *предметов, явлений, фактов.* Понятие, в отличие от восприятия и представления, отражает и фиксирует в нашем сознании не все признаки и особенности предмета или явления, а только существенные и присущие всем однородным предметам.

Понятие лишено той наглядности, которая свойственна процессу восприятия и представления.

Учитель при обучении детей математике содействует возникновению у них правильных математических понятий. При этом он начинает с постановки конкретных задач, рассмотрения наглядных образов. Так, еще в начальной школе рассматриваются равные доли конкретных фигур (отрезка, круга, прямоугольника), что способствует образованию представления о равных долях единицы. В V классе учитель исходит из этих представлений, использует их для создания в сознании учащихся отвлеченного понятия дроби. Даже в старших классах школы учитель не может начинать с перечисления признаков понятия, не выяснив, имеются ли у них соответствующие представления. Так, переходя к понятию функции, учитель предварительно предлагает ряд конкретных примеров функциональной зависимости между величинами. Усвоению новых понятий значительно

помогает та предварительная работа, которая была проведена с учениками младших классов школы. Так, например, если при изучении арифметики учитель планомерно останавливался на зависимости одной величины от другой, предлагал ученикам составлять таблицы значений конкретных величин, знакомил их с простейшими графиками (как это и рекомендуется программой школы), то он этим готовил школьников к усвоению понятия функции. Работа по созданию геометрических понятий рассмотрена ниже, в методике геометрии.

Понятие как одна из форм правильного мышления подробно изучается в логике. Мы остановимся только на некоторых существенных вопросах.

Понятие отображает общие и существенные признаки реальных предметов; оно является правильным, если верно отражает действительность.

Существенными признаками называются те признаки, которые являются необходимой принадлежностью предметов определенного рода и отличают их от предметов других родов. Таким образом, существенные признаки характеризуют предметы реальной действительности и дают возможность познать их. *Несущественными признаками* называются те признаки, которые хотя и имеются у тех или иных предметов данного рода, но не характеризуют их и не дают возможности отличить их от предметов других родов.

В каждом понятии логика различает содержание и объем. *Содержанием понятия* называется знание совокупности существенных признаков некоторого круга предметов или явлений. *Объемом* — совокупность этих предметов. Так, например, содержанием понятия «параллелограмм» являются признаки: выпуклый, плоский четырехугольник, стороны попарно параллельны, противоположные стороны равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам и т. д Объемом понятия «параллелограмм» являются все параллелограммы, то есть фигуры, обладающие этими признаками.

Между содержанием и объемом понятия существует определенная зависимость: чем шире содержание понятия, тем у́же его объем. И обратно, чем у́же содержание понятия, тем шире его объем.

Таким образом, включив в содержание понятия новый признак, не вытекающий из остальных, мы расширяем содержание понятия, но уменьшаем его объем. Так, включив в содержание понятия параллелограмма равенство его пересекающихся сторон, мы получаем понятие с меньшим объемом: в него не войдут параллелограммы с неравными смежными сторонами.

Вопрос об объеме и содержании понятия относится не только к геометрическим объектам (геометрическим фигурам и

свойствам их), но и к понятиям арифметики, алгебры, тригонометрии.

Алгебраическое понятие «тождественное преобразование» шире понятия «сокращение дроби», объем первого понятия больше, так как оно охватывает собой и сокращение дробей, и разложение многочленов на множители, и приведение подобных членов и т. д.

Но и здесь понятие с большим объемом — «тождественное преобразование» — имеет содержание меньше, чем понятие с меньшим объемом — «сокращение дроби». Действительно, ведь не каждое тождественное преобразование допускает деление компонентов (составных частей выражения) на одно и то же выражение, а сокращение дроби в этом и состоит; вместе с этим сокращение дроби сохраняет и свойство любого тождественного преобразования — сохранять численное значение при некоторых принятых для данного случая численных значениях букв, входящих в выражение.

Аналогично приведенному разбору в арифметике можно рассмотреть понятия: «общее кратное числа» и «наименьшее общее кратное числа», в тригонометрии — понятия: «тригонометрическая функция» и «функция синуса» и т. д.

Отметим, что если объем некоторого понятия целиком входит в объем другого понятия, заключающего еще и другие объекты, то первое понятие называется *видовым* по отношению ко второму, а второе — *родовым*. Так, например, понятие «ромб» является видовым по отношению к понятию «параллелограмм», а понятие «параллелограмм» — родовым. Но то же понятие «параллелограмм» является видовым по отношению к понятию «четырехугольник». В алгебре примером родового понятия может служить понятие «тождественное преобразование», а видового — «сокращение дробей».

2. Определения. В математике, как в каждой науке, даются определения изучаемым понятиям. В определении раскрывается содержание понятия, то есть указываются с помощью перечисления его существенные признаки.

Казалось бы, наиболее простым и естественным способом определения предмета является перечисление всех существенных признаков этого предмета. Но такой способ определения труден, а иногда и невозможен, так как каждый предмет имеет много признаков. Логика устанавливает способ определения, который устраняет эти трудности.

Определяемое понятие подводится под другое, более общее понятие, которому данное понятие подчинено, то есть часть объема которого оно составляет, а *затем указываются те признаки, которыми определяемое понятие отличается от других понятий,* также подчиненных общему понятию и также входящих в его объем.

Такой способ определения называется определением через ближайший род и видовое отличие.

Чтобы определение было правильным с логической точки зрения, оно должно заключать только необходимые признаки понятия, причем совокупность всех признаков должна быть достаточной, чтобы охарактеризовать понятие. Так, мы определяем параллелограмм как такой четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Исключение хотя бы одного из перечисленных признаков расширит объем понятия, то есть каждый признак является необходимым (например, если не сказать, что параллелограмм имеет четыре стороны, то и правильный шестиугольник подойдет под определение, так как его противоположные стороны попарно параллельны). С другой стороны, включение еще какого-либо признака не требуется. Если прибавить признак, независимый от перечисленных, то объем понятия уменьшится, как было уже рассмотрено выше. Если же прибавить признак, вытекающий из введенных в определение, то, хотя объем понятия от этого не изменится, внесение такого признака излишне. Например, не нужно включать в определение параллелограмма, что его противоположные стороны равны или что он является выпуклым четырехугольником, так как оба эти свойства вытекают из перечисленных. Таким образом, *в число требований к строго построенным определениям включается независимость каждого признака понятия от остальных.*

Однако отдельные понятия трудно определить, пользуясь родовым и видовым отличиями.

Логика вводит *генетические определения.* В генетических определениях указывается способ образования или способ происхождения определяемого предмета, который (способ) принадлежит только данному предмету и никакому другому.

Генетические определения довольно широко используются в школьном курсе геометрии. Так, иногда окружность определяется как «замкнутая линия на плоскости, образуемая движением точки B прямой AB вокруг неподвижной точки A». В самом деле, в результате указанного процесса (движения точки B) никакой другой фигуры, кроме окружности, получиться не может.

Правда, в приведенном определении есть понятия, которые должны быть учащимся известны или определены раньше, например «вокруг». Надо отметить и другое, что приведенное генетическое определение может быть заменено другим определением: «замкнутая кривая линия на плоскости, все точки которой отстоят на равном расстоянии от некоторой точки этой же плоскости». В этом случае родовым понятием является «замкнутая кривая плоскости», а видовым отличием — вторая часть

предложения. О различных определениях одного и того же понятия мы говорим ниже.

Надо заметить, что словесная формулировка определения не всегда содержит явное указание на род и видовой признак, но анализ определения всегда позволяет их указать.

Ученики не всегда ясно представляют, как понимать определение понятия и требования, которые предъявляются к определению его. А надо добиваться, чтобы в конечном счете они поняли, что определение есть математическое предложение, позволяющее уточнить значение уже введенного термина или сформулировать значение вновь вводимого термина. (О методике формирования понятий и определений сказано дальше.)

Ученики часто путают определения и признаки, не понимают, что определения не доказываются, а признаки доказываются.

Одно и то же понятие может быть определено различно, так как может быть указана совокупность различных существенных признаков, удовлетворяющая изложенным выше требованиям.

Например, параллелограмм можно определить как выпуклый плоский четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны. В этом случае параллельность сторон будет являться следствием указанных признаков и не вносится в определение.

Обычно в изложении науки дают какое-либо одно определение понятию, если же вводится еще и другое определение, то надо показать, что оба определения равнозначны, что содержание и объем понятия остаются тем же. Так, определения «подобных многоугольников» в учебниках А. П. Киселева и Н. А. Глаголева различны [1]. В первом дано такое определение: «Два одноименных многоугольника называются подобными, если углы одного равны соответственно углам другого, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны». Во втором дано такое определение: «Если подобным преобразованием одной из двух данных фигур можно получить фигуру, равную другой, то данные фигуры называются подобными». При этом предварительно выясняется, какое преобразование называется подобным.

В определении не должно быть *порочного круга*. Это требование означает, что нельзя определять новое понятие через такое понятие, которое зависит от определяемого. Примерами порочного круга в определениях могут служить следующие «определения», которые иногда можно встретить в школьной практике:

1а) Сложение есть действие, при помощи которого находится сумма нескольких чисел.

[1] См. [248], [227], стр. 153.

1б) Суммой называется результат сложения.

2а) Прямым углом называется угол, содержащий 90 градусов.

2б) Градусом называется девяностая часть прямого угла.

Как видно, в обоих случаях первое понятие определяется при помощи другого, которое в свою очередь определяется при помощи первого.

С развитием математики некоторые ее *понятия изменяются.* Как и всякая наука, математика все глубже вникает в свойства вещей, открывает новые зависимости между изучаемыми объектами. Отсюда вытекает необходимость в изменении определений.

Так, в своем развитии понятие числа претерпевало изменение и расширилось. В математике постепенно вводились все новые числа: натуральные, дробные, нуль, отрицательные, иррациональные... Определение действий, данное в одной области чисел, оказывалось неприемлемым.

Также и в геометрии: если понятие угла первоначально возникло в результате отображения свойств плоских углов меньше развернутого, то затем стали рассматривать и углы развернутые, полные. Развитие тригонометрии показало целесообразность рассматривать углы разных направлений (положительные и отрицательные) и любой величины. При изучении стереометрии возникла потребность в рассмотрении углов между двумя скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя и несколькими плоскостями (двугранных и многогранных углов).

Чем моложе ученик, тем труднее он понимает сущность, смысл определений; поэтому в младших классах приходится введение некоторых новых понятий сопровождать поясняющими описаниями. Часто такие описания даются в арифметике, например: «всякое целое число есть либо единица, либо собрание нескольких единиц», «одна доля или несколько одинаковых долей единицы называются дробью». Такого вида описания даются в V классе и по геометрии. Эти поясняющие описания нельзя выдавать и трактовать как определения. Определения полностью опираются на ранее введенные понятия, которым в свою очередь дано определение; описания могут опираться одновременно и на понятия, которые были введены раньше, на представления, полученные из жизненного опыта, из наблюдений конкретных тел, моделей и т. д. Определения строятся по законам логики, и учитель должен остерегаться впасть в ошибку и выдать описание за определение. Поэтому заставлять учеников заучивать фразы вроде таких, как «число есть результат счета, или измерения», «отношение есть результат сравнения», и подобные этим и считать эти фразы ответами на вопросы, что такое число, что такое отношение, то есть определениями поня-

тий — это значит сознательно прививать детям порочный стиль мышления.

3. Основные понятия. При логическом построении любой математической дисциплины неизбежно вводятся некоторые понятия, которым не дается непосредственных определений. Такие понятия называются основными или первоначальными. Необходимость введения основных понятий делается ясной, если знать, что, давая определение какому-либо понятию, нельзя обойтись без другого понятия, введенного ранее. Например, определяя параллельные прямые как такие две прямые, которые расположены в одной плоскости и не пересекаются, мы пользуемся понятиями: «прямая», «плоскость», «пересечение прямых». Но для определения этих понятий надо снова применить какие-то иные понятия.

Цепь определений не может быть бесконечной, а поэтому какие-то понятия должны быть приняты за основные.

В научных курсах геометрии основными понятиями обычно являются: *точка, прямая, плоскость* и *некоторые отношения,* например, «лежать на», «между» и т. д.; *в арифметике — понятие натурального числа, равенства* и др.

В научных курсах такие понятия не описываются, не иллюстрируются; их содержание выражается в аксиомах. Так, понятия точки и прямой определяются [1] совокупностью аксиом сочетания, порядка и непрерывности.

«*Определение*» *понятия* через *абстракцию* состоит в том, что понятие «определяется» как нечто общее, присущее объектам самой разнообразной природы, объединенным в один класс по какому-либо признаку.

К таким понятиям относится понятие натурального числа.

Любое натуральное число в теоретической арифметике рассматривается как выражение того общего, что имеют все конечные множества, допускающие взаимно однозначное соответствие элементов этих множеств.

Проф. А. Я. Хинчин считал, что «курсы арифметики и алгебры должны быть ориентированы на постепенное создание и укрепление у учащихся представления о числе как об объекте арифметических операций».

В школьном курсе основные понятия также не определяются, но, вводя их, преподаватель пользуется конкретными объектами, вызывающими соответственные представления учащихся.

Понятие о натуральном числе формируется у детей с ранних лет и учителю при обучении детей арифметике в V классе оста-

---

[1] Определение — математическое предложение. В приведенной же фразе слово «определяются» понимается как процесс отличения предметов, а не раскрытие значения термина, обозначающего данный предмет. См. учебник логики, Д. П. Горского, Институт философии АН СССР, 1963.

ется ввести только термин и указать, что ряд чисел 1, 2, 3 ... может быть продолжен неограниченно.

При этом учитель не опирается на какие-либо аксиомы, не указывает каких-либо свойств этих чисел, а пользуется абстракцией, созревающей у учащихся к возрасту 10—11 лет в отношении рассматриваемого множества.

Какова же методика формирования понятий и определений понятий? Прежде всего надо иметь в виду, что представление об описываемой вещи должно отчетливо существовать в уме ученика до того, как будет сформулировано формальное определение. Поэтому выработке у учеников представления о соответствующем математическом объекте должно быть уделено особое внимание.

Так, в арифметике понятие о наибольшем делителе складывается на основании понятия о делителе числа вообще. В алгебре понятие о тождественном преобразовании складывается у школьников после предварительного рассмотрения числовых значений некоторого алгебраического выражения, представленного в разных видах.

Иногда первоначальное представление о некотором математическом объекте целесообразно дать в порядке сопоставления, сравнения родственных объектов. Так, представление о параллелограмме может быть выяснено в порядке рассмотрения и сравнения различных четырехугольников, а затем на основании представлений о данной фигуре формируется понятие и его определение. Формирование некоторых понятий приходится вести в течение длительного периода; к таким понятиям относятся понятия об уравнении, о функции и других объектах.

Не случайно в VI и VII классах рассматриваются сначала зависимости между величинами и различные способы выражения этих зависимостей, и только в VIII классе программы предусматривают введение понятия о функции и систематическое изучение функций.

В процессе формирования понятий формально-логическое определение имеет очень большое значение, так как позволяет совершенно точно выделить объект определяемого класса. Иногда изучение понятия и начинается с формулировки определения, но так можно поступать только в том случае, когда сама формулировка определения доступна для понимания и осознана учащимися, к тому же они ясно представляют себе определяемое понятие. Так, например, переходя к изучению десятичных дробей, можно начать с определения десятичной дроби, так как в практике упражнений с обыкновенными дробями ученики уже встречались и с десятичными дробями, а само определение десятичной дроби весьма простое и легко усваивается.

Однако довольно часто ученик может точно сформулировать определение, но в дальнейшем выясняется, что он этим опреде-

лением не владеет. Такой факт свидетельствует о том, что ученик не усвоил соответствующего понятия или что понятие не сформировалось до конца. Известны распространенные ошибки — смешение понятий «биссектриса треугольника», «медиана треугольника» и др.

Поэтому *формулировка определения понятия должна завершать процесс формирования понятия.* Когда понятие в уме каждого ученика уже сложилось, сформировалось, то есть когда они уяснили содержание понятия, тогда уместно установить необходимые и достаточные существенные признаки понятия и сформулировать определение. И, конечно, особенно ценно, если в процесс установления определения активно включаются сами ученики. Этот процесс чаще всего проходит в виде эвристической беседы.

Введенное определение должно прочно войти в систему знаний учащихся. Они должны знать и помнить определение; но надо еще раз подчеркнуть: следует всячески остерегаться механического заучивания определения без связи его с реальным представлением, без понимания логической структуры определения.

Многократные наблюдения свидетельствуют о том, что восьмиклассники, зная определение скрещивающихся прямых, не могут показать такие прямые в окружающей их обстановке.

Вместе с этим опыт показывает, что, если выполнены требования к формированию понятия и к введению соответствующего определения, данное определение «работает». Если введенное определение повторяется и на него опираются при решении задач и при доказательстве теорем учитель и ученики, то определение хорошо запоминается и смысл его не утрачивается в сознании учащихся.

4. Деление понятия. Классификация. Деление понятия рассматривается в курсе логики как логическое действие, раскрывающее объем понятия. Произвести деление — значит указать все видовые понятия, соподчиненные делимому понятию. Так, например, мы можем разделить понятие арифметической дроби на понятия «правильная» и «неправильная» дроби. Понятие «треугольник» — на понятия «прямоугольный», «тупоугольный» и «остроугольный» треугольники. Производя деление, мы мысленно распределяем по определенному признаку на несколько видов тот класс предметов, отображением которого является делимое понятие.

Логика устанавливает правила деления понятия. Основным правилом является то, что деление проводится по какому-нибудь определенному признаку, называемому основанием деления; этот признак нельзя менять при проведении деления. При правильном делении весь объем понятия должен быть исчерпан, то есть ни один вид не пропущен; в то же время каждый

вид делимого понятия должен исключать остальные. Например, нельзя разделить обыкновенные дроби на правильные и несократимые или треугольники на разносторонние и прямоугольные. В обоих примерах нет одного основания деления, а также не соблюдены и остальные требования.

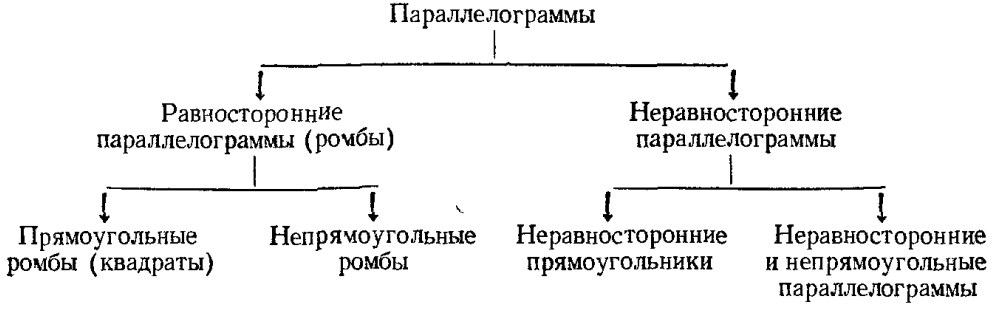
В каждой науке мы встречаемся с приведением в некоторую систему изучаемых в ней объектов. Система расположения предметов по классам на основании сходства предметов внутри класса и их отличия от предметов других классов называется классификацией.

Классификация является частным случаем деления понятия и должна проводиться по тем же правилам.

Рассмотрим, например, классификацию параллелограммов. Ее можно проводить по разным признакам: или в зависимости от свойства их сторон, или в зависимости от свойства их углов. В основу деления надо положить один из этих признаков.

Например, будем делить параллелограммы на виды в зависимости от наличия в них равенства пересекающихся сторон. Тогда все параллелограммы разобьются на два класса: равносторонние параллелограммы и неравносторонние. Каждый из образовавшихся классов мы снова разбиваем на виды в зависимости от того, являются ли углы параллелограмма прямыми или нет. (Мы знаем, что если в параллелограмме один угол прямой, то и все его углы прямые.)

Изобразим классификацию в виде схемы.



Мы видим, что каждый вид параллелограмма имеет свое место и ни один не попадает в два класса. Отметим, что не каждый частный вид параллелограмма имеет название, что затрудняет учеников при классификации этих фигур. Можно было бы провести классификацию параллелограммов, начиная деление по признаку наличия прямых углов, а затем каждый вид разделить на классы в зависимости от наличия равенства смежных сторон. Предлагаем соответственную схему выполнить читателям. В результате мы получим те же 4 частных вида, но в первом случае мы получаем квадрат как прямоугольный ромб, а во втором случае — как равносторонний прямоугольник.

Если учитывать оба основания деления, то классификацию можно иллюстрировать таблицей в два входа (рис. 20).

Так же можно изобразить классификацию треугольников [1].

Правильно проведенная классификация систематизирует знания учащихся, содействует развитию логического мышления, помогая уточнить зависимость между объемом и содержанием понятия. Поэтому учителю надо уделить достаточно внимания на усвоение учащимися классификации [2].

По сторонам / По углам	Смежные стороны равны (ромбы)	Смежные стороны не равны
Углы прямые (прямоугольники)	квадрат	
Углы не прямые		

Рис. 20

5. Аксиомы и теоремы. При изложении каждой математической дисциплины все ее содержание приводится в строгую логическую систему. Независимо от того, как был первоначально обнаружен какой-либо факт, его стремятся доказать, то есть вывести на основании правил и законов логики из других уже известных знаний. Эти знания выражаются в виде математических предложений. Форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается относительно предметов и их признаков, в логике называется *суждением*. В каждом математическом предложении тоже выражается некоторое суждение о математических понятиях.

Такое математическое предложение, которое доказывается, называется теоремой. Доказательство всякой теоремы опирается на другие предложения, истинность которых уже установ-

[1] См. ч. IV, § 17.

[2] См. ч. IV, § 6. Вопросы классификации изложены в методике геометрии Н. М. Бескина.

лена. Однако, чтобы доказать эти предыдущие предложения, надо сослаться еще на некоторые, ранее доказанные. Так как процесс доказательства должен иметь начало и какое-то предложение должно быть первым, то очевидно, что в *основу данной науки должно быть положено несколько предложений, принятых без доказательства. Они и называются аксиомами.*

Необходимость существования акеиом при логическом построении науки была обнаружена еще в древней Греции, то есть больше двух тысяч лет назад; однако только в конце XIX в. и особенно в XX в. аксиомы, лежащие в основании отдельных математических наук, были подвергнуты глубокому изучению. Многими учеными проводилась работа по составлению списка аксиом для каждой математической дисциплины. Совокупность всех аксиом, лежащих в основании данной науки, называют системой аксиом. К ней предъявляются следующие три требования.

1) *Система аксиом должна быть непротиворечивой.* Это значит, что никакая аксиома не может противоречить другой аксиоме, никакое следствие из какой-либо аксиомы не должно противоречить никакому другому следствию из нее, никакому выводу из других аксиом.

2) *Система аксиом должна быть независимой,* то есть ни одна аксиома не может быть выведена из остальных. Если бы аксиома могла быть выведена из других, то ее следовало поместить в число теорем.

3) *Система аксиом должна быть достаточна* для доказательства любого истинного положения данной науки. Поэтому при доказательстве какого-либо предложения нельзя ссылаться на очевидность или на опыт; оно должно быть обосновано другими теоремами или аксиомами.

Составление такой системы аксиом, а главное, проверка, что она удовлетворяет перечисленным требованиям, представляет собой чрезвычайно сложную задачу.

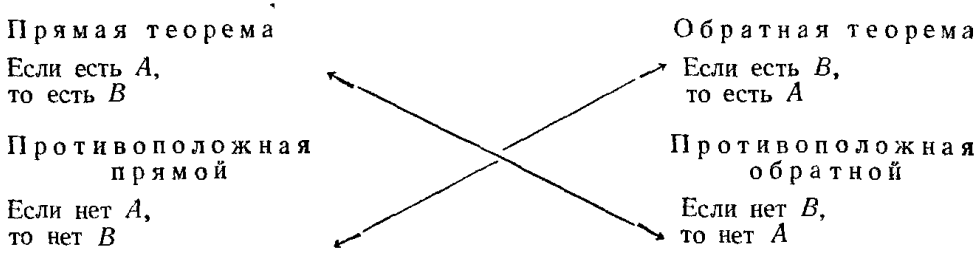
Изложение математики, при котором в основу кладутся некоторые основные понятия и определенная система аксиом, а все остальные понятия строго определяются и все остальные предложения строго доказываются, называется аксиоматическим. Оно не может быть проведено даже в старших классах школы. Понимание его требует высокого математического и логического развития. Такое изложение совершенно порывает с наглядностью, с первоначальным происхождением математических понятий и рассматривает очень отвлеченные, абстрактные зависимости.

Однако только в свете построения математической дисциплины как логической системы выявляется роль аксиомы и ее отличие от теоремы. То, что некоторое предложение является аксиомой, следует не только из его очевидности, но и из того, что

в системе построения данной науки оно является одним из исходных, основных и не может быть логически выведено из других предложений. Эти основные предложения взяты из опыта многовековой жизненной практики и отображают очень общие связи и закономерности действительного мира.

Как известно, в *каждой теореме различается условие и заключение.* Доказательство теоремы в том и состоит, чтобы показать, что если условие теоремы выполнено, то из него логически следует заключение. Форма мышления, посредством которой из двух или нескольких суждений мы получаем новое суждение, в логике называется *умозаключением.* Логика рассматривает различные виды умозаключений и устанавливает те правила и законы, посредством которых из верных данных (посылок) приходят к правильным выводам [1]. Доказательство теоремы осуществляется при помощи ряда умозаключений, при этом, исходя из некоторых более общих свойств, законов, правил, приходят к частным выводам; такие умозаключения называются дедуктивными. Например, при доказательстве теоремы о равенстве диагоналей прямоугольника мы пользуемся общим свойством всякого параллелограмма — равенством противоположных сторон, признаком равенства прямоугольных треугольников, зависимостью между углами и сторонами в равных треугольниках. Также при доказательстве сформулированного выше свойства частного мы основываемся на определении частного и на общих свойствах (законах) умножения.

Известно, что, имея некоторую теорему, можно образовать из нее новые теоремы: обратную, противоположную, обратную противоположной. *Исходная теорема* тогда *называется прямой.* Обычно для составления *обратной* теоремы заключение прямой теоремы делают условием новой, а условие данной теоремы — заключением обратной. При составлении *противоположной* теоремы отрицается условие данной теоремы и соответственно отрицается заключение. Выразим зависимость между этими теоремами в схеме, обозначая свойства, высказываемые в условии прямой теоремы, буквой A, а в ее заключении — буквой B. Получим следующую схему.



[1] См. [221] и С. Н. Виноградов и А. Ф. Кузьмин, Логика, 1951.

Рассмотрев внимательно эти теоремы, мы видим, что теоремы прямая и противоположная обратной выражают одну и ту же зависимость, то есть истинность одной из них вызывает и истинность другой.

Доказывается это так: «допустим, что теорема, противоположная обратной, неверна, то есть «если нет B, то A может быть». Но в таком случае по прямой теореме имеем «если есть A, то есть и B», последнее заключение противоречит предположению, а значит невозможно.

Например, если верно, что всякое число (натуральное), которое оканчивается нулем, делится на 5, то из этого следует, что если число не делится на 5, то оно не оканчивается нулем.

Очевидно, что такая же зависимость существует между обратной и противоположной теоремами: они могут быть или обе верными, или обе неверными.

Отсюда следует, что нет необходимости каждый раз доказывать каждую из четырех теорем, достаточно доказать из каждой пары одну.

Однако истинность некоторой теоремы не обязательно влечет за собой истинность обратного или противоположного предложения.

Так, из теоремы: «Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5» — не следует, что «если число делится на 5, то оно оканчивается нулем», так как существуют числа, не оканчивающиеся нулем, но кратные пяти. Если же в качестве прямой теоремы взять теорему: «Если число оканчивается нулем, то оно делится на 10», то будет верна и обратная ей теорема: «Если число делится на 10, то оно оканчивается нулем». В этом случае истинность обратной теоремы (а следовательно, и противоположной) основана на том, что на 10 делятся только те числа, которые оканчиваются нулем.

Рассмотрим подробнее вопрос об образовании обратных теорем. Выше мы образовали теорему, обратную данной, путем замены условия прямой теоремы ее заключением, а заключения — условием и убедились в том, что таким способом не всегда можно образовать верную обратную теорему, так как обратное предложение может оказаться и неверным. Однако условие многих теорем имеет сложный характер, то есть заключает в себе как бы несколько пунктов. Расчленив условие, мы можем образовать верную обратную теорему путем переноса в заключение только части условия прямой теоремы. Для примера возьмем теорему из арифметики: «если каждое из двух слагаемых делится на какое-либо число, то и сумма их делится на это число». Если поменять условие и заключение, то получим неверное обратное предложение. «Если сумма двух слагаемых делится на какое-нибудь число, то и каждое слагаемое делится на это число».

Условие прямой теоремы содержит два пункта: 1) первое слагаемое делится на некоторое число; 2) второе слагаемое делится на то же число. Сохраним в условии один из этих пунктов, а другой обменяем с заключением. Получим следующую обратную теорему: «Если сумма двух слагаемых и одно из них делится на какое-нибудь число, то и второе слагаемое делится на это число». Эта теорема верна и равнозначна известной теореме о делимости разности на некоторое число.

Если условие, а также и заключение некоторой теоремы можно расчленить, то можно образовать несколько теорем, обратных данной прямой теореме. Поясним это на примере.

Прямая теорема: *Противоположные стороны параллелограмма равны.*

Запишем условие и заключение схематически.

	Условие	Заключение
В четырехугольнике $ABCD$	1) $AB \parallel CD$	1) $AB=CD$
	2) $BC \parallel AD$	2) $BC=AD$

Составляем первую обратную теорему, меняя местами оба пункта условия и оба пункта заключения[1].

	Условие	Заключение
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$	1) $AB=CD$	1) $AB \parallel CD$
	2) $BC=AD$	2) $BC \parallel AD$

Получаем первый признак параллелограмма.

Вторую обратную теорему можем образовать, оставив в условии пункт 1-й, а пункт 2-й условия обменять с пунктом 1-м заключения. Получаем теорему

	Условие	Заключение
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$	1) $AB \parallel CD$	1) $BC \parallel AD$
	2) $AB=CD$	

Получаем второй признак параллелограмма (пункт 2-й заключения не внесен, так как он вытекает из пункта 1-го).

Третью теорему составляем, оставляя в условии пункт 1-й, а пункт 2-й меняем местами с пунктом 2-м заключения. Получаем

	Условие	Заключение
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$	1) $AB \parallel CD$	?
	2) $BC=AD$	

Составить правильную обратную теорему не удается; ни одно из остальных положений не является необходимым; вследствие равнозначимости 1-го и 2-го пунктов условия (и заключения) другие перестановки ничего нового не дают.

---

[1] Обращаем внимание на необходимость внесения признака «выпуклы» в условие теоремы.

Предлагаем читателю так же составить различные обратные теоремы для теоремы о средней линии трапеции.

В школьном курсе геометрии мы не раз встречаемся с образованием нескольких обратных теорем. Укажем хотя бы на теоремы, обратные теореме о диаметре, перпендикулярном к хорде. Обращаем внимание на то, что в учебнике образованы не все обратные теоремы, что легко обнаружить, если расчленить условие, как было сделано выше [1].

Необходимые и достаточные условия в математике. Ученики даже старших классов часто ошибаются, не умея распознать, является ли для суждения некоторое условие необходимым, но недостаточным или достаточным, но не необходимым. Роль этих условий обнаруживается не только при доказательстве теорем, но и в определениях, и при решении задач. Поэтому надо в каждом конкретном случае, когда эти условия имеют место в суждениях, тщательно разбирать их с учащимися.

Так, уже в V классе при изучении законов арифметических действий учитель может положить начало сознательному ознакомлению учеников с этими условиями и соответствующими рассуждениями. Например, в теме «Делимость чисел» устанавливается, что условием, достаточным для утверждения кратности суммы некоторому числу, является кратность этому числу каждого слагаемого. Уместно разобрать вопрос, является ли это условие необходимым. Для этого можно рассмотреть две суммы, кратные 4, например, 388+460 и 387+461.

В этой теме примеров для подобных рассуждений много.

Приведем пример суждений, связанных с построением определений. В теме VI класса «Смежные углы» после того, как из класса «прилежащих» углов выделены пары углов, у которых есть общая сторона, а две другие образуют противоположные лучи (смежные углы), полезно в порядке проверки или повторения задать ученикам такие вопросы: а) являются ли смежными два угла, имеющие одну общую сторону (ответ: нет, это условие необходимое, но недостаточное для отнесения их к смежным); этот же вопрос может быть сформулирован так: «необходимо ли для утверждения, что углы смежные, чтобы они имели общую сторону (ответ: да, необходимо, но недостаточно); б) необходимо ли для утверждения, что углы смежные, чтобы две стороны их лежали на одной прямой (ответ: да), вопрос — достаточно ли этого (ответ: нет).

В VII и VIII классах на уроках алгебры и геометрии этот материал может быть значительно расширен.

Вопрос о *необходимых и достаточных условиях в математике* является весьма важным. Поэтому остановимся на нем несколько подробнее.

---

[1] См. ч. IV, § 21.

Этот вопрос находится в тесной связи с вопросом *о* прямой и обратной теоремах.

Достаточный признак может быть сформулирован так:

Если из наличия свойства A вытекает наличие свойства B, то свойство A есть признак, достаточный для существования свойства B.

Примеры 1. Если углы являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, то они равны; иначе для равенства двух углов при параллельных прямых достаточно, чтобы эти углы были внутренними накрест лежащими.

2. Если каждое из двух слагаемых суммы делится на число C, то и сумма их делится на это число.

Эту теорему можно сформулировать и так: для того чтобы сумма двух чисел делилась на некоторое число, достаточно, чтобы каждое слагаемое делилось на это число.

Таким образом, каждую прямую теорему можно рассматривать как достаточный признак.

В некоторых случаях свойство A есть только достаточный (но не необходимый) признак для существования свойства B; это в том случае, если наличие A гарантирует существование свойства B, но B может существовать и без наличия свойства A. Чтобы убедиться, что свойство A является только достаточным, но не необходимым признаком, надо установить возможность существования B при отсутствии свойства A. Отсюда делается вывод, что признак является достаточным, но не необходимым, когда либо противоположная, либо обратная теорема не верна.

Необходимый признак может быть сформулирован так:

Если без наличия свойства A нет и свойства B, то свойство A является необходимым признаком для существования свойства B.

Примеры. 1. Параллельность одной пары сторон в четырехугольнике является условием, необходимым для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, но еще недостаточным.

2. Кратность некоторого числа числам 2 и 3 является признаком, необходимым для кратности этого числа числу 12, но этот признак не является еще достаточным: так, число 18 кратно 2 и 3, но не кратно числу 12.

Свойство A есть признак только необходимый, но недостаточный, если без наличия свойства A не существует свойства B, но наличие свойства A еще не гарантирует существования свойства B.

Необходимое условие формулируется обычно в виде противоположной или обратной теоремы.

Примеры. 1. Если две стороны четырехугольника параллельны, а две другие не равны, то четырехугольник не параллелограмм.

2. Если сумма цифр числа не делится на 9, то и само число не делится на 9.

Во многих случаях эти два условия выступают совместно, и тогда смысл условий можно сформулировать так: свойство A есть признак, необходимый и достаточный для существования свойства B, если наличие A ведет к существованию свойства B и если без наличия A не может быть B.

Необходимый и достаточный признаки, выступая совместно, выражают справедливость двух теорем: прямой и противоположной или прямой и обратной. Утверждения «необходимые и достаточные условия» часто для краткости заменяют выражениями «тогда и только тогда» или «те и только те».

Примеры. 1. Треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда сумма двух его внутренних углов равна третьему углу.

2. На 3 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3.

Заметим, что рассмотренные условия выступают и в определениях и при решении некоторых задач.

Надо заметить, что у школьников иногда складывается такое неверное убеждение: аксиомы и теоремы имеют место только в геометрии. Это объясняется тем, что в курсах арифметики и алгебры логическая последовательность изучаемых предложений менее подчеркивается и доказываемые положения не называются теоремами (кроме нескольких случаев в старших классах, как например: теорема Виета, Безу и др.). Учителю следует по возможности больше обращать внимания на логическую структуру и в этих предметах.

6. Подготовительная работа к доказательствам. Из школьной практики известно, что ученики с трудом понимают доказательства теорем. Эти трудности заключаются в следующем. Часто для учеников неясно, что дано и что доказывается. Особенно трудно понимается необходимость доказательства того или иного положения, с трудом устанавливаются связи условия и вопроса (заключения), ученики редко понимают обоснованность выбора путей и способов доказательств. Чтобы облегчить преодоление этих трудностей, полезно в начале изучения алгебры и геометрии в VI классе предложить ученикам несколько упражнений специально по ознакомлению их с тем, что среди суждений встречаются верные и неверные, что и верность (справедливость) суждений, и неверность их приходится объяснять, доказывать; иногда истинность наших суждений обнаружить легко, иногда доказательства требуют привлечения многих доводов, ссылок на известное предложение, уже доказанное, не вызывающее сомнения. Начать эту работу надо с выделения верных и неверных суждений.

Первыми предложениями для разбора должны быть факты, близкие ученикам, например:

В СССР 18 столичных городов. Неверно, так как в СССР 15 союзных республик, значит, и 15 столичных городов.

В СССР 15 Верховных Советов союзных республик. Верно, потому что в каждой из 15 союзных республик есть свой Верховный Совет.

Каждое четное число имеет простой делитель. Верно, четное число делится на 2, а 2 число простое.

В любом выпуклом четырехугольнике сумма внутренних углов меньше восьми прямых. Верно, так как каждый внутренний угол выпуклого многоугольника меньше развернутого, то есть двух прямых, а в четырехугольнике сумма углов меньше восьми прямых.

Разбирая такие небольшие вопросы, легче объяснить ученикам, почему необходимо каждое математическое суждение доказывать. Вместе с этим подобная работа будет развивать у учащихся навык в исследовании несложных вопросов. Постепенно учащиеся будут совершенствовать свои навыки в исследовании математических заключений, упражняясь в разборе более сложных предложений на протяжении всего школьного курса.

Практика подтверждает, что на первых этапах изучения геометрии и алгебры для обоснования изучаемых математических предложений целесообразно привлекать наглядность, опытную проверку, разъяснения на числовых примерах и вводить доказательства теорем для окончательного утверждения истинности предварительных заключений, гипотез. Так, приходится поступать, например, в алгебре при доказательстве теорем о произведении степеней одного и того же основания, о возведении степени в степень: сначала рассматриваются числовые примеры и только после того, как на основании их сделан предварительный вывод, доказываются теоремы в общем виде (см. ч. III, § 7).

Известно, насколько облегчается доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника после того, как опытным путем установлена величина этой суммы (см. ч. IV, § 19).

В результате того, что ученики постепенно овладевают приемами дедуктивного доказательства, роль предварительно построенных гипотез и заключений на основании частных случаев и примеров уменьшается. Однако и в VIII классе подготовительная работа перед доказательством теорем облегчает учащимся понимание хода рассуждений при доказательстве теорем в общем виде (см. ч. III, § 7, ч. IV, § 7).

При построении системы обучения математике учитель должен руководствоваться словами В. И. Ленина: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике —

таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» [1].

Учителю следует стремиться к тому, чтобы при обучении не выпадало ни одно звено на пути познания математических предложений, так как именно только диалектический путь познания позволяет полностью вскрыть сущность объективного закона.

Разберем это на примере изучения теоремы Виета.

Первое звено изучения — это решение ряда уравнений и установление на конкретных примерах зависимости между корнями уравнения и коэффициентами его.

Второе звено — вывод общей формулы этой зависимости.

Третье звено — приложение общей формулы к решению задач и к исследованию уравнений и функций.

Если пренебречь первым звеном, а сразу вывести общую формулу, то ученики в лучшем случае запомнят ее, а затем будут действовать механически; при этом понимание сущности закона будет неполным, в результате чего формула будет быстро забыта.

Если пренебречь вторым звеном, то нарушится основной принцип математики — все, что не доказано в общем виде, нельзя считать доказанным вообще.

Этот случай стал бы для учащихся примером того, что математические законы можно обосновать без доказательства.

Если учителем использованы оба звена для установления зависимости, но выведенный закон не использован при решении задач, то у учащихся сложится убеждение, что вывод не имеет практического значения.

Трудно себе представить такой случай, но, если пренебречь и первым и вторым звеном и предложить ученикам решать задачи, пользуясь сообщенной им готовой формулой, конечно, ни о каком понимании сущности закона не может быть речи, ученики будут выражать недоумение — откуда взялся закон и почему он верен.

§ 10. О логических ошибках учащихся, источниках возникновения и мерах предупреждения их

Логические ошибки возникают в результате нарушения основных принципов математических рассуждений (см. ч. I, § 9).

Ошибки в определении понятия. Примеры.

1. Равносильными уравнениями называются такие уравнения, когда корни первого уравнения являются корнями второго.

2. Квадратное уравнение с одним неизвестным — это уравнение, содержащее неизвестное во второй степени.

---

[1] См [4], стр. 146—147.

3. Прямая, делящая сторону треугольника пополам, называется медианой.

4. Отрезок, соединяющий середины сторон треугольника и равный половине третьей стороны, называется средней линией треугольника.

Во всех приведенных примерах нарушено основное требование к установлению определения понятия — наличие необходимых и достаточных признаков объекта. Мерой предупреждения таких ошибок являются в первую очередь тщательная отработка определения понятия, в частности, с помощью метода сравнения объектов, а кроме того, опровержение примерами. Так, для первого примера ценными являются упражнения такого вида:

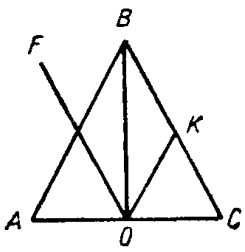


Рис. 21

а) являются ли равносильными уравнения $x-2=0$ и $(x-2)(x-3)=0$?

б) являются ли равносильными уравнения $x-2=0$ и $x+3=5$?

И т. д.

Для второго примера возможны упражнения такого вида:

Какие из приведенных уравнений являются квадратными?

а) $x^2-3x+2=0$; б) $x^3-x^2+3x=6$; в) $x^3+x^2-3x=x^3-2$;

г) $x^2-4=0$.

В третьем примере ошибка в определении медианы стороны треугольника могла возникнуть в том случае, когда при определении понятия не сопоставлялись проведенные различные отрезки в треугольнике и прямые, делящие сторону треугольника пополам (см. рис. 21).

Ошибка в определении средней линии треугольника в большинстве случаев является результатом недостаточной отработки определения в момент установления его. Если при установлении понятия о средней линии будет не только дано определение, но и проведена некоторая работа по закреплению определения, то ученики не допустят ошибок. В упражнения могут быть включены такие вопросы: а) достаточно ли для построения средней линии треугольника соединить середины двух сторон его? б) сколько можно построить средних линий в треугольнике? в) какими свойствами обладает средняя линия треугольника? г) можно ли построить в треугольнике отрезок, соединяющий точки на сторонах треугольника и равный половине одной из сторон треугольника, но который не будет средней линией? д) построить и доказать теорему, обратную теореме о свойстве средней линии треугольника.

Ошибки при доказательстве теорем. Наиболее распространенной ошибкой при доказательстве теорем является использо-

вание при доказательстве искомого как данного. Предупредить такую ошибку можно только четким выяснением, что дано, что надо доказать.

Логической ошибкой в доказательстве утверждений является неполная аргументация или пропуск в аргументации. В курсе восьмилетней школы неполная аргументация чаще всего допускается учениками в доказательствах при решении задач, например при построении, реже при доказательстве помещенных в учебнике теорем.

Пример. Доказывается теорема: «Два треугольника равны, если углы при основании и биссектриса угла при вершине одного треугольника равны углам при основании и биссектрисе угла при вершине другого треугольника». Ученик рассуждает так: 1) углы при вершинах B и B_1 в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны, как дополняющие суммы углов $A+C$ и A_1+C_1 до 180° (рис. 22), 2) $\angle KBC=\angle K_1B_1C_1$, как половины равных углов, 3) $\triangle KBC=\triangle K_1B_1C_1$, как имеющие по два равных угла и равной стороне, 4) аналогично $\triangle ABK=\triangle A_1B_1K_1$, значит 5) $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. На первый взгляд, все верно, но в рассуждениях допущены пропуски: а) при сравнении треугольников KBC и $K_1B_1C_1$ не сделана ссылка на признак равенства треугольников, б) недостаточно ясно, почему из равенства малых треугольников вытекает равенство больших треугольников.

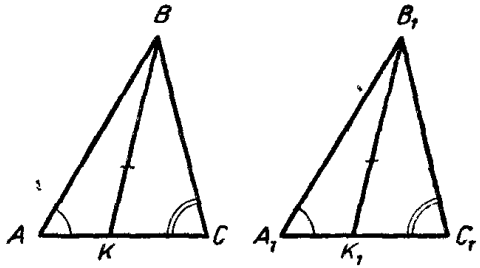


Рис 22

Логической ошибкой является неполная дизъюнкция. Особенно часто эта ошибка допускается в вопросах и задачах, связанных с исследованием.

Пример 1. Требуется установить сравнительную величину a^3 и a^2; вместо того чтобы исчерпать все возможные значения буквы a, ученик рассматривает значение выражений при $a>1$ и в результате получает неполный, а значит, и неверный ответ.

Пример 2. Рассматривается положение точки пересечения биссектрис углов, прилежащих к основанию трапеции. Ученик, нарушая требование полной дизъюнкции, рассматривает только случай, подсказанный сделанным чертежом. Но зависимость положения точки от соотношения сторон трапеции не вскрывает. Предупредить такого вида ошибки можно только систематической работой по рассмотрению задач, требующих учитывать все возможные разновидности данной ситуации.

Встречается много логических ошибок в преобразованиях алгебраических выражений, когда ученики пользуются необоснованной аналогией.

Известны распространенные ошибки такого вида: так как $(a+b)c=ac+bc$, то по аналогии $(ab)c=ac\cdot bc$; известно, что если $a=b$, то $ak=bk$, отсюда по аналогии считают, что, если $a>b$, то $ak>bk$ в любом случае; по аналогии с численными дробями ученик иногда считает, что $\frac{a+b}{c}>\frac{a}{c}$. Предупредить эти ошибки или искоренить их можно постоянным напоминанием школьникам (при этом не только словами, но и соответствующими примерами), что аналогия может служить только вспомогательным средством для установления истины и постоянно требует проверки и подтверждения логическим доказательством.

Известную пользу в деле осознания того, что доказательства и исследования играют в математике решающую роль в установлении истины, имеет разбор парадоксов и софизмов. Рассмотрение их заставляет учеников глубже вникнуть в приводимые в них рассуждения и научит отыскивать ошибки в рассуждениях, которые обычно приводят к абсурду.

§ 11. Борьба за качество знаний учащихся

«Передать учащимся знания — это значит сформулировать и образовать в сознании учеников представление о вещах и явлениях, раскрыть сущность явлений — образовать понятия, помочь осознать закономерную связь явлений материальной действительности и облечь все это в правильную словесную или иную форму» (М. Н. Скаткин, Формализм в знаниях учащихся и пути его преодоления, М., 1947).

Высокое качество знаний, даваемых школой, является необходимым условием для строительства коммунистического общества. Несмотря на то что современная наша школа достигла значительных успехов, в ее работе все же имеется ряд недостатков. Одним из таких недостатков является формализм в знаниях учащихся, а именно отрыв формы выражения от содержания и механическое запоминание учебного материала.

Необходимо отличать формальные знания от незнания материала. Если ученик производит сокращение дроби так:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}=a+b,$$

то можно говорить не о формальных знаниях, а о полном незнании правила сокращения дробей. Точно так же если ученик пишет

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta,$$

то опять-таки здесь имеет место незнание, непонимание существа вопроса. Формальные знания все же знания, но иногда бы-

вает трудно провести границу между формальными знаниями и незнанием материала. Приведем пример: ученик правильно решает систему уравнений

$$\begin{cases} 2ax+by=c \\ 3ax-2by=d, \end{cases}$$

если x и y приняты за неизвестные, и затрудняется решить эту же систему, если за неизвестные приняты a и b. В данном случае имеет место преобладание внешней формы над содержанием.

Формализм проявляется в преобладании памяти над пониманием. При незначительном изменении чертежа или обозначений, принятых в учебнике, ученик часто теряется и не может довести доказательство теоремы до конца.

Проф. А. Я. Хинчин указывал, что формализм в математике порой смешивают с обязательным для всех ступеней математической науки требованием формально-логической строгости ее изложения. Борьбу с формализмом хотят понимать как борьбу за изгнание из школьного преподавания математики требований формально-логической строгости обоснования математических истин («Известия АПН РСФСР», вып. 4, 1946, стр. 10).

Такое понимание борьбы с формализмом в корне неправильно. Изгнание из математики строгости рассуждений, необходимости обоснования каждого вывода и т. д. приведет к печальным результатам. Если ученик средней школы не будет понимать необходимость в строгих доказательствах, не будет ценить их преимущества, не сумеет применять эти рассуждения к разрешению какой-нибудь проблемы из практической жизни, то у него действительно выработается формальное отношение к математике.

Однако абстрактное и строгое изложение математики должно вводиться постепенно. В особенности нужно быть осторожным в V—VIII классах. В связи с этим необходимо остановиться на так называемых условностях в курсе элементарной математики, которые получили развитие начиная с 80-х годов прошлого столетия. В курсе алгебры постоянно встречались следующие выражения: «условимся понимать под суммой отрицательных чисел...», «условимся называть степенью с отрицательным и нулевым показателем...», «условимся называть произведением иррациональных чисел...», причем все эти положения постулировались и с них начиналось изложение. Вышеприведенные положения есть условия (этого никто не будет отрицать), но необходимо, прежде чем ввести их, указать на целесообразность введения, оправдать на практике, показать их значение и т. д., то есть проделать большую подготовитель-

ную работу. Например, при выводе правила возведения степени в степень следует предложить ряд упражнений с числовыми данными и затем лишь записать вывод в общем виде: $(a^b)^c=a^{bc}$ и сформулировать правило.

Если не проводить такой подготовительной работы, то у школьников создастся убеждение, что в математике есть ряд произвольных, ничем не оправданных условий.

Причинами, вызывающими формализм в знаниях учащихся, являются:

I. Формальное изложение вопросов теории.

II. Недостаточно сознательное усвоение теоретических вопросов.

III. Формальное отношение к ответам учеников.

IV. Отсутствие достаточной связи между теорией и практикой, применение шаблонных приемов для решения задач.

Остановимся на этих вопросах несколько подробнее.

Поверхностное изложение нового материала и зазубривание вырабатывают у учащихся формальные знания.

Ученики не понимают, зачем они изучают тот или иной раздел, а поэтому не вникают в сущность излагаемой теории.

Необходимо, чтобы ученик понимал *цель изучения* каждого крупного раздела математики.

Поэтому изложение новой темы полезно начинать с постановки вопроса, зачем нужна данная тема. Перед учениками должна быть поставлена определенная цель, указано значение темы для дальнейшего изучения математики, показано практическое значение нового материала и связь его с предыдущим.

Пример 1. Ученики не понимают, зачем нужно разложение многочлена на множители. Указание преподавателя представить данный многочлен в виде произведения нескольких множителей для них кажется неубедительным, тем более что во многих случаях получается более сложное выражение. Поэтому разложение на множители можно начинать с сокращения дробей.

Сперва дать ученикам один или несколько примеров следующего рода:

Найти

$$\frac{17^2-15^2}{32}.$$

И предложить им найти значение этого выражения, последовательно выполняя все действия. Затем применить формулу для разности квадратов двух выражений

$$\frac{17^2-15^2}{32}=\frac{(17+15)(17-15)}{32}=2.$$

Далее может быть предложено следующее упражнение:

Найти значение выражения

$$A=\frac{a^2b+ab^2}{ab+b^2},\ \text{если}\ a=2\frac{1}{2},\quad b=\frac{3}{7}.$$

Предварительно преобразуем числитель и знаменатель

$$A=\frac{ab\,(a+b)}{b\,(a+b)}=a.$$

Значение этого выражения будет

$$A=a=2\frac{1}{2}.$$

После нескольких упражнений ученикам станет более понятной цель разложения многочлена на множители. Затем следует перейти к систематическому изложению данной главы.

Пример 2. Приступая к теме об измерении углов дугами, следует указать важность этого вопроса, перечислить все возможные случаи расположения вершины угла относительно окружности (вершина угла в центре, на окружности, внутри и вне окружности и т. д.), а затем приступить к доказательствам. У учащихся в этом случае будет определенная перспектива и даже будет выяснен объем темы.

Иногда полезно дать перед началом темы краткий исторический очерк. Однако необходимо соблюдать экономию во времени: в некоторых случаях подготовительная работа, если ее очень подробно развернуть, может отнять слишком много часов.

Недостаточно сознательное усвоение вопросов теории также способствует формализму в знаниях учащихся.

Приведем несколько примеров. На вопрос, какое из выражений a, a или a^3, больше, некоторые ученики указывают, что $a < a^3$, ибо механически распространяют возведение в степень положительного числа, большего 1, на все рациональные числа. Не всегда можно добиться правильного ответа:

если
$$\begin{aligned}
1 < a,&\ \text{то}\ a < a^3;\\
1 = a,&\ \text{»}\ a = a^3;\\
0 < a < 1,&\ \text{»}\ a > a^3;\\
a = 0,&\ \text{»}\ a = a^3;\\
-1 < a < 0,&\ \text{»}\ a < a^3;\\
-1 = a,&\ \text{»}\ a = a^3;\\
-1 > a,&\ \text{»}\ a > a^3.
\end{aligned}$$

Необходимо обратить особое внимание на точность и ясность формы выражения мысли, на понимание значения каждого слова в выражении математического факта, в частности в формулировке определений и теорем.

Так, ученик, приводя определение окружности как замкнутой плоской линии, все точки которой одинаково удалены от одной и той же точки, расположенной в этой же плоскости, часто не отдает себе отчета, почему необходимы слова «плоская», «замкнутая». Ему не приходит в голову, что без слова «плоская» кривая AB на шаре или совокупность двух равных дуг, имеющих общие начало и конец, согнутых под углом, будет удовлетворять всем остальным требованиям, но не будет являться окружностью (рис. 23). Дуга окружности также удовлетворяет данному определению, если выкинуть слово «замкнутая».

Прежде чем привести то или иное определение, необходимо убедиться в том, что ученики имеют ясное, конкретное представление об определяемом понятии.

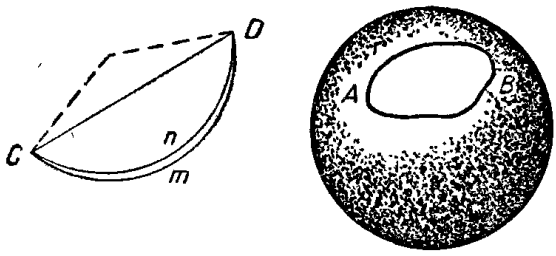


Рис. 23

Правильное понимание специальных терминов невозможно без понимания связей между ними, без понимания их взаимной зависимости. Ученик должен ясно отдавать себе отчет в том, что каждое определение или правило справедливо только для того класса объектов, для которого оно установлено. Например, утверждение, что произведение больше каждого из сомножителей, если ни один из сомножителей не есть 1, справедливо для натуральных чисел и не верно для дробных чисел.

Приведем еще пример. Параллелограмм есть понятие более широкое, чем прямоугольник, который в свою очередь есть понятие более широкое, чем квадрат. Свойство диагоналей параллелограмма (диагонали взаимно делятся пополам) справедливо для прямоугольника и для квадрата, но свойство диагоналей квадрата (взаимная перпендикулярность их) несправедливо для всякого прямоугольника или параллелограмма. Точно так же равенство диагоналей прямоугольника справедливо для квадрата, но несправедливо для всякого параллелограмма.

Учителю следует заботиться о том, чтобы работа над формой выражения знания не отрывалась от работы над содержанием знания: работа над формой выражения должна находиться в органическом соединении с сознательным усвоением содержания материала.

Необходимо добиваться, чтобы ученики умели применять общее правило для каждого частного случая, например умели найти точку пересечения высот (или их продолжения) не только

для остроугольного, но для прямоугольного и тупоугольного треугольника или умели из формулы для корней квадратного уравнения вида $ax^2+bx+c=0$ получить формулу для корней уравнения $x^2+px+q=0$, $ax^2+bx=0$ и $x^2-c=0$ (c — положительное число).

Недостаточно четкий опрос учащихся способствует развитию формальных знаний. Мы уже говорили, что следует добиваться сознательного доказательства теорем. Часто наблюдается, что ученик воспроизводит доказательство теоремы по памяти, без достаточного понимания. Он не разбирает, где условие теоремы и что является заключением; не всегда понимает, верна ли обратная теорема. Наблюдаются случаи, что ученик часто теряется (изменяет память) и не может довести доказательство теоремы до конца. Иногда он при доказательстве теоремы пропускает часть промежуточных рассуждений или, начав правильно доказывать теорему, приводит в дальнейшем рассуждения из другой теоремы.

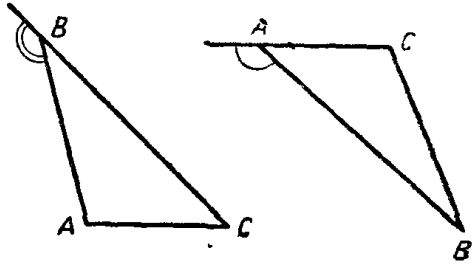


Рис. 24

Для того чтобы изжить эти недочеты, полезно при опросе учащихся или задавая урок на дом, изменить чертеж, поменять буквы, потребовать доказать справедливость теоремы для другого элемента, если, конечно, теорема для него верна. Например, теорему о внешнем угле треугольника следует доказывать для различного вида треугольников или для угла A, если она доказана для угла B (рис. 24). Меняя чертеж, обозначения и т. д., мы добиваемся понимания учениками сущности доказательства.

При доказательстве теорем ученик должен понимать, почему производится то или иное дополнительное построение. Необходимо требовать, чтобы он мог объяснить целесообразность дополнительного построения. Полезно для усвоения доказательства теорем составлять план или детальную запись доказательства, а затем требовать от учеников делать это самостоятельно.

При опросе нельзя удовлетворяться ответом ученика, не выяснив, действительно ли ученик усвоил то, что отвечает. Поэтому после доказательства теоремы или вывода правила полезно предложить ученику вопросы, ответы на которые покажут понимание им материала, например:

1. Сколько острых внешних углов может иметь треугольник?

2. Можно ли построить параллелограмм из а) четырех попарно неравных отрезков, б) двух равных и двух неравных

отрезков, в) четырех попарно равных отрезков? Сколько параллелограммов можно построить в последнем случае?

3. Указать условия: а) достаточные, б) необходимые, чтобы четырехугольник был параллелограммом. Достаточно ли равенство одной пары сторон; обеих пар противоположных углов четырехугольника?

4. Внутри какого параллелограмма существует точка, равноотстоящая от всех его вершин; от всех его сторон?

5. Произведение пяти (семи) чисел есть отрицательное число. Сколько может быть отрицательных сомножителей?

Полезно предлагать ученикам задачи, когда дан только готовый чертеж, например: найти измерение угла A с помощью дуг, заключенных между его сторонами (рис. 25).

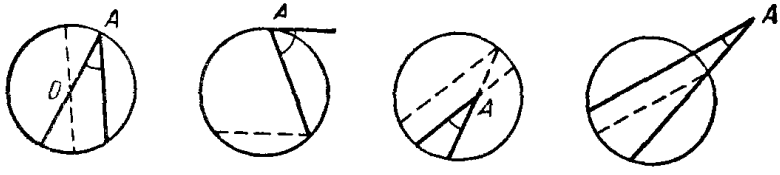


Рис. 25

Такие упражнения способствуют более глубокому пониманию и сознательному отношению к математическим положениям и, следовательно, будут способствовать изжитию формальных знаний у учащихся.

Отрыв теории от практики. Необходимо научить учащихся применять полученные знания к решению задач. Ученика не тревожит, если при решении задачи получается, что скорость велосипедиста равна 49 *км/ч* или в колхозе имеется 124,7 головы крупного рогатого скота. Здесь ярко проявляется формализм в знаниях.

Учащиеся легко находят площадь треугольника или объем цилиндра, размеры которого даны. Но затрудняются самостоятельно определить размеры фигуры или тела. Поэтому полезно предлагать ученикам находить объем и поверхности тел, площади фигур, сделанных из картона или дерева, выполнив непосредственные измерения и найдя исходные данные для расчетов Особенно полезны измерения на местности (см. ч. IV). Следует приучать учеников производить простейшие практические расчеты, например: сколько потребуется трех- или пятитонных машин для перевозки некоторого груза в определенный срок при одной или другой скорости и т. д.

Необходимо отметить неумение применять теоретические знания к решению задач: задачи иногда решаются по шаблону.

Приведем несколько примеров.

1. Найти 102^2 (формулы сокращенного умножения предполагаются пройденными). Ученики твердо знают квадрат суммы или разности двух количеств, однако не все из них догадаются, что $102^2=(100+2)^2$.

2. Пусть требуется найти значение выражения

$$A=(a^3+3a^2b+b^3)(5a^2-4ab-3b^2)(a^2-4ab+4b^2) \text{ при } a=1{,}5;\ b=0{,}75.$$

Некоторые учащиеся начнут последовательно вычислять значение первого, затем второго и наконец третьего сомножителя. Но третий сомножитель можно представить следующим образом:

$$(a^2-4ab+4b^2)=(a-2b)^2.$$

Он при данных значениях a и b равен нулю Следовательно, $A=0$.

Если приучать учащихся предварительно внимательно рассматривать заданное выражение, то они должны заметить возможность преобразовать третий сомножитель.

3. Упростить выражение

$$A=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Этот пример допускает несколько решений.

Первое решение. Непосредственно перемножить данные многочлены.

Второе решение.

$$A=[(x^2+1)-x][(x^2+1)+x]=(x^2+1)^2-x^2=x^4+x^2+1.$$

Третье решение.

$$A=\frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1}\cdot\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=$$

$$=\frac{x^3+1}{x+1}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{x^6-1}{x^2-1}=x^4+x^2+1.$$

Затем следует сравнить каждое решение с остальными, указать преимущество и недостаток каждого из них и т. д. Заметим, что третий способ решения будет наиболее целесообразным, когда требуется перемножить многочлены следующего вида:

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

4. Представить в виде суммы двух квадратов следующее выражение:

$$2a^2+2b^2.$$

Часто учащиеся затрудняются решить данную задачу, хотя решение очень простое:

$$2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2=(a+b)^2+(a-b)^2.$$

5. Внутри угла в 60° дана точка M, удаленная от сторон угла на 2 и 11 единиц. Найти расстояние точки M от вершины угла (рис. 26).

Решение. Продолжим AM до пересечения с продолжением OB. Из $\triangle BMD$ имеем $MD=22$, следовательно,

$$AD=22+2=24;$$

$$OA=AD;\ \operatorname{tg}30^\circ=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}\ .$$

Тогда

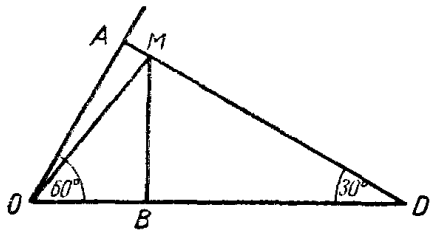


Рис. 26

$$OM=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+4}=\sqrt{192+4}=14.$$

Эта сравнительно простая задача оказывается не под силу многим ученикам; причина заключается в том, что они не умеют применять теоретические положения на практике.

Как мы уже указали, формализм в знаниях учеников является большим недостатком. Учащиеся, имеющие формальные знания, не подготовлены к практической жизни и к занятиям в высшей школе. Преодолеть формализм в знаниях — значит предотвратить возможность отрыва слова от мысли, а самую мысль сделать содержательной. Только тогда, когда в сознании ученика правильно отразится реальная действительность и это отражение выразится в правильной, четкой и ясной форме, формализм в знаниях учащихся будет уничтожен.

§ 12. О культуре математической речи

Речь учащихся есть результат их мышления и отражает степень понимания ими изученного учебного материала. Грамотная речь сама способствует математическому развитию и закреплению знаний. Грамотная математическая речь выражается в правильном написании математических терминов, в знании, где и в каком смысле можно применить эти термины и специальные математические выражения. Иногда наблюдается стремление ученика к многословию, что ведет к расплывчатости и неопределенности. В некоторых случаях ученик пытается за этим многословием скрыть свое незнание, в других случаях он просто проявляет непонимание особенностей математической речи.

Иногда наблюдается обратное явление: ученик сокращает предложения настолько, что они теряют смысл; в результате

получается своеобразный «жаргон», когда, пренебрегая точными формулировками, ученик заменяет их неграмотными выражениями. Развивать у школьников правильную речь, бороться с искажениями в языке необходимо систематически и терпеливо.

Особенно важно показывать ученикам на примерах, как небрежность речи, ошибки в ней могут изменить смысл предложения, а иногда привести к выражению неверных зависимостей, к искажению математических законов.

Следует постоянно требовать от учеников правильно пользоваться символикой и в случае неправильного употребления символов раскрывать ошибки, показывать на примерах нелепость в ошибочных записях, анализировать отдельные выражения.

По мере овладения символикой следует чаще прибегать к ней при записи доказательств, выводов, записи условий и т. д. Надо научить школьников записывать при посредстве символов любую зависимость.

Огромное значение в развитии правильной математической речи имеет формулировка вопросов, которые задает учитель. Вопрос должен быть сформулирован ясно, точно и коротко, чтобы ученик понимал, что от него требуется, и чтобы его ответ с исчерпывающей полнотой показывал, действительно ли он знает то, о чем его спрашивают, или только заучил наизусть формулировку и ряд символических записей. Очень важно, чтобы ученики знали, что им будут задаваться вопросы всегда именно с таким расчетом.

Конечно, проще задать вопрос в такой форме: «Скажите, чему равен квадрат суммы двух чисел?», но значительно лучше, когда этот же вопрос формулируется так: «Как преобразуется квадрат суммы двух чисел?»

Ученики должны знать, что называется корнем уравнения первой степени с одним неизвестным, но важно, чтобы они знали, сколько корней может иметь такое уравнение. А между тем в школах редко можно услышать такой вопрос: «Может ли уравнение 1-й степени с одним неизвестным иметь более чем один корень? Ответ объяснить».

Иногда учителя сами прививают навыки формального заучивания материала: иной раз учитель добивается того, чтобы ученик знал, какой из признаков равенства треугольников является первым, или умел сформулировать второй признак равенства треугольников. Ученики расценивают это требование учителя как необходимый логический доказательный момент. Но ученики нередко забывают нумерацию признаков, принятую в учебнике, особенно когда вопрос ставится спустя продолжительное время после их изучения. А ведь гораздо ценнее ставить вопрос в такой форме: «Достаточно ли для ра-

венства треугольников равенства двух сторон и угла? Ответ сопроводить формулировкой теоремы».

Кому незнакомы ошибки учеников в правописании математических терминов? Пишут: «матиматика», «арефметика», «еденица», «часное», «сочитательный», «преведение» и т. п.

Научить правильному написанию математических терминов — задача самих учителей математики. Правописание вновь вводимого термина нужно показывать на доске, затем ученики должны записать его в свои тетради. Хорошо, чтобы ученики вели специальный словарь математических терминов со II—III класса. Полезно иметь таблицы математических терминов, составленные в определенной системе, например соответственно изученным темам.

Важно правильно делать ударения в словах. Ученики иногда произносят: «апо́фема», «аргу́мент», «кило́метр», «про́цент» и т. д.

Необходимо правильное сокращение слов в математических записях, особенно сокращение наименований единиц мер. На практике одни и те же термины сокращаются различно, например: «сантиметр» сокращенно записывают *см*, *снм*, *сант*, «килограмм» записывают *кг*, *кгр*, *кгм* и т. д. Важно соблюдать единство в начертании сокращенных наименований размерности, встречающихся в физике, химии и в других отраслях знаний, с соблюдением требований ГОСТ, предусматривающих стандартные обозначения наименований.

Отсутствие единообразных требований к сокращению слов приводит к неграмотности.

Учителя не всегда обращают внимание на недочеты в письменной речи учащихся, на записи знаков, расположение записей, а все это важно в борьбе с неграмотностью по существу.

Часто можно встретить такие записи:

$$\text{а)}\ \frac{35-13}{9}\ \frac{22}{5};\quad \frac{a+c}{b}=\frac{d+m}{n}$$

(небрежность в постановке знака равенства);

$$\text{б)}\ 5\frac{3}{5}+3\frac{3}{8}+4\frac{7}{20}=\frac{24+15+14}{40}=\frac{53}{40}=1\frac{13}{40}=13\frac{13}{40};$$

$$\text{в)}\ 1{,}5\cdot 1{,}2=180=1{,}80;$$

г) катет = 12 *см* (слово приравнивается числу);

д) знак равенства не переносится на следующую строку;

е) сомножители разрываются переносом.

Особенно много случаев бессмысленной редакции вопросов при решении задач по арифметике. Например: а) сколько было частей? (чего, каких?); б) какая часть процента (?) падает на один ящик?

Анализ работ с решением задач говорит о том, что около 30% ошибок относится к неправильной редакции вопросов.

Иногда и учитель допускает или не замечает вольного обращения с математическими терминами и выражениями.

Общеизвестны выражения «отбросим знаменатель» вместо «умножим обе части уравнения...», «сократим уравнение на одно и то же число» вместо правильного выражения «разделим обе части уравнения (или все члены уравнения) на одно и то же число». Ученики часто употребляют выражение «обратные знаки»; правильнее говорить: «противоположные»; именно этот термин соответствует и геометрическому представлению чисел с различными знаками. Неверно употребление термина «смешанное число» вместо «смешанная дробь». Часто можно услышать выражения: «вычислить уравнение» вместо «решить уравнение», «вычислить отрезок» вместо «вычислить длину отрезка», «решить теорему», вместо «доказать теорему».

Даже в старших классах можно услышать такое выражение: «формула приведенного квадратного уравнения равна». Понятно, о чем думает или что предполагает ученик, произнося это выражение, но все же сказанное никакого смысла не содержит. То же можно сказать о распространенном выражении «сократить числитель и знаменатель». Не следует разрешать ученикам употреблять выражение «наверху» вместо «в числителе», «внизу» вместо «в знаменателе».

Распространены выражения «поверхность» вместо «площадь поверхности». В погоне за краткостью ученики употребляют термины: «степень» вместо «показатель степени», «корень» вместо «подкоренное выражение», «скобки равны 0» вместо «выражение в скобках равно 0» и т. п.

Небрежность и неточность в употреблении терминов ведет к непониманию математических символов, путанице в формулировках и неправильному практическому приложению их.

Часто ученик называет простым числом «всякое натуральное число, имеющее два делителя», пропуская слово «только». Это уточнение, как известно, в математике играет существенную, а иногда и решающую роль.

Не сознавая всей важности употребления слова «только», ученик спокойно говорит, что касательная — это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, как будто секущие не имеют такой точки.

Распространены ошибки учащихся в формулировках теорем, связанные с пропуском слов, устанавливающих объем понятия. Например, ученики часто говорят: «против равных сторон лежат равные углы», пропуская слова в «равных треугольниках»; «если степени равны, то и показатели степени равны», не оговаривая, что это верно лишь при равных между собой (но не равных нулю или единице) вещественных основаниях степеней.

Во всяком случае надо возможно чаще проверять, связывают ли учащиеся то, что говорят, с реальными фактами, образами, не повторяют ли они формально заученные предложения.

Школьники склонны распространенно толковать некоторые понятия и термины, например «центр фигуры». Они употребляют эти выражения, в большинстве случаев не отдавая себе отчета в том, что разумеют при этом; вообще центра фигуры нет, есть центр вписанной или описанной около фигуры окружности (если та или другая окружность в данном случае существует), или центр симметрии, или центр тяжести фигуры, или центр подобия.

Можно было бы привести еще ряд аналогичных ошибок, связанных с неумением учеников раскрывать сущность употребляемых терминов. В школе нужно работать с детьми над выяснением содержания того понятия, которое выражается употребляемым термином.

Развитию математической речи содействует требование учителя к ученику излагать полно и связно всякого рода объяснения теоретического порядка и рассуждения при решении задач.

От ученика следует требовать не только правильных формулировок, но и речи без слов-паразитов («наше ребро», «ваш треугольник»), без надуманных терминов, например: «подобность фигур», «сколько угодно маленькими», «дробь перевернуть» (вместо «взять дробь, обратную данной»). Нужно научить детей слушать свою речь и следить за согласованием слов в предложениях, ибо неправильное согласование в речи также искажает мысль и часто приводит к грубым ошибкам в выводах. Так, например, многие ученики говорят: «отрезки прямых, заключенных между параллельными прямыми, равны между собою» (пропущено слово «параллельных» и употреблено неверное согласование слов).

Формулировки теорем нельзя засорять ненужными по смыслу словами. Например, ученик говорит: «Если три стороны одного треугольника пропорциональны сходственным (?) сторонам другого...» Эти лишние слова свидетельствуют о том, что он не понимает смысла и назначения употребленных слов.

Источник указанных ошибок, неточностей, бессмыслиц с логической точки зрения в речи учащихся лежит прежде всего в методах обучения математике в младших классах.

Речевые ошибки в математических выражениях, допущенные в ранний период обучения, укореняются в последующих классах, где некоторые учителя игнорируют недочеты в речи, исходя из соображений, что школьники понимают, о чем идет речь, и просто оговариваются. Из-за экономии времени такие учителя не останавливаются на недостатках речи. Нередко они даже оправдывают свое невнимание к речи тем, что обучение

правильной речи — это дело учителей русского языка, и в лучшем случае исправляют ошибки механически.

В тех случаях, когда учитель приучает учеников слушать речь товарищей, свою собственную и оценивать ее с точки зрения математической грамотности, логических связей, учащиеся настолько привыкают к критическому отношению, что замечают даже незначительные погрешности.

Надо помнить, что самый процесс выражения мыслей учеником носит характер диалектической взаимосвязи; речью формулируются готовые, осознанные мысли, но в то же время сами мысли формируются речью, как бы отшлифовываются, уточняются. Поэтому каждый учитель, в том числе и математики, обязан повседневно и систематически работать над формированием мыслей учащихся, над выработкой правильных форм выражения их посредством устной и письменной речи.

Пути борьбы за правильную, грамотную речь разнообразны.

Прежде всего речь самого учителя должна быть правильной и служить образцом для учащихся. Учитель должен тщательно отшлифовывать формулировки, заранее продумывать записи на доске, особо внимательно относиться к тому, что диктует для записи в тетрадях. Необходимо также внимательно следить за речью учеников, обращать их внимание на ошибки, исправлять ошибки, анализировать их, привлекая к исправлению самих учащихся.

При проверке письменных работ учитель должен отмечать ошибки не только математические, но стилистические, орфографические и пунктуационные. Это нужно не только для соблюдения единого орфографического режима в школе, но и для правильной постановки обучения математике.

Учитель должен преодолевать вредную привычку, если она у него есть, задавать ученику вопрос за вопросом и довольствоваться отрывочными ответами. Надо предоставить ученику возможность последовательно излагать свои мысли, только изредка подавая реплики: «почему?», «подумайте, верно ли это», чтобы направить ответ в нужное русло. Помимо требования верных точных формулировок, определений и правил, можно предложить ученику устно доказать некоторые теоремы, сделать вывод некоторых законов, правил. Нельзя считать, что все теоретические рассуждения учащийся может изложить только письменно. Устные доказательства обогащают речь и развивают умственные способности учащихся.

Некоторые учителя считают, что можно свести до минимума всякого рода записи при ответе ученика у доски и ограничиться устным изложением сделанного вывода со ссылками на заметки, выкладки и геометрические построения, записанные на доске. К сожалению, чаще можно наблюдать, как ответ

ученика сводится к зачитыванию того, что написано им на доске (что видно и без зачитывания).

Учащиеся VI класса могут устно рассказать, как выводится формула квадрата алгебраической суммы двух членов или почему при умножении степеней равных оснований складываются показатели степеней.

Учащиеся VII класса должны быть подготовлены к тому, чтобы без записей последовательно рассказать об измерении различных углов в круге.

Чрезвычайно полезно специально остановиться и разобрать предложения, формулировки, в которых пропущено то или иное слово, разобрать, к чему приводит пропуск слова, и таким образом воспитывать у школьников глубокое понимание значения каждого слова.

В некоторые контрольные работы следует включать теоретические вопросы, на которые требовать ответ или объяснение, изложенное в виде связного текста.

Начиная со второй половины учебного года в VI классе полезно давать задачи на доказательства с письменным изложением их.

Некоторые учителя практикуют математические диктанты, текстом для которых служат формулировки определений, теорем, правил, насыщенные математическими терминами.

Практикуются задания по самостоятельному составлению вопросников по пройденной теме, при этом учащиеся должны включать в этот вопросник основные вопросы по изученной теме.

Например, по теме «Уравнения» ученик составил такой вопросник: Что называется уравнением? Что называется корнем уравнения? Что значит решить уравнение? Какие преобразования необходимы для решения уравнения? При каких преобразованиях можно получить лишние корни, потерять корни (какие преобразования могут повести к нарушению равносильности)? Всегда ли необходима проверка решения уравнения?

§ 13. Беседа, самостоятельная работа учащихся и лекция

Советская школа не знает распространенного метода старой школы, который приводил к тупой зубрежке и состоял в задавании выучить по книге «от сих пор до сих пор» на память или с пересказом выученного своими словами. Учитель советской школы должен помочь ученикам именно на уроке разобрать новый материал, выяснить, поняли ли его ученики, и даже частично закрепить полученные знания.

В этом заключается обучающая сторона урока.

Вся работа с учащимися, будь это разбор нового материала, закрепление полученных знаний, опрос или беседа, должна

строиться на возможно более широком привлечении учеников к активному участию в поисках оригинальных решений, рациональных преобразований, самостоятельных выводов и доказательств.

Активизация процесса обучения в свете новых задач, поставленных перед школой в связи с ее перестройкой, является одним из основных направлений совершенствования методов преподавания математики. Известно, что знания учащихся оказываются более сознательными и прочными, если они приобретают их в процессе активной познавательной деятельности, а не путем пассивного восприятия.

Этими требованиями определяются методы изложения учебного материала и организация учебной работы на уроке.

Наиболее распространенным методом работы по математике в младших классах является беседа, во время которой разбор материала в основном ведет учитель, но, кроме того, он привлекает учеников к наблюдениям, рассуждениям и вычислениям.

Иногда работа по разбору теоремы и при выводе формулы ведется всем классом самостоятельно. Ученикам предоставляется широкая инициатива в составлении плана, выборе путей доказательства или рассуждений. При этом учитель старается не давать наводящих вопросов, делать указания, разъяснять допущенные учениками ошибки в суждениях, а использует для этого высказывания учеников, отыскавших правильный путь. Однако такой прием отнимает много времени, так как разнообразные предложения отдельных учеников нередко отвлекают других в сторону от основного вопроса, а иногда им приходится выслушивать неверные, а порой и бессмысленные предложения, в этом случае кажущаяся активность идет не на пользу дела, а во вред. И все же одним из методов работы в классе при изучении нового материала является самостоятельная работа учеников, но под руководством учителя. При этом иногда все учащиеся получают некоторое общее задание, реже задание варьируется.

Работа может состоять и в упражнениях по решению задач, по разбору новой теоремы, выводу новой формулы; в отдельных случаях она состоит в разборе нового материала по учебнику.

Так, например, после вывода на доске формулы $(a+b)^3$ ученикам может быть предложено самостоятельно вывести формулу $(a-b)^3$. Для доказательства теоремы Виета восьмиклассникам может быть предложено дома решить ряд квадратных уравнений приведенного вида, заполнить таблицу. А в классе коллективно можно сделать нужный общий вывод относительно зависимости корней уравнения от его коэффициентов.

Каждый ученик запишет такую таблицу.

Таблица 4

	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2-5x+6=0$	2	3	5	6
$x^2+3x-4=0$	-4	1	-3	-4
$x^2-2x-15=0$	5	-3	2	-15
$x^2+5x+6=0$	-3	-2	-5	6
$x^2-2x-1=0$	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	2	-1
$x^2+px+q=0$	$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$	$-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$	$-p$	q

Последняя строка таблицы заполняется в классе после изучения таблицы и нахождения значений x_1+x_2 и $x_1 \cdot x_2$ в общем виде.

В учебниках геометрии некоторые теоремы предлагается доказать учащимся самим. Полезно иногда давать новую теорему для самостоятельного разбора на уроке по учебнику.

Часто такая самостоятельная работа несколько похожа на контрольную, но отличается от нее прежде всего своей целенаправленностью; как самостоятельная она дается не с целью контроля, а с целью обучения. Сам учитель не должен играть роль пассивного наблюдателя; он должен следить за работой каждого ученика, предупреждать явно ошибочные рассуждения и выводы, выяснять, кого что затрудняет.

Реже учителя математики пользуются лекционным методом изложения учебного материала. В этом случае учитель излагает материал сам, не привлекая учащихся. При этом ученикам даются указания, что следует записать, начертить, отметить в тетрадях.

Лекции в чистом виде применяются на уроках математики редко и только в старших классах. В младших классах лекционный метод изложения учебного материала не рекомендуется; ученики в этих классах еще не умеют слушать длительное изложение материала, улавливать основное, выделять существенно важное; записывать же излагаемое без диктовки они совсем не могут. Однако в отдельных случаях бывает полезно, если учитель излагает материал сам, без привлечения учащихся и только сопровождает свое объяснение вопросами к ученикам для того, чтобы установить обратную связь, то есть выяснить, как понимают они изложение, какие недоумения возникают у них, что следует дополнительно разъяснить, что повторить или проиллюстрировать чертежом, примером

Учитель может сам излагать не только теоретический мате-

риал, но и решение задачи, полностью приводить все рассуждения и оформлять все необходимые записи. Например, полезно самому учителю провести решение одной из основных задач на построение, для того чтобы отчетливо показать ученикам четыре этапа решения.

Изложение учителя должно стать для учащихся образцом, на который они должны равняться. Естественно, к своему изложению учебного материала учитель должен предъявлять особо высокие требования. Его речь должна быть безукоризненно грамотной, рассуждения и доказательства должны быть достаточно обоснованными, в то же время лаконичными и доступными для школьников.

Оформление должно быть строго продумано.

Хороший учитель никогда не придерживается какого-либо одного метода изложения. В зависимости от характера темы или разбираемого вопроса, от подготовленности учащихся, наличия достаточного времени для изложения он будет пользоваться различными методами, иногда меняя их на протяжении урока.

Выбирая метод изложения нового материала или форму закрепления изученного ранее, учитель должен помнить о необходимости провести урок наиболее эффективно: это значит добиться того, чтобы в намеченное время все ученики сознательно и полностью усвоили и закрепили знания, предусмотренные программой и учебником, и могли бы пользоваться ими для решения задач и примеров.

Каким бы методом ни пользовался учитель при изложении учебного материала на уроке, после урока он должен сам оценить, что в его изложении оказалось удачным, а что нет, и учесть свои выводы при подготовке к следующему уроку.

Если примененные методы изложения материала вызвали у учащихся необходимый интерес, внимание, если ученики давали правильные ответы на поставленные вопросы, сумели повторить приведенные рассуждения, то есть усвоили материал, то учитель может быть удовлетворен выбором метода изложения.

§ 14. Наглядность в преподавании математики. Лабораторные работы. Практические работы

Наглядность в преподавании математики прежде всего направлена к облегчению восприятия детьми сообщаемых им знаний. Для того чтобы ученики поняли, почему в определение понятия данного объекта входят только некоторые признаки, часто приходится показывать им, как возникает данный объект. В этом отношении особенно ценны в геометрии подвижные пособия.

Наглядные пособия помогают созданию у учеников пространственных представлений и развивают конструктивные способности. Так, при рассмотрении вопроса о построении из двух равных треугольников параллелограммов чертежи окажут меньшую пользу, чем картонные модели треугольников, хотя и чертежи в геометрии являются разновидностью наглядных пособий.

Наглядные пособия помогают развивать и некоторые практические навыки учащихся. Сколько бы ученик ни рассказывал об измерении углов в вертикальной плоскости, едва ли он реально представляет себе прием этого измерения, если он не держал в руках хотя бы модели угломера (эклиметр).

Наглядность помогает в систематизации и классификации математических объектов особенно в геометрии. Примером может служить изучение в VII классе взаимного положения двух окружностей. Используя один подвижный круг из проволоки или картона, легко выяснить все возможные положения окружностей. Наглядность в арифметике помогает ученикам понять образование дроби, простейшие преобразования их. Графические записи условия задач на движение, на сравнение величин значительно облегчают анализ условий и выбор пути решения. В алгебре большое место наглядность занимает при графическом изображении зависимости между величинами.

Преподавание геометрии без наглядных пособий едва ли можно себе представить.

Некоторые учителя полагают, что наглядность обучения сводится к использованию заранее заготовленных пособий — плакатов, схем, моделей и т. д. Едва ли не большее значение имеют наглядные пособия, создаваемые учителем и самими учениками в процессе изучения нового материала.

Так, например, в V классе по вопросу о преобразовании дроби вместо того, чтобы принести готовый плакат, иллюстрирующий равенство дробей (измеряющих одну и ту же величину при одной и то же единице измерения), значительно полезнее построить этот плакат в процессе рассуждений. Плакат строится учителем на доске и учащимися в своих тетрадях (см. ч. II, рис. 17).

В таком же духе проводится урок с проволочными обручами по теме VII класса «Взаимные положения двух окружностей». В результате в ученических тетрадях появится схема, отображающая различные взаимные положения окружностей, условия этих положений и названия; в классе же вывешивается соответствующая классная таблица (см. ч. IV, рис. 193).

Наглядным пособием становится таблица, составленная общими силами учеников класса по выводу теоремы Виета (см. стр. 96, табл. 4).

К наглядным пособиям и их изготовлению предъявляются следующие требования.

1) Наглядные пособия должны быть просты для понимания, свободны от лишнего, заслоняющего существенно важное. Так, на плакате, иллюстрирующем какое-либо геометрическое построение, должны быть показаны этапы построения, все вспомогательные линии должны быть бледными. Схемы, таблицы не должны перегружаться словесными пояснениями или символическими обозначениями. Так, например, на плакате, иллюстрирующем получение параллелограммов из двух равных треугольников, полезнее начертить стороны разным цветом, чем обозначать их буквами. Пособия не должны быть излишне красочными, чтобы пестротой не отвлекать внимания учащихся.

2) Наглядные пособия должны быть удобообозримы: чертежи, рисунки и надписи должны быть достаточно крупных размеров, чтобы были видны с дальних парт. Наглядные пособия должны быть выполнены аккуратно.

3) Наглядные пособия должны по возможности изготовляться самими учениками, это создаст у них некоторые практические навыки в пользовании простейшими инструментами (плакатное перо, готовые шрифты из резины, нож, пилка и др.) и умение использовать различные материалы (фанера, картон, проволока и др.); изготовление наглядных пособий развивает конструктивные способности. Для изготовления наглядных пособий следует использовать занятия учащихся в школьных мастерских, на уроках труда или во внеурочное время в кружке «Умелые руки».

Пользование наглядными пособиями должно быть продуманным и оправданным.

Нельзя привлекать наглядные пособия в таких случаях, когда они не содействуют пониманию учебного материала, а тормозят понимание его.

Если геометрическая интерпретация формулы квадрата суммы двух чисел вполне доступна для учащихся VI класса, помогает им уяснить структуру формулы и в известной степени гарантирует от допущения распространенной ошибки (пропуск удвоенного произведения чисел), то геометрическая интерпретация формулы куба суммы не эффективна.

Разбор чертежа или модели, которыми иллюстрируют формулу куба суммы двух чисел, отнимет много времени, создаст излишние трудности для учеников, в то время как после вывода формулы $(a+b)^2$ вывод формулы $(a+b)^3$ не представляет никакой трудности.

Несомненно, в младших классах наглядность в обучении применяется больше, чем в старших, где на смену ей все более и более выступает пространственное воображение.

Однако наглядность и в старших классах в ряде случаев может в значительной мере облегчить понимание учащимися материала, особенно по стереометрии.

Одним из наиболее распространенных пособий является чертеж на доске. Хорошо выполненный чертеж с применением цветных мелков поясняет решение задачи, иногда подсказывает решение или составление уравнений, помогает отыскать путь к доказательству в геометрии.

Лабораторные работы. К лабораторным работам по математике следует отнести изучение вопросов, связанных с предварительными измерениями и составлением таблиц, вычерчиванием графиков, данные которых затем будут служить основой для теоретических выводов и обобщений.

Такого рода работы могут проводиться и в классе и дома. В VII классе по теме «Площадь круга» ученикам можно предложить дома на форматке миллиметровой бумаги начертить круг произвольного радиуса и подсчитать с наибольшей точностью число квадратиков, выбранных за единицу измерения площади и уложившихся в круг выбранного радиуса; затем на радиусе как на стороне построить квадрат и определить отношение полученной «площади» круга к площади квадрата.

Примерно в этом же плане описана ниже работа по теме «Равенство треугольников» в VI классе.

При изучении функции $y=ax$ и ее графика для установления значения коэффициента a можно предложить ученикам построить графики при различных значениях a. Результаты могут быть сведены на уроке в одну таблицу или на одну координатную сетку. В VIII классе вычисляются значения тригонометрических функций острых углов. В результате составляется таблица этих значений.

Значение подобного рода работ трудно переоценить, так как они приучают школьников к самостоятельности, аккуратности, к накоплению материала, разделению труда; такие работы, выполненные учениками дома, экономят время на уроке.

Практические работы. К практическим работам можно отнести различного рода самостоятельные работы по непосредственным измерениям и вычислениям.

Значительное место в этих работах должны занимать работы с раздаточным материалом, в частности по геометрии. Так, в V классе при изучении геометрического материала полезно использовать наборы моделей прямоугольных фигур, изготовленные из целлулоида или плексигласа (многие школы используют для изготовления таких моделей помощь родителей-производственников или шефов).

Учитель должен занумеровать эти фигуры и иметь таблицу с записями размеров каждой из них.

Вначале эти размеры могут быть установлены учениками одного из старших классов, но проверены учителем. Учащимся пятых классов раздаются модели фигур (например, прямоугольники) и предлагается тщательно произвести измерения сторон с заданной точностью (до 1 *мм*, до 0,5 *мм*) и вычислить периметр, а затем площадь.

Пользуясь своей таблицей, учитель в состоянии быстро проверить результаты.

Такие же наборы параллелепипедов, изготовленных из легкого металла, целлулоида или плексигласа, следует иметь и для практических работ по определению площадей поверхностей и объемов.

Подобные работы по непосредственным измерениям можно проводить и в VI—VIII классах: разметку деления отрезка (бруска, чистой линейки), измерение угла, сектора, вырезанного из легкого материала, измерение транверсалей треугольников.

В VII классе по теме «Площади многоугольников» следует провести работу по определению площадей фигур с помощью палеток, вычерченных на прозрачной бумаге (на кальке, восковке, пергамине).

В VIII классе программой предусмотрено вычисление поверхности и объема геометрических тел по данным, полученным путем непосредственных измерений. Для обучения навыкам этих измерений следует иметь набор однородных тел различных размеров, хотя бы из дерева, картона, стекла или жести.

Практические работы по измерению и вычислениям площади и объема тел полезно проводить не только на моделях, но и на деталях машин, имеющих соответствующие формы. В процессе такой работы ученики восьмилетней школы знакомятся с различными деталями, с их формой и названиями (гайка, шайба, втулка, подшипник и др.).

Надо требовать от учащихся возможно более точных измерений и вычислений с заданной точностью, имея в виду, что учащиеся VIII класса уже знакомы с приемами приближенных вычислений. К тому же восьмиклассники должны свободно пользоваться приборами для более точных измерений — штангенциркулем, высотомером, нутромером и т. д.

Следует отметить, что опыт работы многих учителей с использованием раздаточного материала не только свидетельствует о возможности широко проводить лабораторно-практические занятия с учащимися, но и указывает на заметный эффект в результатах этих занятий.

Весьма полезными и в то же время увлекающими учеников VI—VIII классов могут служить практические работы по графическому решению треугольников с помощью простейших номограмм и приборов.

Организация этих работ подробно, с большим мастерством описана в книге проф. П. А. Компанийца «Простейшие графические расчеты»[1]. Учащиеся охотно выполняют измерительные работы на местности, если эти работы организованы продуманны и серьезны (см. ч. IV, § 10).

§ 15. Работа с учебником

Умение работать с книгой приобретает исключительное значение в свете задач, поставленных перестройкой школы: всемерно активизировать обучение, прививать учащимся навыки самостоятельной работы над материалом, со справочниками и таблицами.

Научить пользоваться математической книгой — это не только научить пользоваться учебником и задачником, но и выполнить еще одну задачу — подготовить учащихся к чтению технических книг. Технические книги пишутся языком, близким к языку математических книг,— лаконично, с использованием буквенной символики, со ссылками на различного вида формулы; в технических книгах можно часто встретить обоснования, изложенные дедуктивным методом; текст в них обычно связан с чертежами, графиками, таблицами. Таким образом, навыки в чтении математической книги приобретают особое значение в свете задач политехнического обучения.

Приходится отметить, что немногие учителя уделяют внимание развитию этих навыков и нередко ученики работают с учебными книгами без всякого руководства и указаний.

Выбор приема обучения работе с книгой зависит от возраста школьников и от характера книги.

Ученики I—IV классов изучают начальные сведения по математике преимущественно на уроке вместе с учителем. Они занимаются главным образом решением задач и примеров, рассматривать вопросы теории им почти не приходится.

В V классе ученики для изучения арифметики получают на руки две книги — учебник и задачник. Но они еще не умеют ими пользоваться. Поэтому на первых же уроках арифметики им полезно рассказать, что значит изучать материал по учебнику: 1) прежде всего надо найти нужный параграф и, прочитав его, точно уяснить, о чем идет речь в нем; 2) разобраться и понять все объяснения, выводы, правила из этого параграфа; 3) уметь объяснить правила своими словами, а если надо, выучить их наизусть; 4) разобрать, в каком случае новое правило применяется, научиться применять правило при решении задач; 5) запомнить новые математические названия (термины) и символы, встретившиеся в объяснениях, и знать их значение.

[1] См. [154], гл. V.

Некоторые учителя организуют в V классе с первых же дней занятий математикой запись всех новых терминов в словарики, а иногда записываются в словарики и новые правила. Ведение словарика математических терминов имеет большое значение: записи терминов в некоторой степени обеспечивают грамотное написание их и содействуют запоминанию.

Запись в словарики правил рекомендовать нельзя, это отнимает много времени, а кроме того, вырабатывает неправильное отношение к учебнику — дети начинают пренебрегать им. Ведение же словариков с математическими терминами желательно продолжать на протяжении всех лет обучения.

В V классе учитель должен постепенно научить учащихся пользоваться учебником и задачником: отыскивать нужный материал по оглавлению, выделять самое необходимое из текста, в частности выводы правил и объяснения, уметь найти нужные упражнения в задачнике, понимать, для чего даны ответы на задачи и когда к ним обращаться.

Для привития этих навыков следует в классе прочитывать нужное место по учебнику, выделять в нем главное, существенное, отделять его от второстепенного, разбирать данные в учебнике выводы, приведенные примеры.

В VI классе ученики начинают изучать геометрию, а затем и алгебру. В работе с книгой возникают новые задачи: надо показать, как пользоваться чертежом, как отыскивать теоремы, на которые делается ссылка при доказательствах; надо показать, как делать чертеж соответственно условию геометрической задачи; как проверить себя, усвоена ли теорема; как пользоваться справочниками — таблицами умножения О'Рурка или М. В. Яковкина. В работе с учебником алгебры надо показать, как отыскивать обоснования для вывода новых формул, как схематично записывать в тетради условия задач из задачника, как пользоваться ответами и как поступать, если ответы не совпадают с полученными при решении задачи.

В следующих классах работа с учебной книгой продолжается в этом же направлении, с некоторыми усложнениями.

Учебник по математике в основном служит для закрепления знаний, полученных на уроках в классе. Но он может быть и источником новых знаний. В отдельных случаях, когда учитель предпочитает доказать какую-либо теорему иначе, чем она доказана в учебнике, естественно предложить ученикам самостоятельно разобрать доказательство, приведенное в книге. В VI—VIII классах восьмилетней школы разбор некоторых выводов или доказательств может быть задан ученикам и в качестве самостоятельной работы; чаще всего это может касаться случаев, подобных тем, которые уже разобраны в классе.

Примеры. Учитель в классе совместно с учениками разбирает доказательство теоремы об измерении вписанного угла,

а дома предлагает им разобрать доказательство теоремы об измерении угла, образованного хордой и касательной. В классе разобран вывод формулы куба суммы двух чисел, а дома ученики могут без затруднений сделать вывод формулы куба разности двух чисел самостоятельно или с помощью книги.

Некоторые учителя в отдельных случаях применяют такой прием: после разбора нового материала в классе тотчас же предлагают ученикам прочитать соответствующее место по книге, при этом выяснить, что из разобранного или изложенного в книге им непонятно и затрудняет их.

Изредка полезно в качестве домашнего задания предложить ученикам письменно изложить доказательство какой-либо теоремы (или решить задачу на доказательство или вычисление) со ссылками на параграфы учебников, содержащих положения, использованные при доказательстве (или при решении задачи).

Такая работа заставляет учащихся еще раз посмотреть нужное место в учебнике, повторить формулировки нужных аксиом, теорем, следствий и т. д.

Во многих случаях учебник является единственным источником знаний для школьников, например: в случае пропуска занятий или отсутствия записей объяснений учителя в тетради или при подготовке к экзаменам. С этим надо считаться, и потому часто уклоняться от приемов изложения материала, принятых в учебнике, не рекомендуется.

Следует организовать классную и домашнюю работу со справочниками и с различного рода таблицами. Навык в пользовании ими приобретает в свете политехнического обучения особо важное значение, и потому надо возможно чаще предлагать ученикам такие задачи, которые требуют обращения к этим источникам. Надо ученикам прививать «вкус» к использованию справочников.

Обычно ученики очень редко обращаются к таблицам при подсчете длины окружности, площади круга, квадрата числа, затрачивая на эти подсчеты время и энергию.

Немаловажную роль играет в обучении математике детей и *книга для внеклассного чтения*. Чтение таких книг по математике расширяет кругозор ученика, часто может увлечь его и вызвать повышение интереса к математике, нередко помогает значительно лучше понять учебный материал.

ГЛАВА III

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

§ 16. Организация урока

За многие прошедшие годы педагогической практики выработалась определенная структура урока, состоящая из четырех элементов: опроса, изложения нового материала, закрепления, домашнего задания. Сложившаяся структура урока, рассматриваемая как обязательная, сковывала инициативу учителя. Старые формы работы оказались недостаточно гибкими для решения новых задач обучения, осуществления связи школы с жизнью, развития навыков самостоятельности и творческой инициативы учащихся и требовали значительного расширения. Анализ учебного процесса многих школ показал, что около 50% всего учебного времени учитель тратил на выполнение контрольных функций. Действительно, на уроке проверка домашнего задания и опрос занимали 20—25 минут. Трудно организовать эту часть урока так, чтобы она имела достаточное обучающее значение для всех учеников класса. Во время проверки домашнего задания и опроса активны лишь те ученики, которые опрашиваются. В оставшееся от этой части урока время учитель вынужден был торопливо объяснять новый материал. Роль ученика при этом сводилась к пассивному восприятию материала. Основная тяжесть усвоения нового материала переносилась на самостоятельную домашнюю работу и была посильна далеко не всем ученикам. Пассивные формы работы преобладали на уроках и при выполнении упражнений (преобладал вызов к доске). На этих уроках работали преимущественно ученики, вызванные к доске.

Последние годы ознаменовались значительными сдвигами в повышении эффективности урока за счет усовершенствования методов работы и организации учебного процесса. Структура урока стала определяться содержанием урока, его целями, воз-

растными особенностями учащихся. Так, если урок посвящается изучению нового вопроса, требующего много времени (например, формула Герона в курсе геометрии VIII класса), может быть использована указанная выше структура урока, состоящая из четырех элементов. Но если урок имеет целью выработать у учеников навыки в решении примеров по определенному разделу программы, то на уроке будут чередоваться следующие виды деятельности учащихся: работа у классной доски, самостоятельная работа, комментирование решений с мест, устные упражнения.

Опыт показывает, что в восьмилетней школе в силу возрастных особенностей учащихся более эффективны те уроки, которые содержат в себе различные виды деятельности. В связи с этим учителя стали вносить большое разнообразие в организационные формы урока, используя различные виды самостоятельных работ. Учителя стремятся учебный процесс организовать так, чтобы на протяжении всех 45 минут ученик был занят работой. Поэтому с начала урока стремятся сразу весь класс включить в работу. Например, урок можно начать с письменной самостоятельной работы, аналогичной заданной на предыдущем уроке на дом, что позволяет выяснить, как ученики работали дома. Иногда учитель предлагает в начале урока изучить по учебнику новый материал или повторить старый, который понадобится для изучения новой темы. После окончания этой работы вызывается один из учеников, которому задаются вопросы по прочитанному его товарищами (по вызову учителя) и самим учителем. Затем учитель разъясняет те места текста, которые вызвали затруднение. В начале урока можно дать и диктант. Приведем пример такого диктанта для VI класса: 1) постройте треугольник ABC, 2) постройте биссектрису угла A, 3) постройте проекцию биссектрисы угла A на сторону AC и т. п.

Можно начинать объяснение нового материала с беседы. Чтобы ученики более активно участвовали в ней, проводится подготовительная работа, заключающаяся в изучении некоторых вопросов по учебнику или в решении задач, фронтальном опросе и т. д. Особенно активны ученики, когда новый материал изучается с помощью лабораторной работы.

Закрепление знаний организуется так, чтобы максимально развивалась самостоятельность и активность учащихся. С этой целью им предлагают самостоятельные, творческие, лабораторные работы, математические диктанты.

После демонстрации на классной доске одного-двух примеров ученикам поручается самостоятельно решить аналогичные.

Материал для самостоятельной работы записывается на классной доске обычно в двух вариантах, дается по задачнику или учебнику, а иногда на карточках или сообщается устно.

Во время самостоятельной работы учитель следит за ходом работы учеников, дает им указания и выявляет пробелы в их знаниях. Обнаружив пробелы в знаниях отдельных учеников, учитель подбирает для них соответствующие индивидуальные задания из учебника, задачника или записывает их на карточках. Таким образом, самостоятельные работы позволяют своевременно оказать учащимся помощь и в некоторой мере предотвратить их отставание. При выполнении самостоятельной работы первым двум-трем ученикам, выполнившим работу, ставится оценка. Это стимулирует интенсивную работу учащихся.

Организуя урок, учитель должен позаботиться о развитии учеников, проявивших особый интерес к предмету. Для них составляются индивидуальные задания, связанные с работой всего класса, значительно расширяющие их знания. Иногда предлагаются задачи, не требующие больших вычислений и рассчитанные на сообразительность и находчивость.

Следует помнить, что уроки, построенные на каком-либо одном виде упражнений, утомляют учеников своим однообразием. Поэтому, например, решение задач следует чередовать с решением примеров.

Целесообразно иногда объявлять план урока, обращая внимание учеников на то, что после решения определенного количества задач последует самостоятельная или проверочная работа.

Некоторые учителя успешно готовят учеников к выполнению самостоятельных работ, используя комментирование решений примеров и задач. Чтобы составить представление о комментировании с мест, рассмотрим решение примера на все действия над обыкновенными дробями в V классе. Учитель на классной доске пишет пример. С помощью учащихся намечается наиболее рациональный порядок действий. Действия нумеруются в порядке их выполнения. Затем учитель называет фамилию ученика, которому поручает выполнение первого действия. Ученик, сидя за партой. сначала формулирует правило, которое он применит, затем говорит слово «пишу» и далее называет те числа, которые пишет, и действия, которыми они связываются. После того как ученик выполнит некоторую часть решения, комментирование поручается другому ученику. Для комментирования вызываются чаще средне- и слабоуспевающие ученики.

При комментированном выполнении упражнений экономится время, так как ученик освобождается от необходимости вставать с места и выходить к классной доске. Несомненно, при комментировании развиваются внимание и речь учащихся.

Большое значение при закреплении знаний имеют устные упражнения. Упражнения для устного выполнения произносят-

ся учителем или предлагаются с помощью заранее заготовленных таблиц, плакатов или диапозитивов. Ученики V—VI классов с большим интересом выполняют устные контрольные работы, организация которых может быть весьма разнообразна.

Большое творчество и изобретательность проявляют учителя, отыскивая новые формы работы. На уроках в V—VI классах иногда используют игровой элемент: проводят викторины, организуют игры в математическое лото и т. п.

На уроке учитель должен уделять 5—6 минут на повторение ранее изученного материала. Повторять нужно не только те вопросы программы, которые непосредственно связаны с темой урока. Материал, связанный с темой урока, обычно повторяется в начале урока, а материал, не имеющий непосредственного отношения к теме, повторяется в конце урока.

Для того чтобы экономно использовать время урока, на классной доске и на специальных переносных досках перед уроком записывается материал для различных упражнений. Если упражнения для самостоятельной работы взяты не из школьного задачника, то они заранее пишутся на карточках и перед уроком раскладываются на партах учеников. Брать эти карточки ученикам разрешается только по указанию учителя. Учительница задонской школы Липецкой области В. Н. Провоторова утверждает, что на каждом уроке она таким образом экономит 5—6 минут, а в течение года — 17—20 уроков.

Желательно, чтобы проверка домашней работы носила обучающий характер. Так, например, предлагается теорему, заданную на дом, доказать на видоизмененном чертеже, вывести формулу при других обозначениях величин, решить задачу с новыми числовыми данными и т. д. Чтобы выяснить, насколько самостоятельно выполнено домашнее задание, иногда учителя проводят проверочные работы, содержание которых аналогично содержанию домашней работы. На первом этапе изучения темы обычно проверка упражнений выполняется полностью. В период закрепления знаний делается выборочная проверка.

Если ученики не справились с задачей, заданной на дом, не следует эту задачу решать в классе. Нужно к решению дать указание и предложить снова эту задачу решить дома. Это предупреждает стремление некоторых учеников «увильнуть» от работы дома в надежде на то, что домашнее задание будет выполняться в классе.

Для повышения эффективности урока иногда поручается такое домашнее задание, выполнив которое, ученики смогут под руководством учителя найти новую для них закономерность. Например, ученикам поручается дома решить задачу:

«Дан $\angle ABC=75°$. Через точку $Д$, взятую вне угла ABC, проведены прямые, соответственно параллельные сторонам угла ABC. Найти величину каждого из углов, образованных данными пересекающимися прямыми». В этом случае урок начинается с проверки домашней работы. Решение этой задачи позволяет ученикам самим сформулировать и доказать теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

Оценка знаний учащихся осуществляется с помощью фронтального опроса и опроса отдельных учащихся у классной доски. Учащиеся должны учиться излагать доказательства теорем, демонстрировать умение обосновывать решения примеров и задач. Во время ответа ученика у доски его соклассники обязаны исправлять допущенные ошибки. Это заставляет их внимательно слушать, анализировать и высказывать свое мнение.

Однако на опрос учеников не на каждом уроке отводится специальное время. Многие учителя стремятся объединить проверку с процессом сообщения новых знаний. Учитель на протяжении всего урока обращается поочередно к заранее намеченной группе учеников с вопросами при объяснении нового материала, при закреплении, выполнении самостоятельных работ и т. д. В результате в конце урока этим ученикам выставляется так называемый *поурочный балл*. При такой оценке знаний внимание учащихся остается сосредоточенным на протяжении всего урока, так как каждому из них в любой момент может быть задан вопрос.

При вызове ученика к доске общая оценка выставляется в конце урока с учетом качества работы в течение всего урока.

Приведем *план урока* по изучению нового материала в VI классе.

Тема: «Формула произведения разности двух чисел на их сумму» (2-я школа г. Задонска Липецкой области, 8 апреля 1962 г.).

1. Математический диктант. (Напишите сумму чисел a и b; разность чисел a и b; сумму квадратов чисел a и b и т. д.)

2. Чтение алгебраических выражений, заранее написанных на классной доске: m^2; n^2; $2mn$; n^2-m^2; $(n-m)^2$; $3mn$.

3. Вывод формулы произведения разности двух чисел на их сумму:

а) комментированное решение примеров: $(a+b)(a-b)$; $(m+n)\times(m-n)$;

б) чтение левых и правых частей полученных равенств;

в) самостоятельная формулировка учениками правила произведения суммы двух чисел на их разность.

4. Закрепление изученной формулы:

а) комментированное решение примеров, заранее написанных на

доске: $(0{,}1a+1)(0{,}1a-1)$; $(0{,}4x^3+a)\left(\frac{2}{5}x^3-a\right)$; $(3x+5)(3x-5)-$ $-(9x^2+6x)+30=29$;

б) самостоятельная работа по задачнику П. А. Ларичева (вариант 1 — 487, 491; вариант 2 — 488, 481);

г) применение изученного материала к упрощению устных вычислений ($20\cdot 18$; $22\cdot 18$; $32\cdot 28$ и т. д.);

г) устное решение примеров: $\left(\frac{3}{4}a+1\right)\left(\frac{3}{4}a-1\right)$;

$$(0{,}2+c^2)(0{,}2-c^2);\ -\left(\frac{3}{5}n-m\right)\left(m-\frac{3}{5}n\right).$$

5. Викторина «Знаешь ли ты?».

6. Проверка домашней работы (учащимся предлагается задача, аналогичная заданной на дом).

7. Повторение материала, не связанного с темой урока (сложение и вычитание многочленов).

8. Домашнее задание.

В начале урока ученики были подготовлены к самостоятельному выводу формулы. Все виды их деятельности имели целью сознательное и прочное усвоение нового материала. Этому способствовало разнообразие упражнений, применяемых в процессе обучения. Благодаря разнообразию форм работы у учеников не ослабел интерес к работе на протяжении всего урока. На уроке было разумно организовано чередование устных и письменных упражнений с введением игрового элемента.

В младших классах более разнообразными должны быть формы работы. Однако следует помнить, что чрезмерно частая смена форм работы не способствует созданию у детей сосредоточенного внимания.

В VII и VIII классах комментирование решений с места используется меньше и само комментирование проходит более лаконично, чем в V и VI классах. Ученики старшего возраста более склонны к самостоятельной работе, чем ученики младших классов. Игровой элемент в VII и VIII классах используется значительно реже. Вновь сформулированное предложение в V—VI классах нужно заставить повторить несколько раз. В VII и VIII классах этого делать не нужно.

Темп урока должен быть таким, чтобы ученик имел возможность осмыслить материал, метод решения задачи. Учитель должен постепенно приучать учеников работать интенсивно.

Широкое распространение в VII—VIII классах получили *обзорные уроки*. После изучения темы по определенному плану повторяется ее содержание. Повторение имеет целью углубить знания учащихся, сделать ряд обобщений, сопоставлений. Так, после изучения темы «Четырехугольники» в VII классе организуется обзорный урок. Оборудование урока: чертежные

инструменты, чертежи изученных четырехугольников, схема классификации четырехугольников. Основной метод ведения урока — беседа, которая организована, например, по следующему плану:

1) Какую тему по геометрии мы изучили?

2) С какими четырехугольниками познакомились?

3) По какому плану изучали параллелограмм? (Построение, определение, свойства, признаки.)

4) Как можно построить параллелограмм? (Учащийся выходит к доске и строит параллелограмм.)

5) Перечислить свойства параллелограмма и доказать одно из них. (Учащиеся, не выходя к доске, по чертежу, имеющемуся на классной доске, доказывают свойства диагоналей параллелограмма.)

6) Перечислить признаки параллелограмма и доказать один из них.

7) Что называется ромбом и каковы его свойства?

8) Что называется прямоугольником и каковы его свойства?

9) Что общего между квадратом и ромбом и в чем различие?

10) Что общего между прямоугольником и ромбом и в чем различие?

11) Какое понятие шире: параллелограмм или прямоугольник? квадрат или прямоугольник? ромб или квадрат?

Затем под руководством учителя строится схема классификации четырехугольников и вывешивается плакат с изображением этой схемы. Далее решаются задачи на доказательство на готовых чертежах и задачи на вычисление.

При проведении обзорных уроков могут быть использованы некоторые из имеющихся кинофильмов. Так, например, на обзорном уроке в VIII классе по теме «Функции» можно использовать кинофильм «Система координат и простейшие графики».

Каждый ученик в течение всего урока должен продуктивно работать, учиться самостоятельно мыслить и приобретать навыки применения полученных знаний к решению практических задач.

§ 17. Подготовка учителя к уроку

До 1956 г. от учителя требовалось представление годового календарного плана. Теперь от учителя не требуют представлять такой план, но составлять его особенно малоопытному учителю рекомендуется.

Рабочий план желательно составлять на всю тему с распределением материала по урокам, с указанием вопросов теории и практических работ, наглядных пособий.

Составлять рабочий план на урок надо с учетом того, что фактически выполнено по тематическому рабочему плану на предыдущих уроках, с учетом особенностей каждого класса.

Содержание рабочего плана может быть определено следующим косвенным требованием: рабочий план должен быть таким, чтобы в случае замены учителя его заместитель мог, пользуясь планом, точно выполнить на уроке задуманную учителем работу. Никакой обязательной схемы плана нет, и учителю предоставляется составлять его по своему усмотрению.

Желательно, чтобы в план урока было включено следующее:

1) указание темы урока; 2) как будет проверено домашнее задание; 3) кто из учеников будет спрошен; 4) какая самостоятельная работа будет дана классу и в какой момент (на время подготовки к ответу вызванных к доске, в порядке подготовки к разбору нового материала или после объяснения нового материала для закрепления его и т. п.); 5) план или конспект изложения нового материала, формулировки, определения, правила, которые будут продиктованы; 6) перечень материала, предложенного для закрепления нового материала; 7) перечень материала домашнего задания с указаниями для учеников; 8) заметки о том, какие записи будут сделаны на доске, какие наглядные пособия будут использованы и в какой момент.

Содержание каждого урока должно быть продумано, и спланированный урок проведен так, чтобы ученики обогатились новыми знаниями. Полезно на каждом уроке подводить с учениками итог проделанной работы для того, чтобы каждый из них мог отдать себе отчет, что нового он узнал на уроке из теории или из приемов решения задач и упражнений.

Приводим образец рабочего плана урока.

План урока в VI классе.

Тема «Преобразование суммы многочленов».

I. Повторение. Вопросы к классу: а) Когда многочлен считается приведенным к нормальному виду? б) Какие одночлены считаются подобными? в) В чем состоит приведение подобных членов?

Самостоятельная работа (тексты даются в двух вариантах, заранее написанных на переносной доске).

1 вариант. а) Привести многочлены к нормальному виду:

$$5a^6b^2-2ab^2\cdot 3b^2-2(a^2)^3b^2+8ab^5;$$

$$0{,}2a^2b-0{,}3ab^2+7a^2b-10ab^2-1{,}5a^2b+1{,}8ab^2;$$

б) Решить уравнение $2x^2+21x-5+3x-2x^2=19;$

II. Новый материал (объяснения учителя).

На примерах суммы многочленов:

а) $(x^2+3-2xy)$ и $(1+2xy-x^2)$;

б) $(3a^2b+3ab^2-12)$; $(16-2a^2b-ab^2)$ и $(-4a^2b+ab^2-10)$

показать, что сумма многочленов только обозначается, а полученное выражение упрощается по правилу прибавления алгебраической суммы чисел. Таким образом, упрощение сводится к открытию скобок, перед которыми стоит знак плюс.

Самостоятельные упражнения в тетрадях.

1. Записать суммы многочленов:

а) $8a^2-1{,}6b+3$ и $2{,}4b-9a^2-1$;

б) $0{,}12x^2y^3+1{,}5x^3y^2-20$; $x^4y^3+3{,}5x^3y^2-36$ и $-0{,}12x^4y^3-3{,}8x^3y^2+60$.

2. Раскрыть скобки и привести результат к нормальному виду:

$$(2x^3y+27-x^3)+(-7x^3y+2x^3+3).$$

В процессе работы проверить знания и работу учащихся К., П., М, Р. и Д. и выставить им поурочные баллы.

III. Домашнее задание: 1) Сделать 3 примера из задачника на упрощение суммы многочленов. 2) Вычислить сумму многочленов при $a=-2{,}5$: $(-a+2a^2-1)$, $(-4a^2-3a+1)$ и $(2a^2+6a+2)$ [1].

Примечание Тексты задач могут и не приводиться в плане. Если используются задачи из задачника, тогда достаточно указать номера упражнений.

Составление календарного плана и рабочих поурочных планов требует от учителя отличного знания программ, учебника и задачников. Учитель должен быть знаком с освещением вопросов темы в науке и с методической литературой вопроса. Только при этих условиях он может избежать ошибок как чисто математических, так и методических.

Полезно перед составлением рабочего плана по теме освежить в памяти все указанные материалы, просмотрев соответствующую литературу. Особенно это касается наиболее трудных тем: «Введение новой области чисел»; «Равносильность уравнений»; «Геометрические преобразования» и др. Хорошо продуманный план урока обеспечивает хорошее качество урока, а следовательно, и успехи учащихся. Кроме того, рабочие планы уроков — это тот материал, который учитель должен накапливать и который облегчит ему труд в будущем.

---

[1] Нами употребляется несколько иная терминология в отношении преобразований алгебраических выражений, чем это имеет место в действующем учебнике Подробнее см. ч III, § 9.

§ 18. Повторение пройденного материала

Повторение пройденного материала служит для освежения в памяти приобретенных ранее знаний, помогает привести эти знания в более стройную систему и взглянуть на пройденный материал с более общей точки зрения.

Сам предмет математики таков, что на каждом уроке приходится обращаться к старому материалу, так как в математике каждый новый вопрос опирается на ранее рассмотренное, доказанное. Так, решая уравнение в VI классе, мы вспоминаем зависимость между компонентами действий.

Некоторые вопросы курса следует повторять многократно, связывая материал с текущей темой. Например, действия над целыми и дробными числами (положительными и отрицательными) следует повторять при изучении всех тождественных преобразований многочленов, алгебраических дробей (в старших классах — степеней, радикалов при решении уравнений и т. д.). Преобразование многочленов следует сопровождать нахождением численной величины заданного выражения при различных численных значениях букв. Эти вычисления помогут ученикам понять значение предварительных упрощений заданного выражения и повторить вычислительные операции.

Примеры. Вычислить:

1. $m^3-m^2n-2mn^2+2n^3$ при $m=2{,}5$; $n=0{,}7$;

2. $(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ при любом выбранном значении $x\neq\pm1$;

3. $\frac{3ab-2a^2}{6b^2}-\frac{8a^2b-6b^2+3ab}{9a^2b}+\frac{6a^2-ab}{18b^2}$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$;

4. $y=\frac{1}{4}(16x^4-72x^2+81)$ при значениях

x	$-1{,}5$	-1	0	1	$1{,}5$	2
y						

Часто повторение ранее пройденного материала, необходимого для усвоения нового, учитель ведет параллельно с разбором нового, иногда предлагает самим ученикам повторить старый материал к тому уроку, на котором он будет использован.

Так, к изучению темы «Вписанный угол и его измерение» учитель предлагает повторить определение угла, определение центрального угла, его измерение, свойство углов при основании равнобедренного треугольника, какой угол называется внешним углом треугольника, свойство такого угла. На уроке, помимо проверки этих вопросов, предлагаются еще контрольные вопросы, например: почему нельзя говорить «центральный угол равен соответствующей дуге»?

Такая повторительная работа нужна и полезна. Но она не может охватить всего того материала, который необходимо повторить.

Поэтому желательно, чтобы учитель, кроме того, вел повторение в течение всего года по определенному плану. При этом нет необходимости повторять все пройденное.

Полезно выделить наиболее важные темы или вопросы из пройденного и спланировать повторение этого материала во времени.

В этом случае ученики получают домашнее задание по текущему материалу и по старому, причем последнее может даваться на определенный срок (5—8 дней). В задание следует включать как теоремы, так и упражнения. Эти задания ученики должны выполнять в отдельной тетради.

При опросе учащихся следует включать в карточку и вопросы повторения, сформулированные так, чтобы было можно проверить сознательность усвоения ими материала, умение приложить знания к решению несложных новых вопросов, связанных с повторением.

Хорошо, когда учитель, планируя повторение, обдумает и наметит ряд основных вопросов. При повторении пройденного материала очень полезны обобщающие или обзорные уроки по теме.

Приводим примерный схематический план повторения темы «Функции и графики» (VIII класс).

1. Повторяется определение функции и виды изучаемых функций (приводятся примеры), способы выражения функции: табличный, графический и аналитический; выясняются преимущества и недостатки каждого из них (задается соответствующий вопрос классу, а отвечают вызванные ученики с места). Выясняется, в каком случае квадратичная функция имеет наибольшее значение, в каком наименьшее (показать на графике); чем определяются по графику корни функции; как по графику определить изменения функции. Ответы на некоторые из этих вопросов ученики могут дать на схематически вычерченном графике от руки.

2. Повторяется построение графиков функций: $y=2x-3$ и $y=(x-2)^2-3$. (Вызываются ученики к доске; они рассказывают порядок построения сначала первого графика, затем вто-

рого. Вопросы к классу помогут выяснить значение параметров и положение линий графиков в различных случаях.)

3. Подводится итог: практическое значение графиков, возможность решения уравнения с помощью графика. (Учитель использует построенные учениками графики для решения уравнений.)

$$2x - 3 = 0;$$
$$(x - 2)^2 - 3 = 0.$$

Некоторые учителя дают в порядке повторения даже небольшие «сочинения» по определенному плану, в которых ученикам предлагается изложить, что они знают по данному вопросу.

Хорошим сборником задач для повторения может служить книга К. С. Богушевского и К. П. Сикорского [1].

Интересным и эффективным приемом повторения обобщающего характера является решение целесообразно подобранных задач (идея, выдвинутая известным русским методистом С. И. Шохор-Троцким) [2].

Почти для каждой темы школьного курса математики можно подобрать такие задачи, при решении которых будет повторен пройденный материал.

Эти задачи должны иметь комплексный характер: в геометрии задача должна требовать применения сравнительно большого числа известных ученикам теорем, алгебраическая задача должна требовать составления такого уравнения, которое включало бы сравнительно большое число преобразований алгебраических выражений.

При этом имеются в виду не те задачи из «смешанных отделов» старых задачников, в которых не соблюдалась система повторения пройденного и в которые включался материал различных разделов, но в чисто механической связи, да еще к тому же часто рассчитанный на догадки и повышенную сообразительность.

При составлении комплексных задач на повторение надо стремиться к тому, чтобы само решение требовало привлечения и использования пройденных теорем, формул, правил, а условие задачи не было бы надуманным, и было достаточно простым для понимания. Особенно ценными являются задачи, имеющие несколько приемов решений. Такие задачи вызывают особый интерес у учащихся и стимулируют их к поиску самостоятельных оригинальных решений. В отдельных случаях учитель может дать некоторые указания по решению задачи.

---

[1] См. [130].

[2] См. статьи И. Я. Депмана и П. Я. Великиной, «Математика в школе», 1962, № 1.

§ 19. Устные упражнения на уроках математики

Еще в недалеком прошлом устные упражнения в школе сводились почти исключительно к устному счету. За последние годы в советской школе все более и более расширяется круг устных упражнений по всем разделам школьного курса математики. Значительно расширились и цели проведения устных упражнений. Если раньше единственной целью было натренировать учеников в быстрых вычислениях, то теперь эта тренировка является только одной из задач «работы в уме».

Каково же значение практикуемых теперь разнообразных устных упражнений?

Прежде всего устные упражнения способствуют повышению общего уровня математического образования и сознательному усвоению школьного курса. Эти упражнения являются одним из средств борьбы с формализмом.

Устные упражнения развивают у учеников навык быстро выделять из известных им законов, формул, теорем те, которые следует применить для решения предложенных или возникших в практике задач, расчетов и вычислений.

Устные упражнения содействуют развитию памяти, развивают способность зрительного восприятия математических фактов, совершенствуют пространственное воображение.

Устные упражнения имеют огромное значение и с чисто воспитательной точки зрения: они повышают внимательность, развивают сообразительность, находчивость, творческую инициативу. Особое значение имеет и то, что устные упражнения повышают темп работы, требуют отыскания наиболее рациональных приемов решения предложенных задач, содействуют развитию устной речи, лаконической и четкой.

Устные упражнения становятся действенными только в том случае, если они проводятся систематически, а не от случая к случаю.

Методика проведения устных упражнений может быть весьма разнообразной, при этом необходимо, чтобы учитель соблюдал следующие требования:

1. Упражнения подбирать не случайно, а обдуманно и целенаправленно:

а) для уточнения вводимых новых понятий, терминов, для лучшего уяснения вновь устанавливаемых законов, зависимостей, взаимных положений геометрических объектов;

б) для тренировки в логических рассуждениях, в обосновании своих суждений, заключений, в частности, при доказательстве теорем;

в) для развития пространственного воображения;

г) для развития навыков вычислительного характера;

д) для повторения и закрепления в памяти пройденного.

2. Вопросы и материал для упражнений не должны быть шаблонными и повторяться в одном и том же виде или форме, не должны быть слишком легкими, но и не должны быть излишне громоздкими, сложными по своей конструкции, с длинными формулировками задач и с большим количеством данных.

3. Упражнять и приучать к расчетам в уме не только в специально отведенное для этого время (5—10 минут), а постоянно требовать от учеников выполнения всех несложных вычислений без записей.

4. Тексты упражнений, если они требуют записи, и чертежи следует заготовлять заранее на доске, на плакатах, в таблицах и т. д.

5. К устным упражнениям важно привлечь всех учеников класса, и потому, узнав ответ от одного ученика, учитель должен, не оценивая его, проверить, какие ответы и объяснения дадут другие ученики, особенно часто обращаясь к наиболее пассивным.

В заключение учителем должен быть назван верный ответ и указано, в чем ошибка учеников, получивших неверные ответы (замечания об ошибках могут давать и учащиеся).

6. Выполнение учениками устных упражнений должно учитываться учителем и оцениваться по совокупности ответов одного ученика за несколько раз.

К учащимся должны быть предъявлены следующие требования.

1. Работа ученика во время устных упражнений должна проводиться без записей и зарисовок; из книг можно пользоваться только таблицами-справочниками.

2. Ученики должны выполнять работу в установленное время и ценить время.

3. Решившие задачу должны молчать, подав учителю установленный им знак. При вызове к ответу ученик должен уметь дать краткое пояснение, как получен им ответ.

4. При выполнении заданного упражнения в уме важно добиваться от ученика наиболее рациональных приемов решения поставленной задачи.

В качестве иллюстрации характера устных упражнений приводим несколько примеров.

По алгебре.

1. Решить уравнение $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-3}{3}=2$.

2. Упростить: а) $\frac{x-y}{10}:\frac{x^2-y^2}{5}$; б) $\frac{a-1}{a}:\frac{2a-2}{b}$.

3. Доказать, что разность между квадратом натурального числа и самим числом делится на 2.

По геометрии.

1. Длины двух сторон треугольников 8 *см* и 5 *см*. Между какими числами заключается длина третьей стороны?

2. Найти x (рис. 27), если $\smile m = \smile n$: $\frac{\smile m}{\smile p} = \frac{2}{5}$.

По геометрии (VII класс, повторение).

1. $ABCDEK$ — правильный многоугольник (рис. 28); $AB = 4$ *см*. Найти величину AC.

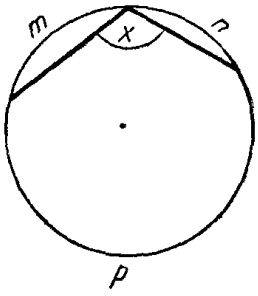


Рис. 27

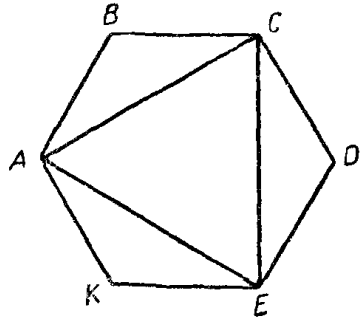


Рис. 28

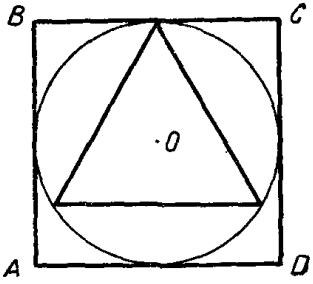


Рис. 29

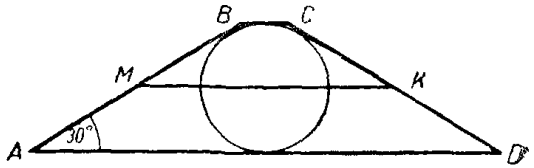


Рис. 30

2. $ABCD$ — описанный квадрат (рис. 29); $AB = 8$ *см*. Найти величину стороны вписанного в окружность правильного треугольника.

3. $ABCD$ — описанная трапеция, равнобокая (рис. 30); $MK = \frac{BC + AD}{2} = 32$ ед., $\angle A = 30°$. Найти диаметр окружности.

За последние годы издано несколько специальных сборников для устных упражнений, и, таким образом, учитель в значительной мере освобожден от необходимости самому составлять такие упражнения. Однако наличие готовых сборников не освобождает его от подбора упражнений соответственно цели, с которой он намечает эти упражнения, в зависимости от местных условий: подготовленности учащихся, наличия готовых таблиц и т. д.

§ 20. Домашние задания и проверка выполнения их

Домашние задания служат для закрепления знаний и имеют огромное значение в деле улучшения качества учебно-воспитательной работы по математике. Правильно организованные домашние задания обеспечивают прочность знаний учащихся, вырабатывают у них навык самостоятельной работы, развивают в учащихся упорство и настойчивость в работе. В программе по математике указано, что выполнение домашних заданий является обязательной работой учащихся, и отведено на каждую тему определенное время для этой работы, в среднем 40—50% времени, которое предусмотрено для работы по теме на уроках. Учитель, составляя домашнее задание, должен учитывать время, необходимое для выполнения намечаемой работы, помня, что чрезмерно большой обьем задания заставляет ученика выполнять задание наспех, списывать у товарищей. Домашние задания не должны быть чрезмерно однообразными по содержанию, в частности сводиться к выполнению однотипных упражнений; однообразность упражнений утомляет и снижает интерес к работе. В задания рекомендуется включать, кроме текущего материала, решение задач по ранее пройденным разделам программы, черчение графиков, выполнение практических работ по измерению, по изготовлению таблиц и т. д. Любое домашнее задание должно быть посильным для большинства учеников, они должны понимать смысл задания и отчетливо представлять, как выполнять его. Посильность домашнего задания органически связана с усвоением и пониманием учащимися материала, проработанного на уроке, поэтому учитель, намечая задание, должен ясно представлять. подготовлены ли ученики к выполнению его.

Давая задачи или упражнения, требующие особой сообразительности или применения искусственных приемов для решения, учитель должен предупредить об этом учеников, а иногда сделать более или менее подробные указания, помогающие понять суть предлагаемого задания. Требовать от учеников обязательного выполнения задания, рассчитанного на сообразительность, нельзя. Некоторые из школьников, даже при большом желании выполнить такое задание, с ним не справятся.

Наблюдения показывают, что многие ученики не умеют правильно готовить домашние задания по математике: заучивают наизусть теоремы и выводы, стараются запомнить буквенные обозначения, не умеют связать условие задачи с соответствующим теоретическим материалом. Отсюда заботой учителя является учить школьников выполнять задания. Полезно для этого время от времени беседовать с ними о том, как работать с учебником, как самостоятельно разбирать теоремы или выводы. Домашние задания только тогда достигают поставленной

цели, когда они своевременно проверяются учителем. Проверка письменных домашних работ часто проводится учителем путем фронтального просмотра тетрадей при «обходе» учащихся в классе. Такой прием проверки позволяет учесть только факт выполнения задания; качественную сторону работы оценить при этом трудно. Практикуется и такой прием: вызванный ученик зачитывает решение задачи или примера, указанного учителем, а к оценке решения привлекаются другие ученики, которые могут дополнять и исправлять решение. В этом случае нет надобности читать подробно решение каждого примера или задачи. Важно заранее выделить узловые вопросы, связанные с заданием, и проверку выполнения задания вести в плане разбора этих вопросов. Только в этом случае проверка домашнего задания будет сочетаться с повторением пройденного, будет помогать ученикам обосновывать свои суждения и связывать разбираемый материал с основными законами, теоремами курса. При проверке домашних заданий полезно сначала выслушать связное последовательное изложение решения задачи, а затем предлагать вопросы и делать замечания. Ученики должны быть приучены к тому, что учитель спрашивает не только поднявших руку; это заставляет всех их готовить материал к каждому уроку, прививает навык к систематической работе и воспитывает чувство ответственности.

Однако следует иметь в виду, что познавательная ценность проверки домашних заданий значительно меньше, чем решение новой задачи. Поэтому нет смысла тратить время на полное «повторное» решение домашних задач на доске. Лучше заменять такое решение самостоятельной работой для всего класса по новым, но аналогичным текстам.

Лучшим видом проверки домашних заданий является просмотр собранных тетрадей с последующими замечаниями и указаниями ошибок в них. Проверять тетради ежедневно у всех учеников невозможно, но надо делать это хотя бы выборочно: после каждого урока брать 8—10 тетрадей с таким расчетом, чтобы тетрадь каждого ученика побывала в руках учителя хотя бы раза два в месяц. При этом следует требовать от учеников исправления отмеченных ошибок; только в этом случае проверка тетрадей будет целесообразна.

Иногда при проверке следует проставлять специальную оценку за исполнение домашних работ, учитывая систематичность выполнения заданий, правильность решения всех или большинства задач, качество внешнего оформления.

Просмотр тетрадей помогает учителю выяснять, какая часть материала наиболее слабо усвоена; выявлять учеников, не работающих систематически дома, не справляющихся с теми или иными упражнениями, и вовремя принять необходимые меры, чтобы подтянуть этих учеников.

§ 21. Проверка знаний и умений учащихся

Как и в любой области работы, правильно поставленная «проверка исполнения» в учебной работе имеет огромное значение. Проверка позволяет учителю обоснованно оценить знания учащихся, своевременно обнаружить недочеты в знаниях каждого ученика, правильно оценить и свою работу. Помимо этого, проверка помогает в воспитании у учеников чувства ответственности и долга перед школьным коллективом.

Проверка знаний учащихся должна вестись систематически и продуманно. Известно, что если в течение долгого времени не проверять работу ученика, то иногда ученик перестает работать. Прежде всего необходимо проверять степень усвоения нового материала после объяснений учителя, умение учеников приложить полученные знания к решению задач. Помня, что урок должен быть обучающим, что в основном знания учащихся должны приобретаться на уроке, учителю необходимо следить на каждом уроке, достиг ли он этого. Надо проверять, как работали ученики дома и какие знания и навыки приобрели в процессе домашней работы.

Выше, при описании отдельных уроков, мы показали приемы фронтальной проверки знаний и навыков учащихся. Эта проверка проводится посредством наблюдений во время самостоятельных работ, в процессе комментирования решения различного вида задач, беглым опросом с места по заранее составленному «опроснику».

Покажем на примерах, как проводится комментированное решение задач.

Пример 1. В V классе решается пример на вычисление сложной дроби

$$\frac{123,98+11,45\cdot 0,4+5,02}{12,48:0,02-356,84}.$$

Учащимся дается минута на обдумывание, и учитель задает последовательно вопросы:

Вопросы учителя	Ответы учащихся
Л., скажите, какое выражение предлагается вычислить.	1-й ученик. Надо вычислить дробь, или, можно сказать, частное.
Укажите порядок вычисления делимого или числителя дроби.	1-й ученик. Сначала вычислю произведение, а затем найду сумму трех слагаемых. Произведение равно 4,58.
М., скажите, в каком порядке вы будете складывать числа.	2-й ученик. В порядке, указанном в примере.
Ф., а вы как стали бы складывать?	3-й ученик. Я найду сумму 1 и 3-го слагаемых, а затем к их сумме прибавлю произведение.
Назовите первую сумму и общую.	3-й ученик. Первая сумма равна 129, а общая равна 133,58.

П., укажите порядок вычисления делителя, *или знаменателя дроби.* Скажите результаты вычислений.	4-й ученик. Сначала я вычислю *частное, а затем разность чисел.*
	4-й ученик. Частное равно 624, а разность равна 267,16.
Д., скажите окончательный результат вычислений.	5-й ученик. После деления 133,58 на 267,16 получилось $\frac{1}{2}$, или 0,5.

Учитель устанавливает, что ответ дан верный.

Пример 2. В VI классе решается задача по геометрии.

Условие задачи. В равнобедренном треугольнике периметр равен 1 *дм*, причем известно, что одна из сторон вдвое меньше другой. Определить длину каждой стороны.

Вопросы учителя	Ответы учеников (с места)
Какой треугольник называется равнобедренным?	1-й ученик. Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны.
Какие же стороны сравниваются в условии?	1-й ученик. Неравные, то есть основание и боковая сторона.
Как решали задачу?	1-й ученик. Я приму длину основания треугольника за 1, тогда длина боковой стороны выразится двумя такими единицами, а периметр выразится пятью такими отрезками, как основание. Длина этих пяти отрезков равна по условию 10 *см*, то есть длина основания равна 10:5=2 (*см*), а длина боковой стороны 4 *см*.
Кто будет решать задачу иначе?	2-й ученик. Я обозначу длину основания буквой x, тогда длина боковой стороны будет равна $2x$, а сумма всех сторон $x+2x+2x=10$; $5x=10$; $x=2$ (*см*). Получается длина основания 2 *см*, а боковой стороны 4 *см*.
Удовлетворяет ли найденное решение свойствам сторон треугольника?	2-й ученик. Да, так как одна сторона в этом случае оказывается меньше суммы двух других.
Достаточно ли это условие?	2-й ученик. Оно необходимо для существования треугольника, но недостаточно. Надо, чтобы разность двух сторон была меньше третьей стороны.
Выполняется ли это требование найденным решением?	3-й ученик. Да, выполняется.
В условии указано, что именно основание вдвое меньше боковой стороны?	4-й ученик. Нет. Не указано.
А если нет, то какой случай мы должны еще рассмотреть?	4-й ученик. Случай, когда основание вдвое более боковой стороны.
Тогда какое решение получится.	4-й ученик. Длина основания 5 *см*, а боковой стороны 2,5 *см*.
Удовлетворяет ли это решение рассмотренным свойствам треугольника?	5-й ученик. Нет, так как получилось, что одна сторона равна сумме двух других.

А можно было бы в этой задаче установить это без вычислений?	5-й ученик. Да, можно. В равнобедренном треугольнике основание не может быть вдвое больше боковой стороны.

Пример 3. VII класс.
Решается уравнение

$$\frac{3x-5}{7}-2=\frac{2x-11}{3}.$$

Вопросы учителя	Ответы вызванных учащихся (с места)
С чего начнете решение уравнения?	1-й ученик. Я освобожусь от дробных членов, для этого умножу все члены на наименьшее кратное знаменателей.
Каким свойством уравнения воспользуетесь?	1-й ученик. Воспользуюсь свойством, что можно обе части уравнения умножить на одно и то же число.
Кто может уточнить указанное свойство?	2-й ученик. При умножении обеих частей уравнения на число, не равное нулю, или на выражение, не содержащее неизвестное, получается уравнение, равносильное начальному.
Какие уравнения называются равносильными?	2-й ученик. Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и каждый корень второго уравнения является корнем первого, то уравнения называются равносильными.
Какое уравнение получите после первого преобразования?	3-й ученик. $9x-15-42=14x-77$.
Каким свойством следует воспользоваться для решения полученного уравнения? Решите уравнение.	4-й ученик. Следствием из первого свойства. Получим уравнение $5x=20$, отсюда $x=4$.
Как проверить, верно ли решено уравнение?	5-й ученик. Вычислим по отдельности правую и левую части уравнения при $x=4$. Получаем равные числа по -1.

Полезно при решении задач и примеров выявлять различные варианты, различную последовательность вычислений и устанавливать наиболее рациональные пути решения задачи или вычисления. Однако не следует отвергать хотя и нерациональный путь, но верный, чтобы не лишать учащихся веры в свои силы и знания. Беглый опрос обычно проводится так. Намечается группа вопросов, включающих определения, правила, объяснения несложных выводов и доказательства теорем. Задается классу вопрос и после нескольких секунд, отведенных на обдумывание ответа, вызывается с места один ученик. К оценке его ответа (верно, неверно, достаточно ли полно, все ли обосновано или нет в ответе и т. п.) привлекается весь класс; желающие ученики могут с разрешения учителя пополнить или исправить ответ.

При беглом опросе обычно задаются вопросы, ответы на которые не требуют записей, чертежей или сложных вычислений и преобразований.

Так, например, в V классе после изучения делимости чисел полезно опросить учеников по таким вопросам:

1. Как найти все делители числа (например, 84)?
2. Какое число называется общим делителем данных чисел (12, 18) и сколько таких чисел?
3. Какое число называется кратным данным числам (например, 12; 9) и сколько таких чисел можно привести?
4. Какое число называется НОК данных чисел (например, 14 и 21) и как его найти?
5. Признак делимости на 4, объяснить его.
6. При каком условии число делится на 15?
7. Является ли необходимым для получения четной суммы условие, что каждое слагаемое должно быть четным? Привести примеры.

При всех положительных сторонах фронтальной проверки знаний учащихся нельзя недооценивать индивидуальный опрос учеников у доски. Именно при таком опросе можно проверить умение ученика последовательно изложить доказательство теоремы или вывод формулы, аргументировать свои утверждения, умение сделать правильный чертеж Надо иметь в виду, что при фронтальной проверке ученики дают по преимуществу отрывочные ответы, пользуются готовыми чертежами и т. д

Конечно, опрос у доски должен проходить организованно, продуманно, надо учить школьников при ответах и объяснениях избегать многословия, не делать лишних записей, не зачитывать тривиальных преобразований и т. п.

В практике советской школы применяются различные приемы опроса с вызовом к доске. Довольно распространенным приемом является вызов одного ученика, которому предлагают сделать вывод, доказать теорему, решить задачу; класс же слушает ответ товарища. В этом случае отвечающий лишается возможности спокойно обдумать свой ответ, подготовиться к рассказу, так как над ним стоит учитель, его нервируют нетерпеливые взгляды товарищей.

Хорошо, когда учитель заранее выделяет (при составлении рабочего плана урока) учеников, которых имеет в виду спросить, и каждому из них намечает 2—3 вопроса по текущему материалу и по повторению.

При вызове 1—2 учеников к доске каждому предлагается задание и дается время для подготовки к ответу, чтобы сделать чертеж и краткие записи на доске, следуя которым легче связно отвечать.

Пока учащиеся у доски готовятся, учитель может вести беседу с классом — провести устное решение задач, повторить

определения, формулировки теорем, даже проверить простые выводы или устное доказательство теоремы. Не рекомендуется это время использовать для разбора новых вопросов или решения задач нового для учеников вида.

Некоторые возражают против такой формы опроса, полагая вредным исключать хотя бы двух учеников из беседы учителя с классом. Однако лучше, если два ученика не будут участвовать в беседе такого рода, чем все ученики будут томиться в ожидании подготовки ответа одним учеником.

Иное дело — слушание ответа вызванных. Все ученики в это время должны слушать, а не заниматься какой-либо другой работой. После ответа вызванного ученика его одноклассникам предоставляется возможность внести свои замечания, поправки, дополнения и т. п. После установления полного и правильного ответа учитель может задать опрашиваемому следующие намеченные им вопросы, к ответам на которые уже не требуется длительной подготовки.

Иногда ученикам предоставляется право с места задавать отвечающему *дополнительные вопросы по затронутой теме Это* заставляет других учеников собрать в уме весь материал по теме. Однако надо учить учащихся задавать существенные вопросы, а для этого учитель должен при изучении с учениками темы подчеркивать наиболее принципиальные, важные стороны изучаемого материала.

Привлечение всего класса к активному участию в проверке знаний (будь то проверка домашнего задания или проверка усвоения нового материала) превращает проверку из контролирующей в обучающую, проверка становится одной из форм процесса обучения.

Во всяком случае независимо от формы опроса учитель должен заранее намегить весь материал для спрашивания, тщательно продумывая формулировку вопросов, ход решения задачи или доказательства, и не должен превращать опрос в вытягивание ответа из ученика.

В случае, если отвечающий ученик молчит, учитель иногда сам начинает ответ, а ученик только кончает его фразы или «поддакивает». Такой опрос дезориентирует учащихся, создавая впечатление, что опрашиваемый что-то отвечал, «в общем что-то знает», да и сам учитель в подобных случаях обычно не решается должным образом оценить ответ ученика, ясно указав ему на неподготовленность и незнание материала.

У ряда учителей опрос у доски организуется так. Учитель заранее заготовляет карточки с написанными вопросами по текущему и повторительному материалу. Такие карточки даются вызванным к доске 2—3 ученикам, которым предоставляется 4—6 минут для обдумывания ответа и необходимых записей на доске.

Во время их подготовки учитель ведет беседу с классом или дает классу небольшую самостоятельную работу. Затем ученики у доски излагают полностью свои ответы, а все остальные выслушивают ответ и вносят поправки и дополнения после ответа на каждый вопрос. Ответы учащихся оцениваются учителем и за них проставляются оценки в журнал и дневник.

Примерные карточки:

V класс

(Текущая тема «Обыкновенные дроби»)

1. Объяснить признак делимости на 3.
2. Разложить на простые множители 420.
3. Какая дробь называется правильной? Привести пример.

VI класс

(Текущая тема «Формулы сокращенного умножения и деления»)

1. Вывести формулу квадрата разности двух чисел. Решить пример $(3a - 8)^2$.
2. Как умножить многочлен на одночлен? Решить пример

$$\left(2a^4b^2 - a^2 + 1\frac{1}{3}\right) \cdot 4a^2b^2.$$

3. Какие числа называются противоположными? Дать определение и привести пример.

VIII класс

(Текущая тема «Квадратные уравнения»)

1. Решить уравнение $-x^2+3{,}5x-1{,}5=0$.
2. Почему для нас не имеет смысла выражение $\sqrt{-4}$?
3. Сформулировать теорему Виета.

Каковы бы ни были приемы опроса, к нему приходится предъявлять ряд обязательных требований, которые вкратце можно свести к следующему. Опрос должен:

а) иметь определенную цель, которая может быть иногда неясна ученикам, но должна осознаваться самим учителем;

б) содействовать повторению и закреплению основных положений темы и выяснить связь между теоремами, изученными законами и совершаемыми преобразованиями; расширять представления; совершенствовать умения логически рассуждать и выражать свои мысли грамотной речью;

в) развивать умение быстро ориентироваться в предложенном вопросе и давать краткие, но точные ответы;

г) развивать у учащихся внимание к формулировкам, умение оценивать правильность и полноту ответа, грамотность записей и чертежей, умение внести дополнения и исправления;

д) быть возможно более плотным во времени и четким по содержанию вопросов, которые ставятся учителем.

Исходя из этих требований, учителю следует при устном опросе (у доски, с места или при фронтальном опросе учеников) не

ограничиваться формальными ответами, а возможно чаще выяснять, насколько глубоко ученик понимает материал. Ученик может выучить формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, но не понимать, откуда взялось такое равенство. При решении уравнения он производит различные преобразования, но иногда не знает, на каком основании, и не может назвать конечную цель этих преобразований. Ученик делает ошибку в умножении смешанных чисел и получает $3\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{4}=6\frac{6}{20}$, а затем вспоминает, что сделал «не так», нужно смешанные числа заменить дробями, получим $\frac{17}{5}\cdot\frac{11}{4}=\frac{187}{20}=9\frac{7}{20}$; а почему прием умножения смешанных чисел в первом случае неправилен, не знает.

Среди общих приемов проверки знаний и умений учащихся имеют большое значение письменные работы. При помощи письменных контрольных работ охватываются проверкой все ученики класса одновременно, причем проверка производится на одном и том же материале и в равных условиях. Учет знаний посредством этих работ является наиболее объективным и наиболее экономным по времени. Контрольные работы позволяют выявить общие пробелы в знаниях учащихся и своевременно устранить их. Результаты письменных работ дают основу для глубокой и объективной оценки не только математического развития учащихся, состояния их знаний, но и моральных качеств учеников: чувства ответственности, внимательности, настойчивости, умения сосредоточиться в работе, умения ценить время, быть аккуратным. И не случайно в приказе министра просвещения № 57 от 21 февраля 1962 г. сказано: «не допускать, как правило, положительной аттестации за четверть или полугодие не справляющихся с письменными работами».

Составляя план работы по теме, учитель должен представить себе, какие письменные работы он будет проводить, по каким вопросам темы и на каком материале будет проверять знания учеников.

Остановимся на более важных требованиях, которые следует предъявлять к организации контрольных работ. Опыт говорит о том, что менее высокий эффект дают работы, проводимые только по окончании работы по теме,— итоговые работы; больший эффект дают итоговые работы, которые предварялись несколькими работами по частям темы. Известно, что число контрольных работ регламентировано министерством с целью предупредить перегрузку школьников домашними работами, в частности подготовкой к контрольным работам. Но контрольные работы по частям не рассчитаны на специальную домашнюю подготовку к ним и могут проводиться без предупреждения.

При составлении заданий для контрольных работ в восьмилетней школе, по нашему мнению, следует придерживаться таких принципов:

1) Задания по сложности должны даваться на некоторую ступень ниже тех, что давались в качестве наиболее сложных на классных занятиях; они должны быть более общедоступными, чем классные для совместной работы, когда вся работа проходит при участии и помощи учителя.

2) Задачи в контрольной работе не должны выходить за рамки вопросов и задач средней трудности, представленных в стабильных учебниках и задачниках.

3) В задания контрольной работы для V класса не следует включать теоретические вопросы, связанные с объяснениями: ученики этого возраста не владеют навыком даже простейших логических обоснований, пишут медленно, и задания теоретического характера для них явно непосильны.

В VI классе следует избегать заданий, требующих длинного словесного изложения последовательных логических рассуждений. Вполне можно включать в задания по алгебре выводы простейших формул, доказательства небольших теорем, разобранных в классе или вытекающих из них.

В VII—VIII классах задания теоретического характера, естественно, могут усложняться, но все-таки следует избегать заданий, требующих длинного словесного изложения.

4) Для всех учеников задания должны даваться одинаковой трудности. Дифференцированные задания иногда приводят к своего рода парадоксам: хороший ученик по какой-то причине выполнил усложненное задание неудовлетворительно, в то время как выполнить общее задание мог безупречно, и оказался «неуспевающим». Другое дело, целесообразно для более сильных учеников иметь дополнительные (запасные) задачи, которые давать после выполнения основной работы, при этом оценивать эту часть работы особо.

К оценке же общих работ подходить требовательнее, тем самым повышать значимость общих заданий.

Для того чтобы обеспечить одинаковую трудность задания, рекомендуется, выбрав какую-либо задачу или теорему, не меняя ее основы, изменять данные и искомые; в примерах изменять буквы, менять местами слагаемые, тем самым менять знаки перед выражениями и т. п. В некоторых случаях в контрольную работу можно включать и различные вопросы из ближайших тем. Приводим примеры таких заданий.

На 10—15 минут можно дать такую работу.

VI класс

1. Доказать теорему о свойстве биссектрисы угла.
2. Могут ли быть все внешние углы треугольника острыми?

VII класс

По алгебре

1. Решить уравнение $\frac{3x}{4}+\frac{5x}{3}=2x-5$.

2. При каких значениях a дробь $\frac{3}{4-a}$ не имеет смысла?

По геометрии

1. Доказать теорему об измерении вписанного угла в круге.
2. Каково взаимное положение двух окружностей, если

$R=12$ *см*, $r=8$ *см*, $d=12$ *см*?

Текущая тема «Измерение углов в круге» (на 45 минут)

1. Из концов диаметра проведены две параллельные хорды. Доказать, что они равны.
2. Определить величину вписанного угла, образованного диаметром AB и хордой BC, если $AC:CB=2:3$.
3. При каких условиях окружности радиусов 13 *см* и 8 *см* не имеют общих точек? (Предполагается два ответа.)

VIII класс

По алгебре (на 20 минут)

1. Задача. Площадь прямоугольного треугольника равна 180 $см^2$, один из катетов треугольника больше другого на 31 *см*.

Вычислить гипотенузу этого треугольника.

2. Найти значение q в уравнении $x^2-7x+q=0$, если один из корней этого уравнения равен 4.

3. Вычислить по линейке $\sqrt{342}$.

По геометрии. Текущая тема «Подобие треугольников»

(на 45 минут)

1. Доказать, что в подобных треугольниках сходственные медианы пропорциональны сходственным сторонам.
2. Задача. В параллелограмме сумма неравных сторон равна 96 *см*, а отношение высот параллелограмма равно 5:7. Найти стороны.
3. Построить треугольник ABC, если дано $\angle A$, $\angle B$, высота H_{AB}.

Для удобства тексты контрольных работ следует выписывать на карточки, лучше в 4—5 вариантах, но одинаковой трудности. Это в значительной мере обеспечивает самостоятельность работы каждого ученика, создает большее спокойствие и необходимую сосредоточенность в работе, повышает ответственность каждого за свои результаты.

Карточки позволяют освободить учеников от переписывания длинных текстов задач. В работе достаточно указывать номер карточки.

Многие учителя при выполнении письменных контрольных работ не разрешают ученикам пользоваться «черновиками», а приучают их писать сразу начисто, считая, что время, затра-

чиваемое на черновик, лучше использовать на предварительное обдумывание плана работы. Не следует категорически запрещать черновики, но, разрешая ими пользоваться, надо требовать вести в них записи аккуратно и в принятой последовательности. Черновики должны сдаваться учителю.

Кроме письменных контрольных работ, можно проводить и устные контрольные работы. Устные контрольные работы отличаются от письменных тем, что ученики делают необходимые вычисления, преобразования и выводы устно и записывают только ответы на предложенные вопросы и задачи.

Приводим примеры устных контрольных работ для разных классов.

V класс

Тема «Обыкновенные дроби», сложение и вычитание дробей (на 15 минут)

1. Сравнить дроби: $\frac{19}{18}$ и $\frac{11}{14}$.
2. Написать все неправильные дроби с числителем 5.
3. Вычислить: а) $\frac{7}{12}-\frac{5}{18}$; б) $3\frac{5}{8}+\left(\frac{7}{24}+2\frac{3}{8}\right)$; в) $43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-4\frac{1}{2}\right)$; г) $26\frac{4}{9}-\left(10\frac{3}{4}-3\frac{5}{9}\right)$.

VIII класс

Тема «Извлечение квадратного корня из чисел» (на 15 минут)

1. Вычислить: а) $\sqrt{58^2-42^2}$; б) $\sqrt{16\cdot 625\cdot 36}$; в) $\sqrt{\frac{0{,}64\cdot 25}{0{,}0001}}$.
2. С помощью логарифмической линейки вычислить: а) x^2, если $x=4{,}26$; б) x из уравнения $x^2=18{,}24$.
3. Вычислить по таблице $\sqrt{32}+\sqrt{18}$.

Примечание. Примеры устных контрольных работ взяты по материалам учителей школ № 209, 216 и 476 Ленинграда.

Организация устных работ такова: учитель заранее крупно записывает каждое подобранное им для работы предложение (задачу или вопрос) на особый отдельный лист и в намеченной им последовательности вывешивает эти листы в классе (можно записывать предложения и на доске). Ученикам предоставляется 1—2 минуты для решения предложенной задачи в зависимости от сложности задания.

Текст задачи или вопроса по истечении времени, отведенного для решения его, убирается или стирается. Не успевшие решить задачу должны прочеркнуть место ответа на данный вопрос. Никаких поправок вносить в записи не разрешается. После записи ответа на последнее предложение контрольной работы тетради должны быть всеми учениками закрыты одно-

временно; если ответы записывались на листках, то листки должны быть одновременно по требованию учителя перевернуты, а затем собраны для проверки и оценки.

Опыт многих учителей свидетельствует о том, что ученики довольно скоро привыкают к такой форме проверки знаний и навыков и сами не допускают списывания. Для предупреждения списывания ответов некоторые учителя составляют два варианта задания.

Ценность устных контрольных работ состоит в том, что они, как и устные упражнения, повышают внимание учеников, приучают их ценить время, развивают навык быстро отыскивать наиболее рациональные способы решения. Для учителя результаты дают возможность учесть, что из пройденного слабо усвоено, характер наиболее распространенных ошибок, наконец, позволяют, пользуясь довольно большим материалом, правильно оценивать знания и навыки учеников. Полезно вскоре после устной контрольной работы провести письменную работу с учетом результатов устной. Удобно использовать результаты устной контрольной работы и при индивидуальном опросе.

§ 22. Оценка знаний учеников

Оценки знаний и умений должны отражать, насколько прочно и сознательно ученик усвоил пройденный материал по текущей теме или по повторению; насколько он умеет приложить теорию к практике при решении различного рода задач; правильно ли и рационально выполняет преобразования и вычисления; умеет ли правильно, точно и последовательно выражать свои мысли; обладает ли нужными геометрическими представлениями; грамотно ли и аккуратно оформляет работу. Таким образом, оценка ставится с учетом всех указанных требований к знаниям и навыкам учащихся. Заслуживает внимания опыт некоторых учителей выставлять оценку поурочно, то есть за работу ученика на уроке и дома. В этом случае учитель до урока намечает группу учеников, знания которых намерен проверить, и на всех этапах урока следит за их работой и привлекает их к ответу: они участвуют в объяснении при проверке домашней работы, они вызываются для комментирования решения задач, они находятся в поле зрения учителя во время самостоятельной работы в классе, они вызываются чаще других для ответа при беглом опросе и т. д. В результате учитель выставляет намеченным ученикам «поурочный» балл. Выставление «поурочного» балла рекомендуется и министерством как прием, оправдавший себя.

Учителю приходится оценивать знания и умения учащихся и при индивидуальном опросе у доски и, конечно, за устные и письменные контрольные работы.

Министерством просвещения утверждены «Нормы оценки успеваемости учащихся V—XI классов средней школы по математике» (1962). Нормы различают грубые, случайные ошибки и недочеты в знаниях и умениях учащихся.

Весьма важным указанием следует считать, что четвертные или полугодовые оценки ученику выставляются на основании всех оценок, полученных им в течение четверти или полугодия, с учетом повседневных наблюдений учителя за всей работой ученика.

Это указание в некоторой степени предупреждает возможность случайных итоговых оценок.

Второе указание — итоговая положительная оценка не может быть выставлена ученику, который не имеет положительных оценок за контрольные работы в течение отчетного периода. Этим подчеркивается то внимание к самостоятельным работам, которое должно уделяться в преподавании математики, и преимущественное значение контрольных работ в общей системе проверки знаний.

Несомненно, в оценке проявляется личность учителя, его требовательность, внимание к мелочам, но вместе с этим и педагогический такт.

§ 23. Анализ письменных работ учеников и разбор ошибок в классе

Заслуживает внимания вопрос об анализе письменных работ учителем и последующем разборе ошибок в классе. Бесспорно, что при проверке работ учитель обязан отмечать все ошибки учеников — математические, стилистические и грамматические (этого требует и единый орфографический режим в школе). Многие учителя исправляют ошибки сами. Мы полагаем, что этого делать не следует; в том случае, когда ошибка исправлена учителем, на долю ученика остается «согласиться» с исправлением и успокоиться. Перестройка школы требует усиления самостоятельной работы учащихся на всех этапах обучения. Важно, чтобы и при разборе ошибок ученик сам установил, в чем его ошибка, умел найти источник возникновения ее и пути исправления. Поэтому достаточно того, что учитель указывает место ошибки. Практика такого подхода к исправлению ошибок в письменных работах достаточно широка и оправдала себя. Для указания места ошибки вводятся условные знаки: для грубых ошибок две черты, для негрубых и случайных — одна черта и для недочетов — волнистая линия.

При домашнем анализе работ учитель не может ограничиться только проверкой и сопоставлением ответов или беглым просмотром хода рассуждений или последовательности преобразований. Надо тщательно просматривать все преобразования,

вычисления и рассуждения. Результаты поспешной проверки работ могут поставить учителя в неприятное положение. При анализе работ надо систематизировать ошибки и недочеты, выделить типичные и массовые ошибки, в первую очередь принципиальные, грубые, связанные с нарушением основных законов математики. На таких ошибках и должно быть сосредоточено внимание учащихся при разборе ошибок в классе. Этот разбор никак нельзя ограничивать сообщением каждому ученику его ошибок и проставленной за работу оценки. Ошибки надо разбирать, при этом к разбору ошибок и причин, породивших их, следует привлекать учеников, в первую очередь допустивших ошибки и пассивных в общей работе. Известно, что иногда достаточно перед учениками поставить вопрос, можно ли так делать, как допустивший ошибку «спохватывается» и сам указывает, в чем ошибка и как ее исправить. Таким образом этап разбора ошибок становится обучающим и мобилизующим мысль ученика.

Вопросы и задачи, вызвавшие затруднения у многих учеников, необходимо особенно детально и тщательно разбирать в классе, иногда следует даже провести дополнительные упражнения. Если в классе проведен тщательный анализ ошибок (установлены источники их и намечены пути исправления), то учитель может предложить ученикам, допустившим ошибку, переделать задачу или внести нужные исправления, не сопровождая их указаниями на соответствующие теоремы, правила, законы. Если же ошибка не была массовой или явилась повторной, то рекомендуется предложить ученику дома произвести детальный разбор ее, то есть внести исправления и сделать нужные ссылки на соответствующие правила.

Анализ работ учитель должен провести к очередному уроку по предмету и на этом уроке разобрать с учениками ошибки. Отсрочка проверки и разбора работ в классе ведет к потере интереса учащихся к разбору, часто разбор вклинивается в начатую уже работу по новой теме; несвоевременно проставленные в журнал и дневники оценки работ часто вызывают законные упреки в адрес учителя со стороны классного воспитателя и родителей.

Принятые формы учета знаний учащихся по предмету в классных журналах недостаточно оперативны. Проставленные учителем отметки за ответы и работы учащихся не дают возможности даже ему самому восстановить в памяти, за что конкретно поставлена оценка. Это часто приводит к тому, что учитель в последующем и не спрашивает ученика по тому материалу, который он не знал, а полученная учеником более поздняя удовлетворительная отметка, хотя бы и за другой материал, «покрывает» собой полученную ранее неудовлетворительную оценку...

Чтобы восполнить пробел в учете знаний учащихся, желательно, чтобы учитель вел тематический учет знаний в своем дневнике. В нем найдут себе место отметки по всем видам учета знаний за устные и письменные контрольные работы, за устные ответы и т. д.

§ 24. Меры предупреждения неуспеваемости и работа с отстающими учениками

Известно, что математика — один из предметов, по которому число неуспевающих сравнительно высоко. Перед учителем математики постоянно стоит задача найти пути предупреждения отставания учащихся или подтянуть уже отставших.

Прежде всего учитель математики должен понимать, что школьный курс математики является доступным для каждого нормального ребенка, нужно только добиться внимания на уроках, прилежания в выполнении домашних заданий.

Внимание учащихся значительно зависит от методики проведения урока, от умелой организации урока, от интереса, который возбуждает у них преподносимый материал. Необходимо следить за выполнением домашних заданий. Своевременной проверкой выполнения домашних заданий учитель может обнаружить пробелы в знаниях учащихся и принять соответствующие меры для предупреждения неуспеваемости.

Особое внимание учитель должен уделять отстающим или неустойчивым ученикам. Их следует чаще спрашивать, заставлять повторять правильные ответы других учеников и объяснения самого учителя. У неустойчивых учеников следует чаще брать тетради для проверки. Учитель математики должен следить, как ученики исправляют ошибки. Сам учитель должен знать наиболее существенные ошибки и пробелы в знаниях каждого ученика, фиксировать эти ошибки и помогать ученикам ликвидировать их. Одной из форм индивидуального учета ошибок могут служить «лицевые счета учащихся» (хотя бы сомнительных, неустойчивых), куда заносятся существенные ошибки при устных ответах и из письменных контрольных и самостоятельных работ. Имея такие лицевые счета, учитель указывает ученику пути исправления ошибок и работы над ними, а при последующих опросах проверяет, восполнены ли пробелы в знаниях, искоренены ли отмеченные ошибки.

В том случае, когда обнаруживается отставание кого-либо из учеников, наиболее эффективной мерой для ликвидации пробелов в его знаниях являются своевременные дополнительные занятия и консультации, во время которых учитель разъясняет все неясные для учеников вопросы.

Учителями практикуются индивидуальные задания ученикам на короткий срок с обязательной проверкой их и разбором на

дополнительных занятиях. Возможно и прикрепление к отстающим более сильных учеников из класса или из старших классов. Это «прикрепление» иногда бывает полезным и для «репетиторов», но увлекаться им не следует, так как часто эта работа становится тяжелой нагрузкой для добросовестных и прилежных учеников, и без того достаточно занятых учебной работой.

Весьма эффективными оказываются такие приемы работы с отстающими и неуспевающими учениками: повторный опрос невыполнивших задание не позднее чем через неделю и по тому же материалу; повторные контрольные работы аналогичного характера (проводить такие работы можно вне урока, через 2—3 дня после разбора общей контрольной работы); спрос учеников, пропустивших отдельные уроки, по материалу, пройденному в их отсутствие.

Наряду с дополнительными занятиями с отстающими учениками полезно вести специальную работу по повышению общего уровня математического развития учащихся и возбуждения более глубокого интереса к математике.

Для этого практикуются индивидуальные задания (например, набор задач для решения на определенный срок, набор несложных новых теорем для самостоятельного доказательства, составление различного рода таблиц).

Особое внимание должно быть уделено ученикам, проявляющим особый интерес к предмету.

Надо своевременно дать таким ученикам материал по текущему курсу, предоставляя им возможность углубиться в изучение текущих тем, познакомить их с источниками, которые позволят им расширить свои математические знания в пределах курса и темы.

Некоторые школы практикуют летние задания учащимся, не успевающим по математике (не успевающие по трем предметам и более оставляются в том же классе на второй год). В этих случаях задание рекомендуется давать по тем разделам, которые не усвоены учеником, если не усвоен весь курс, то, естественно, задание дается по всему курсу.

Большую помощь в работе с учениками может оказать учителю математики специальный математический кабинет школы.

§ 25. Ученические тетради и записи в них

Желательно, чтобы ученики имели по каждому предмету математики отдельные тетради для записи выводов и правил. Для упражнений должна быть особая тетрадь. Одна тетрадь должна предназначаться для контрольных работ по всем раз-

делам. Иногда учителя требуют отдельные тетради для домашних и классных работ.

Предлагаемое нами разделение удобнее, так как в этом случае в одной тетради сосредоточиваются все материалы и замечания по теории. В нее же могут вноситься краткие выдержки, формулы и законы из учебных книг.

Такая тетрадь может служить справочником и конспектом при повторении. Хорошо, когда в нее ученик записывает образцы оформления решения задач или доказательства теорем, показанные учителем на уроках.

Вторая рекомендация имеет то преимущество, что легче следить за выполнением домашних заданий.

Что же записывать в тетради во время урока?

Существуют две крайние точки зрения.

1) Если учитель излагает теорию так, как она изложена в учебнике, то ученики никаких записей делать не должны, а лишь внимательно слушать и активно участвовать в разборе материала. Записывают они только окончательный вывод и отмечают параграф учебника, в котором изложен соответствующий материал. И только в том случае, когда учитель излагает материал иначе, чем он изложен в учебнике, ученики записывают рассуждения и выводы полностью.

2) Записывать ученики должны все, что записывается на доске.

Решить этот вопрос — дело самого учителя. Можно лишь рекомендовать избегать длинных словесных записей и громоздких преобразований. Для учеников V—VI классов такие записи непосильны, и пользоваться ими, за редким исключением, они не могут.

Однако если доказательство теоремы или какой-либо вывод оформляется на доске короче и выразительнее, чем в учебнике, то такое доказательство записывать в тетради следует, так как оно помогает легче восстановить схему и логическую последовательность хода доказательства или вывода.

Надо обучать учащихся вести тетради, особенно в младших классах: они не умеют рационально расположить записи, чертежи, схемы, таблицы.

Учитель должен указывать, что и как записывать в тетрадь — дату выполнения работы и номер выполняемого упражнения или задачи. Отсутствие этих данных затрудняет проверку тетрадей.

Не следует допускать переписывания в тетрадь текста учебника при подготовке домашних заданий, полезно время от времени задавать ученикам конспективно изложить в тетрадях наиболее сложный параграф учебника, расчленить выводы на простейшие этапы и выполнить доказательство теоремы для измененного чертежа с другими обозначениями фигуры.

§ 26. Выпускные экзамены в VIII классе по математике

До 1956 г. во всех классах начиная с IV проводились переводные экзамены по математике, а в VII и X классах — выпускные экзамены. В настоящее время экзамены проводятся только в выпускных классах. В VIII классе по математике проводится два экзамена — письменный (по алгебре и арифметике) и устный (по геометрии и алгебре).

Экзамены являются итоговой проверкой и служат для оценки знаний и навыков, а также общего математического развития, полученных учениками за время обучения в школе. Экзамены проводятся по особой инструкции Министерства просвещения РСФСР.

Письменный экзамен по алгебре и арифметике проводится по текстам, присылаемым министерством, для устного экзамена по геометрии и алгебре министерством же составлены экзаменационные билеты.

На письменном экзамене по математике дается задача по алгебре (обычно на составление квадратного уравнения или на составление системы уравнений) и два примера — один на тождественные преобразования, другой по арифметике. На устном экзамене по математике проверяются знания учеников по геометрии за курс VIII класса и некоторым наиболее важным разделам VI и VII классов и умения применить полученные знания по алгебре и геометрии к решению практических задач.

Таким образом, на устном экзамене из курса алгебры проверяются преимущественно навыки в вычислениях по таблицам и с помощью логарифмической линейки.

На письменном экзамене ученик должен обнаружить умение решать алгебраическую задачу на составление уравнения. Оформление решения задачи может быть выполнено любым способом, который ученик выберет.

Основное требование в работе предъявляется к математической грамотности: грамотно должны быть изложены пояснения к выбору неизвестного, к обозначениям размерности величин, к составлению уравнений. В результате полученных решений проверкой должно быть установлено, какие из них являются ответом на вопрос задачи.

Алгебраический и арифметический примеры в работе направлены на проверку навыков учащихся в тождественных преобразованиях и вычислениях, а также функционально-графических представлений.

При проверке вычислительной культуры учащихся основное внимание обращается на умения выполнять все действия над десятичными дробями; это проверяется по преимуществу на решении арифметического примера. Навыки в операциях над

обыкновенными дробями проверяются по преимуществу при вычислениях, связанных с тождественными преобразованиями (например, при нахождении числового значения результата преобразования алгебраического выражения).

Каждый билет на устном экзамене по геометрии содержит три задания-вопроса.

В первом задании предлагается доказать одну из теорем курса планиметрии VI—VIII классов.

Во втором задании указывается лишь раздел курса геометрии, по материалу которого учитель составляет конкретную задачу на вычисление, доказательство или построение.

Третье задание определяет характер практической работы, которую предлагается выполнить ученику; эти задачи составляются учителем; в них должно требоваться от учеников умение произвести непосредственные измерения, построения и вычисления. При выполнении 2 и 3-й задач ученик должен уметь обосновать свои действия ссылками на теоремы, формулы, которые будут им использованы.

Задачи во 2 и 3-ем заданиях подобраны в каждый билет так, чтобы можно было проверить знания и навыки ученика по различным разделам курса геометрии.

Приводим примеры задач по 2 и 3-му вопросам билета № 23.

Ко 2-му вопросу билета (решение задачи на подобие треугольников) может быть предложена одна из следующих задач:

1. Дана равнобочная трапеция с основаниями 12 и 18 *см* и длиною диагонали 20 *см*; вычислить отрезки диагоналей, на которые они делятся точкой их пересечения.

2. Дан треугольник ABC с углом $B=40°$; из вершины $\angle A$ проведен отрезок AE до пересечения с BC; $\angle EAC=40°$, $\angle AEC=\angle ACE$; $BE=12{,}4$ *см*, $EC=5{,}6$ *см*. Вычислить длину отрезка AE.

3. В треугольнике ABC проведен отрезок $KE \| AB$ (точка E лежит на BC); $BC=8$ *см*; $BE=2$ *см*; $AC=10$ *см*. Определить длину AK.

В каждом случае ученик должен сделать чертеж, соответствующий условию, и произвести необходимые вычисления.

К заданию билета № 23 (вычислить объем детали, имеющей форму правильной треугольной призмы) может быть предложена одна из следующих задач:

1. Вычислить объем призмы из оптического прибора с точностью до 0,1.

2. Вычислить объем номерного знака (бирки с вешалки), имеющего указанную в задании форму, с точностью до 0,1.

3. Вычислить объем деревянной (металлической, стеклянной) модели призмы с точностью до 0,1.

На экзамене учащимся должны быть предоставлены для

решения третьей задачи необходимый материал и измерительные инструменты; все это готовится учителем заранее и на экзамене должно быть разложено на столе.

Все вычисления, которые допускают целесообразное применение счетной линейки, должны выполняться при ее помощи.

Некоторые указания взяты нами из статьи И. Петракова и А. Семушина «Экзамены за восьмилетнюю школу» (см. журнал «Математика в школе», 1963, № 1). Инструкция по проведению экзаменов в восьмилетней школе указывает, что итоговые отметки по алгебре и геометрии выставляются по результатам письменного и устного экзамена, с учетом годовой оценки за VIII класс по каждому из этих предметов. Итоговая оценка по арифметике переносится из VI класса независимо от выполнения задания по арифметике на письменном экзамене (таково разъяснение методиста по математике Министерства просвещения т. Петракова, см. «Учительскую газету» за 27 апреля 1963 г.).

Примечательно указание инструкции, что положительная итоговая оценка по алгебре не может быть выставлена не только тем учащимся, которые не выдержали письменный экзамен, но и тем, которые на устном экзамене по математике обнаружили неумение практически пользоваться знаниями, приобретенными при изучении алгебры. Во всех этих случаях учащиеся держат осенью повторные устный и письменный экзамены по математике.

Если же учащийся не выдержал весной экзамен по геометрии, то он держит осенью повторный устный экзамен.

Учащихся к экзаменам надо готовить: эта подготовка должна прежде всего заключаться в повторении основных законов, зависимостей, приемов тождественных преобразований и в решении задач на составление уравнений, в повторении вычислений с обыкновенными и десятичными дробями непосредственно и с помощью таблиц и линейки.

И тут дело не столько в числе решенных задач и примеров, сколько в качестве отобранных для повторения задач и примеров.

Так, при повторении решения задач на составление уравнений надо особо остановиться на выражении в уравнении всех величин одной мерой, на внимательном отношении к освобождению уравнения от дробных членов, на необходимости проверки, удовлетворяют ли найденные корни условиям задачи, и т. д. При повторении материала по геометрии надо учесть, какой материал из курсов VI и VII классов включен в экзаменационные билеты. Этот материал требуется обязательно повторить, так как многие ученики забыли его. Особо тщательно к темам, давно пройденным, надо подобрать группу задач, при решении которых ученики повторяют и теорию.

Повторение учебного материала при подготовке к экзаменам надо начинать если не с начала учебного года, то по крайней мере с января. Повторение не рекомендуется вести по билетам (да с января это и невозможно, так как некоторые темы по геометрии и алгебре не будут еще изучены). Повторение должно вестись в строгой системе, по темам и не всего учебного материала сплошь, а, как уже сказано, выборочно, с выделением наиболее важного, принципиального. Хорошо, когда это повторение спланировано и во времени так, чтобы ученики к известному сроку прорешали одну группу задач, к другому сроку — другую и т. д. То же и в отношении теоретического материала, особенно по геометрии. Повторение следует построить с таким расчетом, чтобы было можно в установленные сроки проверять, как повторяют ученики материал, и внести нужные коррективы в эту работу. Целесообразно в середине четвертой четверти провести пробную письменную работу на 2—3 урока с включением в работу задачи по алгебре и двух примеров — по алгебре и по арифметике. Такая тренировочная работа проводится во многих школах и имеет известный смысл.

§ 27. Внеклассная работа по математике

Под внеклассной работой по математике мы будем понимать занятия, проводимые во внеурочное время и основанные на принципе добровольного участия.

Целью внеклассной работы является:

1) углубление учебно-воспитательной работы школы в области идейно-политического воспитания;

2) повышение уровня математического развития и расширения научного кругозора учащихся;

3) повышение интереса учеников к математике;

4) привитие навыков к самостоятельной работе и умение работать с математической книгой.

Внеклассная работа способствует повышению математического образования, расширяет общую математическую культуру и способствует повышению успеваемости учащихся.

Ученики V—VIII классов, за исключением имеющих особую склонность к математике, с одинаковым интересом относятся ко всем школьным предметам. Любовь к той или иной дисциплине проявляется у школьников часто в зависимости от учителя (его знаний, энтузиазма, педагогических качеств и т. п.).

Прежде чем организовать внеурочные занятия со школьниками, учитель, если он первый год ведет занятия с данным классом, должен внимательно изучить своих учеников и постепенно выделить тех, с которыми он предполагает вести внеклассные занятия. На первых порах не следует гнаться за большим числом участников: актив будет постепенно возрастать в

зависимости от организации всей работы. Необходимо помнить, что интерес к математике возрастает, если ученик с успехом сделал доклад, удачно участвовал в конкурсе по решению задач и т. д.

Предлагаемый на первых порах материал не должен вызывать слишком больших трудностей. Поэтому сперва приходится давать более легкие темы для докладов и более простые задачи, усложняя их в процессе работы. Неудача вначале может привести к разочарованию в своих силах, и ученик «разлюбит математику».

Почти в каждой школе существуют *кружки по математике*. Этим кружкам присваивают различные названия: общество любителей математики, общество юных математиков, кружок математики такой-то школы и т. п.

Необходимо отличать математические кружки в школах от нового вида внеклассной работы — математических школ, которые сейчас получают распространение и преследуют несколько иные цели. Математические школы (школы юных математиков) организуются при высших учебных заведениях или в районе для нескольких школ. Следует отличать «математические школы» от школ вычислителей-программистов, от школы при Новосибирском отделении Академии наук, при Московском университете и других научных и высших учебных заведениях; все эти школы являются общеобразовательными школами с углубленным изучением математики и физики.

Независимо от названия кружок или общество в школе должно иметь вполне определенную организацию.

На первом собрании учитель сообщает о целях и задачах кружка; затем вырабатывается устав кружка, который должен быть возможно кратким; избирается председатель и несколько членов президиума в зависимости от числа секций. Для пользы дела учитель математики должен быть заместителем председателя.

В некоторых школах избираются почетные члены кружка из числа крупных математиков, известных методистов, работников университетов и педвузов. Предварительно учителю следует списаться с теми лицами, которые намечаются в почетные члены кружка; учащимся приятно будет получить письмо и ряд пожеланий от своего почетного члена. Директора, завуча школы следует информировать о работе кружка и приглашать их на заседания кружка.

В кружке может участвовать любой ученик. Чтобы кружок имел средства для приобретения некоторых материалов, премирования наиболее активных членов, можно прибегнуть к коллективному заработку (разноска телеграмм в дни революционных праздников или выполнение каких-нибудь хозяйственных работ в колхозе, школе и т. п.).

Члены кружка отчитываются или на секциях или на общем собрании. В последней четверти должна быть дана характеристика работы каждого члена кружка (число сделанных докладов, качество выполнения, участие в конкурсах по решению задач, в олимпиаде и т. д.).

Кружок, как уже было сказано, не должен замыкаться в самом себе: к работе следует привлекать возможно большее число учащихся, а не только членов кружка.

Остановимся еще на одном организационном вопросе.

Математический кружок может состоять из следующих секций:

I. Научно-популярная.

II. Конкурсы по решению задач и олимпиады.

III. Изготовление наглядных пособий, моделирование.

IV. Школьная математическая печать.

План кружка и каждой секции составляется на весь учебный год. Работа секций и кружка начинается в середине сентября и заканчивается в начале мая проведением итогового вечера.

План должен быть составлен по возможности точный, причем в плане указывается, какой доклад, какое мероприятие, когда и кем будет проведено.

Во время каникул занятия кружка можно не проводить.

Рассмотрим несколько подробнее содержание работы каждой секции.

I. Научно-популярная секция.

Задачи этой секции:

а) углубление некоторых вопросов, входящих в программу школы;

б) изучение некоторых новых вопросов.

Как правило, математические доклады в V—VIII классах не должны быть длительными (не более 30—40 минут). Доклады должны разбиваться на части и поручаться отдельным учащимся. Таким образом, доклад ученика V класса не будет превышать 10 минут, а в VIII классе — 15—20 минут.

В месяц мы рекомендуем проводить по два доклада: за весь учебный год будет 10—12 докладов.

В сентябре, пока ученики только готовят доклады, первые два доклада может сделать учитель или приглашенный докладчик из педвуза, если таковой имеется в городе.

Каждый ученический доклад должен быть хорошо подготовлен как по своему содержанию, так и по внешнему оформлению; красиво вычерчены графики, правильно составлены диаграммы, таблицы и т. д. Поэтому учитель, особенно на первых порах, должен тщательно проверять подготовку докладчика. После доклада в заключение учитель отмечает достоинства и недостатки доклада.

Приведем несколько тем для ученических докладов.

Для V—VI классов.

1. Числа-великаны и числа-малютки.
2. Как люди научились считать.
3. Как считали на Руси в старину.
4. Запись цифр и чисел у различных народов в древности (Египет, Греция, Ассиро-Вавилония, Рим, славяне, Индия).
5. Нуль.
6. История календаря.
7. Как умножали и делили в старину.
8. История возникновения обыкновенных и десятичных дробей.
9. Как возникла десятичная система мер.
10. Леонтий Филиппович Магницкий, автор первого учебника по арифметике в России. Старинные задачи.

Для VII класса.

1. Различные системы счисления.
2. История возникновения отрицательных чисел.
3. Геометрия в древнем Египте.
4. Геометрия в древней Греции.
5. Геометрия в Ассиро-Вавилонии.
6. Архимед.

Для VIII класса.

1. Осевая симметрия.
2. Центральная симметрия.
3. Геометрические места точек.
4. Измерение площадей.
5. История развития учения об уравнениях.
6. Теорема Пифагора и пифагоровы числа.
7. Золотое деление.
8. Графическое решение квадратных уравнений.
9. Различные способы построения параболы и гиперболы.
10. Максимум и минимум функции.

Примечание. Темы докладов для V и VI классов могут быть использованы и в VII—VIII классах. Содержание, конечно, должно быть более глубоким.

Математические вечера — одна из наиболее массовых форм внеклассной работы. Если в школе нет параллельных классов, то приходится организовывать вечера одновременно для V—VI классов или для VII—VIII классов; при наличии нескольких пятых, шестых и т. д. классов можно проводить вечера для каждой параллели отдельно. Содержание математических вечеров весьма разнообразно. Например, различные системы счисления. Содержание вечера: доклады отдельных учеников о различных системах счисления в первой части вечера и решение задач во второй части. Желательно внести элементы развлекательного характера.

Представляют значительный интерес вечера, посвященные отдельным математикам.

В Д. Чистяков в своей книге «Математические вечера в средней школе» (Учпедгиз, 1958) предлагает следующий план вечера, посвященного жизни и деятельности С. В. Ковалевской:

а) биография С. В. Ковалевской,

б) замечательные высказывания С. В. Ковалевской,

в) воспоминания родных и знакомых о С. В. Ковалевской,

г) высказывания ученых о С. В. Ковалевской,

д) чтение стихов С. В. Ковалевской и отрывков из «Воспоминаний детства».

Материал для выступлений обычно распределяется между членами кружка (общества). К вечеру можно выпустить специальный номер стенгазеты и стенд, посвященный деятельности С. В. Ковалевской. В зале, где проводится вечер, необходимо вывесить большой портрет С. В. Ковалевской.

В заключительном слове учителю необходимо сказать о выдающихся русских женщинах-математиках: П. Я. Полубариновой-Кочиной, Л. В. Келдыш, С. А. Яновской, О. А. Ладыженской, О. А. Олейник и др.

Примерно по такому же плану можно провести вечер, посвященный Л. Эйлеру, Н. И. Лобачевскому или П. Л. Чебышеву. Для проведения вечера, посвященного Н. И. Лобачевскому, можно найти интересный материал в книге Анны Ливановой «Три судьбы» («Молодая гвардия», 1959). Такие вечера, но более глубокие по содержанию, могут быть проведены и для учащихся старших классов.

Если в школе проводилась математическая олимпиада, то один из вечеров следует целиком посвятить олимпиаде (смотри ниже).

II. Секция решения задач.

Математические викторины. Математические викторины можно проводить на математическом вечере, на общешкольных и классных вечерах, посвященных математике, и на заседаниях математического кружка.

В викторинах может принимать участие каждый желающий. Обычно предлагается 6—8 вопросов. Наиболее удачная форма проведения викторин следующая. Тексты всех вопросов и задач предварительно выписываются на доске или на отдельных плакатах; лучше всего, когда каждому учащемуся выдается лист бумаги, на котором напечатаны все вопросы и задачи.

Каждый участник на отдельном листе записывает ответы и краткое объяснение к вопросам и задачам. Этот лист через определенное время сдается в жюри викторины. Через 20—40 минут в зависимости от возраста учащихся прием листов прекращается. Работа должна быть налажена так, чтобы в корот-

кое время жюри проверило решения и выявило бы победителей викторины. Для того чтобы дать время жюри проверить работу, с участниками викторины до опубликования результатов проводится разбор решений. Победителям викторины выдаются небольшие призы, обычно математические книги.

Значение викторины нельзя переоценивать; умение быстро решать легкие задачи еще не свидетельствует о математическом развитии и способностях учеников. В этом отношении викторины значительно уступают математическим олимпиадам.

Задачи для викторин не должны быть громоздкими и сложными для вычислений или записей; большинство из них должны решаться в уме. Не следует предлагать на викторинах задачи, которые решались на уроках.

Приведем несколько вариантов для различных классов.

Для V класса

1. (1 очко.) Какой из знаков, применяемых в арифметике, следует поставить между числами 4 и 5, чтобы получить число больше 4, но меньше 5? (Ответ: запятую.)

2. (1 очко.) Восстановить уменьшаемое и вычитаемое

$$\begin{array}{r} ?0?? \\ -\ 3?06 \\ \hline 3124 \end{array}$$

(Ответ: 7030 и 3906.)

3. (1 очко.) Во сколько раз лестница на 6-й этаж длиннее лестницы на 2-й этаж того же дома? (Ответ: в 5 раз.)

4. (2 очка.) Выписать подряд все числа от 1 до 99. Сколько раз будет написана цифра 5? (Ответ: 20 раз. В десятке 50—59 цифра 5 встречается 11 раз; в каждом из остальных десятков по одному разу.)

5. (2 очка.) При умножении 678 на 273 получилось 184 094. Правильно ли сделано умножение? (Ответ: нет. 678 делится на 3; 273 делится на 3. Все произведение должно делиться на 9. Сумма цифр числа 184 094 не делится на 9.)

6. (2 очка.) Вычислить сумму

$$8\cdot 9\cdot 14+6\cdot 12\cdot 17+4\cdot 18\cdot 19.$$

Решение $72\cdot 14+72\cdot 17+72\cdot 19=72\cdot(14+17+19)=72\cdot 50=$ $=3600$.

7. (2 очка.) Написать цифры 1, 2, 3, 4, 5. Не меняя порядка цифр, вставить между ними знаки, употребляемые в арифметике так, чтобы образовалось число 100.

(Ответ: $(1+23-4)\cdot 5$, или $(1\cdot 2+3)\cdot 4\cdot 5$.)

8. (2 очка.) В ящике имеется сто флажков: по 25 красных, зеленых, желтых и синих. В темноте выбираются флажки. Какое наименьшее число флажков следует взять, чтобы среди них оказалось не меньше 10 флажков одного и того же цвета? (Ответ: 37.)

Для VII класса

1. (1 очко.) Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом? (Ответ: нет, $(a-1)+a+(a+1)=3a$; $a>1$.)

2. (2 очка.) Доказать, что если дробь $\frac{a-b}{a+b}$ несократима, то дробь $\frac{a}{b}$ также несократима.

Решение. Если $\frac{a}{b}$ сократимая дробь, то $a=mk$, $b=nk$. Тогда $\frac{mk-nk}{mk+hk}=\frac{k(m-n)}{k(m+n)}$ есть также сократимая дробь.

3. (2 очка.) Может ли четвертая степень целого числа оканчиваться цифрой 4? (Ответ: нет. Квадраты целых чисел оканчиваются цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9. Квадраты квадратов будут оканчиваться цифрами 0, 1, 5, 6.)

4. (2 очка.) Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 *км/ч*, вторую — со скоростью 60 *км/ч*. Какова его средняя скорость? (Ответ: $40\ \frac{км}{ч}$.)

5. (2 очка.) Из 8 одинаковых деталей одна бракованная (легче других). Как найти посредством взвешивания на весах с двумя чашками без гирь бракованную деталь? Какое наименьшее число взвешиваний? (Ответ: 2. Взять 6 деталей и т. д.)

Для VIII класса

1. (1 очко.) Делится ли многочлен $a^2-c^2+b(2a+b)$ на $a+b-c$?

Решение. Делится. $(a^2+2ab+b^2)-c^2=(a+b-c)\cdot(a+b+c)$.

2. (1 очко.) Доказать, что выражение $(x-4)(x-6)+3$ при любом значении x есть число положительное.

Решение. $(x-4)\cdot(x-6)+3=x^2-10x+24+3=(x-5)^2+2>0$.

3. (1 очко.) Доказать, что сумма квадратов двух любых нечетных чисел не делится на 4.

Решение. $(2a+1)^2+(2b+1)^2=(4a^2+4a+4b^2+4b)+2$. Первое слагаемое делится на 4, второе — не делится на 4.

4. (1 очко.) Могут ли $\sqrt{3}$ и 2 быть корнями квадратного уравнения $x^2+px+3=0$? (Ответ: нет.)

5. (1 очко.) Решить уравнение $\sqrt{3-x}=7-\sqrt{x-5}$. (Ответ: в области действительных чисел решений нет.)

6. (2 очка.) Найти значение выражения $A=\left(1+\sqrt{c}\right)\left(1-\sqrt{c}\right)\times$ $\times(1+c)(1+c^2)(1+c^4)+c^8$ при $c=1{,}21$; $c=1{,}45$. (Ответ: $A=1$, ибо $A=(1-c)(1+c)(1+c^2)(1+c^4)+c^8=1$.)

Для VI класса

(тема «*Треугольники*»)

1. (1 очко.) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 100 *см*, другая 40 *см*. Какая из них является основанием? (Ответ: основание — 40 *см*.)

2. (1 очко.) Периметр равнобедренного треугольника равен 14 *см*. Одна из сторон втрое больше другой. Найти стороны треугольника. (Ответ: 2 *см*, 6 *см*, 6 *см*.)

3. (1 очко.) Можно ли разрезать треугольник на два остроугольных треугольника? (Ответ: нельзя.)

4. (1 очко.) В равнобедренном треугольнике высота равна половине основания. Найти его углы. (Ответ: 45° и 90°.)

5. (1 очко.) Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине треугольника параллельна основанию.

6. (2 очка.) В выпуклом n-угольнике все внешние углы тупые. Найти n. (Ответ: 3. Если допустить, что $n>3$, то сумма внешних углов будет больше $4d$.)

Для VIII класса

(тема «*Метрические соотношения и площади*»)

1. (1 очко.) Могут ли все три стороны целочисленного прямоугольного треугольника выражаться нечетными числами? (Ответ: нет. Квадрат нечетного числа — число нечетное, а сумма квадратов двух нечетных чисел — число четное.)

2. (1 очко.) Квадрат и косоугольный ромб имеют равные периметры. Площадь *какой фигуры* больше? (Ответ: площадь квадрата больше, ибо высота ромба меньше стороны квадрата.)

3. (2 очка.) Доказать, что в любой трапеции треугольники, образованные отрезками диагоналей и боковыми сторонами трапеции, равновелики.

4. (1 очко.) Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. Длина перпендикуляра 6 *см*. Один из полученных отрезков гипотенузы равен 9 *см*. Найти диаметр круга, описанного около треугольника. (Ответ 13 *см*.)

5. (1 очко.) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 *см* и 8 *см*. Найти медиану, проведенную к гипотенузе.

6. (1 очко.) Диагональ делит трапецию на два треугольника, площади которых относятся как 1 : 2. Найти отношение оснований трапеции. (Ответ: 1 : 2)

7. (1 очко.) Радиус глобуса увеличен на 1 *см*. На сколько увеличилась *длина* его экватора? На сколько увеличилась бы длина земного экватора при том же увеличении земного радиуса? (Ответ. на 2π *см*.)

Заслуживают внимания и *конкурсы на решение задач* Два раза в месяц в кабинете математики вывешивается список задач; срок выполнения две недели. Каждая задача в зависимости от ее сложности должна быть оценена некоторым числом очков. Через месяц в очередном бюллетене приводятся наиболее удачные решения, перечисляются фамилии учеников, решивших задачи, с указанием начисленных очков; за красивое или оригинальное решение число очков может быть увеличено. (Начисление очков указывается с первого задания)

В апреле конкурс заканчивается. В последнем бюллетене приводится список всех участников конкурса с указанием места, занятого каждым из них.

В каждом задании следует давать 4—5 примеров. Задания могут быть на определенную тему или по всему курсу. Приведем несколько заданий для конкурса

Для VI класса

1. (1 очко.) Точка M лежит внутри треугольника ABC. Какой углов, BAC или BMC, больше?

2. (1 очко.) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Если $AB > AC$, то какой из углов больше, ADB или ABC, и какой из отрезков, BD или CD, больше?

3. (2 очка.) В треугольнике ABC проведена высота AH. Как расположена точка H по отношению к точкам B и C, когда углы ABC и ACB оба острые, когда один из них тупой и когда один из них прямой?

4. (2 очка.) В треугольнике ABC проведена медиана AM, высота AD и биссектриса AH. Доказать, что H лежит между точками D и M, если стороны AB и AC не равны.

Для VII класса

1. (1 очко.) Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=1; \\ x+y+u=4; \\ y+z+u=6; \\ x+z+u=7. \end{cases}$$

Указание: сложить все уравнения.

2. (1 очко.) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x:y:z:u=2:3:4:5, \\ 3x+2y+5z+4u=104. \end{cases}$$

3. (2 очка.) Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру поместить в начале записи, то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число. (Ответ: 103.)

4. (3 очка.) Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что он опоздает на поезд на 40 минут, если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому остальной путь он проходил со скоростью 4 *км/ч* и прибыл на станцию за 45 минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции? (Ответ: 20 *км*.)

Для VIII класса

1. (2 очка.) Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}.$$

Указание: прибавить и отнять от обеих частей уравнения по 1.

2. (3 очка.) Решить уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

Указание: соединить попарно члены с одинаковыми числителями. Найдем $x=\frac{5}{2}$. Далее, обозначим x^2-5x через y. (Ответ: $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$.)

3. (3 очка.) Сумма цифр трехзначного числа равна 12. Сумма цифр его сотен и десятков кратна 9. Если от искомого числа отнять 99, то полученное число запишется теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Указание:

$$a+b+c=12;$$
$$a+b=9t;$$
$$100a+10b+c-99=100c+10b+a.$$

Единственно возможное значение $t=1$. (Ответ: 453.)

4. (4 очка.) Найти двузначное число, равное сумме куба числа его десятков и квадрата числа его единиц.

Указание: $10a+b=a^3+b^2$;

$$1 \leqslant a \leqslant 9;$$
$$0 \leqslant b \leqslant 9;$$
$$10a-a^3 \geqslant 0;\ a(10-a^2) \geqslant 0;\ a \geqslant 1 \text{ и } 10-a^2 \geqslant 0,$$

отсюда $a^2 \leqslant 10$, a может быть только 1, 2 и 3.

$$b=\frac{1 \pm \sqrt{1+40a-4a^3}}{2};$$

$a=1$ и $a=3$ не годятся. Следовательно, $a=2$. (Ответ: 24.)

5. (2 очка.) α и β корни уравнения

$$x^2-5x+3=0.$$

Не решая уравнения, составить квадратное уравнение с корнями α^4 и β^4. (Ответ: $x^2-341\,343x+81=0$.)

Примечание. Задачи, допускающие несколько способов решения, вызывают у учеников особый интерес, когда сравниваются решения, оцениваются достоинства каждого способа и т. д.

В книге И. П. Трефилова «Как заинтересовать математикой учащихся средней школы» (Учпедгиз, 1957) приведено пять решений следующей задачи: «Дана равнобочная трапеция $ABCD$ (рис. 31), у которой дан угол $CAD=45°$ и диагональ трапеции $AC=c$. Найти площадь трапеции» (Н. Рыбкин, Сборник задач по геометрии, часть I, № 83, § 13). (Ответ: $\frac{c^2}{2}$.)

Секции по решению задач следует поручить и проведение математических олимпиад.

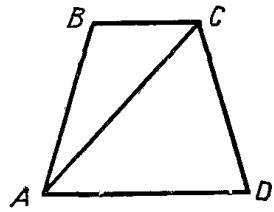


Рис. 31

Общешкольную математическую олимпиаду лучше всего проводить во втором полугодии, полагая, что внеклассная работа по математике поможет подготовить достаточное число участников.

Олимпиада проводится в два тура. Перед первым туром по классам через школьное радио, стенную газету и т. д. проводится разъяснительная работа. В математическом кабинете, в коридорах или в классах вывешивается список тренировочных задач.

Решение тренировочных упражнений должно подготовить учеников к олимпиаде.

В настоящее время имеется сравнительно большая литература, в которой приведены тренировочные задачи к олимпиаде.

Выдача заданий для самостоятельной работы открывает первый тур олимпиады. В течение 1,5—2 месяцев, отделяющих начало олимпиады от заключительного второго тура, примерно один раз в две недели проводятся специальные консультации, на которых разбираются решения тренировочных задач.

К участию во втором туре допускаются ученики, проявившие в той или иной мере активность. Во время второго тура (заключительного) школьной олимпиады учащиеся выполняют письменную работу, для которой отводится 2—2,5 часа.

В V—VI классах работа может состоять из трех арифметических задач: одна повышенной трудности, другая такого же рода, как и задачи тренировочного набора (то есть трудности несколько выше средней), и третья из наиболее простых задач логической серии.

В VII и VIII классах можно дать одну задачу по алгебре, другую по геометрии, третью из логической серии. На основании результата второго тура жюри присуждает звание «лучшего математика V класса», «лучшего математика VI класса» и т. д.

Вечер, посвященный закончившейся олимпиаде, можно провести по следующей программе: 1-е отделение — разбор решения задач, 2-е отделение — торжественная часть. Доклад жюри об итогах олимпиады. Закончить 2-е отделение следует торжественным вручением премий победителям.

На занятиях кружка, в выпускаемых бюллетенях следует предложить несколько математических софизмов. Учителю надо всегда помнить о математической подготовке и о развитии учащихся; очень тонкие рассуждения, вполне доступные ученикам старших классов, могут не дойти до сознания учеников VI—VIII классов, и тем самым роль софизмов будет несколько принижена.

Большое оживление вносят так называемые фокусы. В некоторых случаях, когда при проведении математического вечера необходимо выделить время для проверки решенных задач, можно показать собравшимся несколько фокусов. Можно устроить и специально вечер фокусов; однако такой вечер требует весьма долгой и тщательной подготовки, и затраченное время вряд ли будет соответствовать результатам, а поэтому рекомендовать его не следует. Показывая фокус, необходимо дать возможность ученикам подумать и попытаться разгадать его. Поэтому объяснение фокусов должно быть во второй половине вечера.

Приведем примеры нескольких простейших «фокусов».

1. Определение дня недели.

Для определения дня недели любой даты 1963, 1964 и 1965 гг. необходимо прибавить к данной дате некоторое число (поправку) и разделить полученное число на 7. Остатку, равному 0, будет соответствовать воскресенье, остатку 1 — понедельник, остатку 2 — вторник и т. д., остатку 6 — суббота.

Запомнить все поправки для каждого месяца, то есть 36 чисел, довольно трудно. Эти поправки приведены в таблице.

Таблица 5

Месяцы	1963 г	1964 г	1965 г.
Январь	1	2	4
Февраль	4	0	0
Март	4	6	0
Апрель	0	2	3
Май	2	4	5
Июнь	5	0	1
Июль	0	2	3
Август	3	5	6
Сентябрь	6	1	2
Октябрь	1	3	4
Ноябрь	4	6	0
Декабрь	6	1	2

Поэтому можно заранее на доске или на большом листе маги записать следующие двенадцать чисел.

124	400	460
023	245	501
023	356	612
134	460	612

Первая цифра соответствует поправке для 1963 г., вторая для 1964 г. и третья для 1965 г.

При помощи этих чисел легко найти день недели для любого числа. Например, 23 января 1963 г. Поправка 1. К 23 прибавляем 1 и делим на 7; в остатке получаем 3, то есть 23 января 1963 г. будет среда.

После нескольких отгадываний указывается правило для определения дня недели и разбирается, как можно найти поправки для 1966 и 1967 гг.

На одном из заседаний математического кружка кто-нибудь из учеников может сделать доклад о нахождении дня недели для любой даты любого года (см. И. П. Конгорский, Формула для определения дня недели любой календарной даты нашей эры, в сб. «Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе», Учпедгиз, М., 1955).

2. Существует много способов отгадывания чисел. Приведем один из них.

Задумайте какое-нибудь целое число; помножьте его на 5, к полученному произведению прибавьте 6; найденную сумму помножьте на 4; к произведению прибавьте 9; полученное число еще помножьте на 5 и скажите, сколько у вас вышло.

Я могу сказать задуманное вами число.

Решение. Допустим, что вы задумали 12. Тогда $12 \cdot 5 = 60$; $60 + 6 = 66$; $66 \cdot 4 = 264$; $264 + 9 = 273$; $273 \cdot 5 = 1365$.

Я отбрасываю последние две цифры и полученное число уменьшаю на единицу 13—1=12.

Вы задумали 12.

III. Секция изготовления наглядных пособий.

Математический кружок может оказать существенную помощь кабинету в изготовлении различных наглядных пособий, моделей, таблиц и т. д.

Секция должна тесно увязать свою работу с школьными мастерскими и уроками ручного труда.

Желательно, прежде чем приступить к изготовлению моделей и наглядных пособий, произвести все расчеты, составить схемы и т. д.

Всякое наглядное пособие, модель должны быть изготовлены доброкачественно и красиво. В конце года следует организовать выставку всех работ. Модели и наглядные пособия могут быть сделаны из дерева, металла, плексигласа и картона. Этот вопрос подробно изложен в нескольких пособиях (смотри список дополнительной литературы).

Эта же секция может изготовить различные таблицы для школы, совхоза, учреждения и т. д. В § 5 рассказано об этом подробно.

IV. Некоторые учителя считают возможным создать еще одну *секцию: школьной математической печати.* Независимо от того, будет ли создана такая секция, математический кружок должен информировать учеников о своей работе.

Если число членов кружка невелико, то можно организовать редколлегию, при большом числе членов кружка целесообразнее создать специальную секцию печати.

Математический кружок может выпускать стенгазеты, бюллетени и даже математический журнал.

Заметим, что стенгазета должна выходить регулярно, примерно один раз в месяц, бюллетень — два раза в месяц и журнал — один раз в полугодие.

Статьи и заметки желательно печатать на машинке. Широко следует использовать фото, рисунки, шаржи.

Содержание стенгазеты должно быть весьма разнообразным и интересным. В стенгазете следует помещать:

1) Статьи о математической жизни страны, школы (отчеты о математических вечерах, конкурсах, викторинах, олимпиадах и т. д.). Желательно передать в стенгазете краткое содержание интересных докладов, сделанных на занятиях кружка.

В газете можно помещать портреты победителей олимпиады, конкурсов решения задач, учеников, сделавших на занятиях кружка наиболее удачные доклады, изготовивших хорошее пособие.

2) Краткие биографии выдающихся математиков.

3) Небольшие заметки по истории математики с указанием

литературы, в которой по данному вопросу можно познакомиться более детально.

4) Объяснение смысла и происхождения математических терминов.

5) Время от времени в газете следует сообщать об успеваемости (результаты контрольных работ, оценки за четверть и т. д.).

6) Ответы читателей на их вопросы.

7) Веселые задачи, шутки, юмор.

Содержание математических бюллетеней следующее: задачи на конкурс, решение некоторых конкурсных задач, тренировочные задачи к олимпиадам, математические софизмы, математический юмор. Наиболее сложным является издание математического журнала. В журнале можно более подробно изложить статьи, помещенные в стенгазете или бюллетене: весьма желательны небольшие самостоятельные работы самих учащихся. Приведем несколько примеров: графическое решение квадратного уравнения, правило ложного положения, золотое деление и т. д. Самостоятельное исследование учениками некоторых даже простых проблем без надлежащего руководства учителя вряд ли на первых порах даст положительные результаты. Поэтому вначале учителю придется много внимания уделить работе с теми учениками, которым он предложил разрешить тот или иной вопрос.

§ 28. Математический кабинет

Математический кабинет должен быть в школе центром всей работы по математике. Необходимо, чтобы для кабинета было предоставлено помещение. При кабинете должна быть особая комната для хранения пособий, инструментов и т. д. Желательно, чтобы возле кабинета находилось несколько классов, специально оборудованных для занятий по математике.

Всю внеурочную работу по математике следует сосредоточить при кабинете. Заведующим кабинетом должен быть инициативный преподаватель. Если есть возможность, то хорошо, чтобы при кабинете был специальный лаборант. Важнейшие разделы работы кабинета следующие:

1. *Учебно-методический.*

В кабинете должны находиться:

а) учебные программы и планы работы учителей;

б) протоколы заседаний математической комиссии;

в) методические разработки;

г) набор текстов и образцы контрольных полугодовых и годовых работ;

д) задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах в высших учебных заведениях и техникумах.

Весь этот материал должен постепенно накапливаться, и учитель на основе сравнения этого материала за несколько лет может сделать соответствующие выводы, учесть достоинства и недостатки изложения отдельных вопросов и в связи с этим поставить перед собой проблемы на ближайшие годы.

2 *Учебно-библиотечный.*

Кабинет математики не должен заменять собой библиотеку, однако в нем должны быть:

а) некоторое количество книг по математике, необходимых для непосредственной работы учителей, и каталог всех математических книг, имеющихся в библиотеке;

б) краткие аннотации статей и книг по каждому разделу. Аннотации и подробный разбор наиболее важных вновь вышедших книг и статей должны все время пополняться (если несколько школ расположено близко друг от друга, то можно разделить труд по рецензированию вновь вышедших пособий между отдельными школами и на совместных заседаниях учителей математики производить разбор этих пособий и учебников);

в) *указатель (учебников, статей и т. д.) по каждой теме,* чтобы учитель сразу мог найти материал по интересующему его вопросу;

г) списки рекомендуемой литературы как для учителя, так и для ученика.

Сведения о всех новых или выходящих книгах должны вывешиваться в кабинете (желательно иметь особую доску).

Если школа расположена далеко от крупных центров, то заведующий кабинетом может договориться с ближайшим институтом усовершенствования учителей или с высшим педагогическим учебным заведением о том, чтобы последние сообщали школе о всех новинках, представляющих интерес для школы.

3. *Учебно-производственный*

Вся работа с учениками, временно отстающими от класса, должна быть сосредоточена при кабинете Эффективная помощь для таких учеников может заключаться:

а) в организации консультаций;

б) в создании условий в кабинете для дополнительной работы и выполнения домашних заданий (рабочее место, книги, пособия и т д).

4 *Общественно-массовый.*

При кабинете должна быть сосредоточена массовая работа по математике, а именно:

а) выпуск математических бюллетеней и стенгазет;

б) проведение математических олимпиад, конкурсов, викторин, вечеров, докладов и т. д.;

в) рекомендация литературы для самостоятельного изучения с последующим обсуждением на математическом кружке;

г) рекомендация тем для самостоятельной исследовательской работы учащихся (конечно, темы должны быть по силам школьникам);

д) регулярное вывешивание для самостоятельного решения особо интересных задач повышенной трудности. Необходимо вывешивать фамилии учащихся, давших лучшие решения, и приводить их решения.

5. *Хранение и изготовление пособий.*

В кабинете должен быть не только каталог наглядных пособий, но и указатель, какие пособия по какой теме могут быть использованы. Необходимо, чтобы в кабинете имелось все необходимое оборудование для изготовления наглядных пособий: небольшие тиски, столярный и токарный верстаки, весь необходимый набор инструментов для работы по дереву, металлу и картону.

В кабинете желательно иметь:

а) набор моделей геометрических фигур и тел;

б) модели для лучшего усвоения решения задач, в особенности по стереометрии. Необходимо изготовлять такие модели постепенно, из года в год, с тем чтобы для каждой задачи, представляющей затруднения для учащихся, имелась соответствующая модель;

в) наглядные пособия, помогающие усвоить доказательство теорем;

г) набор тел для лабораторных занятий, например 30—40 деревянных или металлических кругов различного диаметра для измерения площади круга или длины окружности;

д) графики алгебраических и трансцендентных функций, встречающихся в школьном курсе математики средней школы;

е) большие стенные таблицы, например: таблица простых чисел, квадратов чисел, степеней числа 2 и т. д.;

ж) портреты русских математиков с указанием некоторых биографических данных и краткой аннотацией их работ;

з) отдельные стенды для вывешивания тем самостоятельной работы учащихся, например: «Различные системы счисления», «Различные способы умножения», «Различные доказательства теоремы Пифагора» и т. д. Темы должны время от времени заменяться в соответствии с проходимым в классе материалом.

Большой интерес представляет математический зал, организованный при школе № 78 Ленинграда заслуженной учительницей Е. Л. Калмыковой. В школьном коридоре размещены стенды, каждый из которых посвящен какому-нибудь вопросу математики, например: письменная нумерация, различные системы счисления, распределение простых чисел и т. д. Имеются в зале также стенды, посвященные отдельным математикам с краткой биографией их и перечислением важнейших работ. В математическом зале имеются стенды, содержащие олимпиадные зада-

чи, занимательные задачи, математические газеты и т. п. Время от времени материал отдельных стендов заменяется новым. Математический зал вызывает интерес и любовь к математике у многих учащихся школы.

Нужно помнить, что кабинет создается годами. Лучшими помощниками будут являться ученики — любители математики. Большинство пособий может быть выполнено силами учащихся; необходимо только требовать, чтобы любое пособие было математически грамотно и художественно выполнено. Дело заведующего кабинетом организовать его и руководить активом учащихся.

Часть вторая
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

ГЛАВА I
АРИФМЕТИКА КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

§ 1. Цели преподавания арифметики

Кроме общих целей воспитания и обучения, которые преследует преподавание математики в советской школе, преподавание арифметики имеет специальные задачи, обусловленные особенностями арифметики как математической дисциплины.

«Целью изучения арифметики в восьмилетней школе является развитие вычислительных навыков в действиях над целыми и дробными числами, ознакомление с наиболее распространенными в повседневной жизни зависимостями величин, изучение простейших сведений по геометрии, применение полученных знаний при решении задач и выполнении расчетов практического характера». (Программы восьмилетней школы. Математика, изд. «Просвещение», 1964, стр. 7).

§ 2. Научный и школьный курсы арифметики

Арифметика (по гречески «аритмос» — число) есть учение о числах. Современное понятие числа абстрактно, оно охватывает различные множества: множество натуральных чисел (1, 2, 3, 4, ...), множество целых чисел (0, ± 1, ± 2, ± 3, ...), множество рациональных чисел, вещественных, комплексных и т. д. Натуральные числа являются основным множеством. Затем происходит расширение числовой области путем введения дробных чисел, отрицательных и т. д. Расширение числового множества всякий раз сопровождается новыми определениями равенства, суммы и произведения, причем новые определения вводятся так, чтобы по возможности сохранялись законы арифметических действий.

Научный курс арифметики представляет логическую систему, которая раскрывается путем аксиом, определений и теорем.

В школьном курсе арифметики изучаются только натуральные числа, дробные числа и действия над ними, а также приложения арифметики к разрешению практических вопросов.

Изложение школьного курса, опираясь на научные основы предмета, должно удовлетворять и требованиям педагогики. Изучение арифметики необходимо начать с выработки у учеников представлений и понятий арифметического характера на конкретном материале (единица, число, счет и т. д.) и постепенно приучать школьников к обобщениям.

В начальных классах нашей школы изучается подготовительный курс, а в V и VI классах систематический курс арифметики. Для установления преемственности в обучении IV и V классах в программу арифметики V класса включена тема «Целые числа», которая посвящена расширению, систематизации и обобщению знаний о нумерации и четырех действиях с многозначными числами.

§ 3. Курс арифметики в начальных классах школы

Основным содержанием программы I—IV классов по арифметике являются целые числа и действия над ними.

В объяснительной записке к программе начальных классов 1963 г. указано: «Одной из основных задач обучения арифметике в начальной школе является формирование у учащихся прочных навыков письменных и устных вычислений». «Наряду с устными и письменными вычислениями необходимо уделить достаточное внимание формированию у детей навыков сложения и вычитания на счетах, которые находят широкое применение в жизни». Большой и важной составной частью курса арифметики в начальных классах являются арифметические задачи. «Очень важно, чтобы в школе решались не только готовые задачи, данные в задачнике, но и задачи, составляемые детьми на числовом материале, взятом из окружающей действительности».

«Большое внимание в новой программе уделено изучению мер и упражнениям в измерении». «Действия с составными именованными числами должны быть ограничены наиболее легкими случаями вычислений над небольшими двусоставными именованными числами, поскольку это нужно для практической жизни и для подготовки учащихся к изучению десятичных дробей в V классе».

«Знакомство с долями по существу начинается во II классе, где ученикам дается понятие о части числа: в связи с изучением деления они учатся находить половину, треть, четверть и т. д. данного числа и решают задачи на нахождение доли числа».

В III классе «учащиеся на конкретном материале знакомятся с образованием долей $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{10}$ и состоящих из них дробей, с их записью, раздроблением и превращением. В IV классе решаются более сложные задачи на нахождение дроби числа и числа по одной его доле, с использованием дробей со знаменателями в пределах 10»[1].

Отметим следующие основные положения методики преподавания арифметики в начальных классах школы:

1. При выработке понятий исходят из наглядных пособий и только после ряда упражнений приступают к отвлечениям и обобщениям.

2. Чтобы достичь постепенного формирования понятий и усвоения вычислительных приемов, начальный курс арифметики располагают по концентрам.

Первый концентр — счет, цифры, сложение и вычитание в пределах десятка.

Второй — нумерация и арифметические действия в пределах двух десятков.

Третий — то же в пределах сотни.

Четвертый — то же в пределах тысячи.

Пятый — то же над числами в пределах миллиона.

Шестой — то же над числами любой величины.

При таком порядке обучения: а) на каждом концентре обучения понятия имеют ту степень отвлеченности и общности, которая соответствует умственному развитию детей, б) каждый следующий концентр, давая ученикам новые знания, охватывает вместе с тем весь предыдущий материал. Поэтому ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно и вполне им овладевает.

В настоящее время, учитывая возросшие интересы и познавательные способности советских детей, проводятся эксперименты в области сокращения концентров в начальных классах школы[2].

3. При выработке понятий о действиях применяют решение и составление учениками простых задач.

Важнейшим условием успешного обучения арифметике является высокая активность учащихся в процессе усвоения ими учебного материала. Этому способствует правильная организация самостоятельной работы учащихся на всех этапах урока и в процессе выполнения ими домашних заданий[3].

---

[1] Объем геометрических сведений в начальных классах рассмотрен в IV части данной книги, § 3 и 4.

[2] Проводятся подобные эксперименты несколькими научными учреждениями, в том числе лабораторией воспитания и развития Института теории и истории педагогики АПН РСФСР, в Ленинграде на кафедре начальной школы педагогического факультета Педагогического института имени А. И. Герцена и др.

[3] См. объяснительную записку к программе начальных классов 1963 г.

§ 4. Систематический курс арифметики

Порядок расположения материала в программе восьмилетней школы.

V класс

1. Натуральные числа.
2. Обыкновенные дроби.
3. Десятичные дроби.
4. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин.
5. Повторение.

В программе выделяется время на проведение работ по измерениям на местности [1].

VI класс

1. Приближенные вычисления.
2. Проценты.
3. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин.
4. Повторение.

В связи с задачами политехнического обучения в рассматриваемой программе, как и в программе предыдущих лет, начиная с 1954 г., большое внимание уделено вычислениям на счетах, работе с таблицами, построению простейших диаграмм, измерениям на местности.

В *систематическом курсе арифметики,* в отличие от начального, усиливается внимание к *логическим элементам.* Уже в начальной арифметике содержится материал для развития дедуктивного мышления: общие суждения, основанные на частных конкретных примерах, становятся затем источником других частных суждений, однако эти суждения не облечены в форму точных математических умозаключений и оформляются только впоследствии в систематическом курсе арифметики.

Например, представление о законах действий возникает у учащихся в начальной школе, и законы применяются ими в письменных и устных вычислениях, но точная формулировка, запись законов в общем виде вводится лишь в систематическом курсе.

В школьном курсе арифметики, даже систематическом, не употребляются термины «аксиома», «теорема», «доказательство» — эти понятия малодоступны учащимся V класса, и сущность их до сознания школьников не доходит.

---

[1] См. ч. IV, § 10.

Весь материал школьного курса арифметики строится в виде определений, свойств, правил. Очень большое место занимают правила, так как они дают руководство к применению установленных понятий при вычислениях. Во многих случаях правила вскрывают те операции над числами, которые подразумеваются в определениях, то есть дают иную формулировку определениям, в некоторых — они заменяют логическое определение. Например, правило сложения дробей заменяет логическое определение действия сложения дробей, правило умножения на дробь вскрывает те операции над числами, которые подразумеваются в определении. Найти дробь числа — это и значит разделить данное число на знаменатель дроби и полученное частное умножить на числитель или умножить данное число на числитель дроби и полученное произведение разделить на знаменатель.

Суждения, выражающие свойства, по существу являются теоремами.

Но нельзя превращать арифметику в собрание правил; правило должно завершать рассуждения. Необходимо добиваться сознательного усвоения правил учащимися, и не следует требовать заучивания их наизусть, а можно разрешать учащимся излагать их своими словами.

§ 5. Общие методические принципы изучения систематического курса арифметики

1. Материал излагается в определенной системе.

2. Обучение строится с расчетом достигнуть наибольшей сознательности усвоения материала и самостоятельности мышления.

Для достижения поставленной цели необходима активизация учебной работы учащихся.

Одним из лучших способов достижения этой цели служит предложенный русским методистом Шохор-Троцким *метод целесообразных задач,* который состоит в том, что при помощи целесообразно подобранной системы упражнений ученики приходят к самостоятельным выводам.

«Задачи должны предшествовать всяческим определениям и правилам, а не только следовать за ними».

Они позволяют: а) привести учеников к мысли о необходимости нового рассуждения или нового понятия, б) уяснить самую цель, самый смысл того или иного рассуждения и в) привести к сознанию, что необходимо изобрести прием более простой, чем тот, который в данную минуту известен, г) уяснить различные в логическом отношении способы применения одного и того же рассуждения, д) сделать совершенно понятными различные в сло-

весном отношении способы выражения требований, приводящих к одним и тем же результатам, и т. д.[1].

Задачи понимаются здесь в широком смысле слова, как всякого рода арифметические упражнения, включая различные измерения, изготовление чертежей, пособий.

3. Большое внимание уделяется доступным логическим обоснованиям выводов.

4. Обучение должно сопровождаться особой наглядностью в виде таблиц, чертежей схем, выявляющей основные наиболее сложные логические этапы математических рассуждений.

5. Большое внимание уделяется рациональным приемам вычисления.

6. Полученные выводы должны быть использованы для решения разного рода задач с практическим содержанием.

7. Никакие методические приемы, имеющие в виду облегчение усвоения математики, не должны противоречить требованиям науки.

8. Необходимо соблюдение преемственности в обучении арифметике IV и V классов.

Осуществлению преемственности в обучении IV и V классов помогает взаимопосещение уроков учителями IV и V классов, взаимное изучение методов работы. Учителя пятых классов часто недостаточно знают методы обучения в начальных классах, излагают новый материал сложно и долго, не учитывая силы учеников, не разъясняют тщательно домашних заданий, резко изменяют характер проверки и оценки знаний. Ослабляют контроль за домашней и самостоятельной работой школьников.

Преемственность в методах обучения состоит в том, чтобы в ходе изучения материала больше привлекать учеников к активной работе, тщательно разъяснять им задания, которые даются для самостоятельной работы; больше внимания уделять ведению тетрадей по арифметике и контролю за ними[2]. Преемственность в содержании обучения состоит в том, что при изучении темы «Натуральные числа» знания учащихся приводятся в систему, вносятся новые элементы, добавляется теоретический материал[3].

---

[1] См. [186]

[2] См [157]

[3] См гл. III «Натуральные числа».

ГЛАВА II

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Обучение арифметике на протяжении всех лет сопровождается решением задач, начиная с задачи-картинки в I классе и кончая решением сложной задачи, требующей особых приемов и достаточно тонких рассуждений, в V и VI классах.

Путем решения задач формируются различные математические понятия, осмысливаются различные арифметические операции. Задачи часто служат основой для выводов некоторых теоретических положений, содействуют обогащению и развитию правильной речи ученика, являются звеном, связывающим теорию с практикой, сближают обучение с жизнью Задачи соответствующего содержания содействуют коммунистическому воспитанию школьников. Велика роль задач в развитии логического мышления учащихся, в выработке умения устанавливать зависимость между величинами, делать правильные умозаключения.

Знания, умения и навыки, приобретаемые при обучении арифметике, и в частности при решении задач, развитие при этом логического мышления составляют основу для изучения алгебры и геометрии и для дальнейшего математического образования учащихся.

Под *арифметической задачей* понимается требование определить числовое значение некоторой величины по данным числовым значениям величин, находящихся друг к другу и к искомому значению в указанных соотношениях.

Таким образом, для решения задачи необходимо условие, содержащее: а) числовые значения величин, б) указание на некоторые зависимости между данными величинами и между данными и искомыми, в) вопрос, для ответа на который требуется найти искомое число.

Задачи, в которых зависимость между данными и искомыми числами представлена в явной форме — указанием, какие действия и в какой последовательности надо совершить над данными,

чтобы получить искомое число,— обычно называются *числовыми примерами* Для решения таких примеров от учащихся требуется умение разобраться в порядке действий, указанных символами, и произвести самые действия. Такие упражнения способствуют преимущественно развитию и закреплению вычислительных навыков, усвоению свойств арифметических действий.

Задачи, в которых зависимость между данными и искомыми выражена словами, так же как и вопрос задачи, называются собственно задачами или задачами с текстом.

Разберем методику решения задач с текстом.

§ 6. Виды задач и приемы решения их

В настоящее время в учебной и методической литературе задачи делят по способу их решения на нетиповые и типовые. Для решения задач первого вида надо знать зависимость между величинами, которая или установлена условием, или выясняется путем несложных рассуждений, например: стоимость продукта равна цене, умноженной на количество продукта; путь равен произведению скорости на время движения (при равномерном движении). Для решения этих задач надо знать прямые и обратные действия и уметь применять их. Нетиповые задачи не требуют никаких особых рассуждений и приемов.

К типовым задачам относят обычно задачи, требующие определенных приемов решения, которые ясно выступают лишь после некоторых рассуждений, характерных для данного вида задач. Каждый прием решения типовой задачи может быть выражен составлением и решением уравнения или системы уравнений. Так, например, задача на нахождение двух чисел по их разности и отношению решается при помощи системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=a; \\ \dfrac{x}{y}=b \end{cases}$$

Задача на исключение одного из неизвестных способом замены решается при помощи системы уравнений:

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ y=x+d. \end{cases}$$

В отдельных случаях способ решения выделяется при помощи указания задач, характерных для данного способа, например: задачи на движение в одном или в противоположных направлениях, задачи на совместную работу.

В программу начальных классов включены следующие типы задач: на нахождение неизвестного по двум разностям, на встречное движение, на вычисление среднего арифметического, на нахождение двух чисел по сумме и кратному отношению.

В объяснительной записке к программе по арифметике восьмилетней школы указано, что в разделе «Натуральные числа» повторяется решение задач на нахождение чисел по их отношению и сумме (или разности), на движение в противоположных направлениях, на нахождение и применение среднего арифметического нескольких чисел; впервые рассматривается решение задач на движение в одном и том же направлении. В разделе «Обыкновенные дроби» к ранее изученным типам задач добавляются задачи на нахождение дроби числа и числа по его дроби; на совместную работу и на нахождение чисел по их сумме и разности. Практика решения задач и особенно задач с практическим содержанием расширяется при изучении разделов «Десятичные дроби» и «Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин».

В VI классе в программе помещены задачи на проценты и на пропорциональные величины.

За последнее время в методической литературе [1] появился ряд высказываний за перенесение части типовых задач на уроки алгебры, предлагается на уроках арифметики использовать не только арифметический метод решения, но и алгебраический, постепенно приучая учеников к этому методу решения задач.

В журнале «Математика в школе», 1963, № 1, помещены дискуссионные статьи, в которых показывается первостепенное значение решения арифметических задач для развития мышления школьников. «При арифметическом решении задач приходится анализировать данные, соотносить их с искомыми величинами». «Алгебраическое же решение сводится к символической записи одной из возможных связей между искомыми и данными и последующему формальному решению уравнений» [2].

Следует отметить, что те типы задач, которые в объяснительной записке к программе арифметики V—VI классов указаны для решения арифметическим способом, посильны для учащихся.

Алгебраический способ решения задач на уроках арифметики следует вводить главным образом в тех случаях, когда при решении вводится условная единица, и тогда, когда символическая запись не будет затруднять учащихся, например: при решении задач на нахождение двух чисел по их отношению и сумме (или разности), на нахождение чисел по их сумме и разности.

Рассмотрим приемы решения арифметических задач.

---

[1] См.: Н. А. Принцев, Об арифметическом способе решения задач на вычисление, «Математика в школе», 1953, № 2; Б. И. Арясов, О решении задач арифметическими и алгебраическими способами, «Математика в школе», 1954, № 3; А. И. Маркушевич, Об очередных задачах преподавания математики в школе, «Математика в школе», 1962, № 2.

[2] М. А. Марьянский, Наши возражения, «Математика в школе», 1963, № 1.

I *Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и отношению.*

Задачи этого типа решаются в IV классе, а в V классе соответствующие задачи усложняются по содержанию, рассматриваются задачи с дробными данными.

Примеры

1. Который теперь час, если оставшаяся часть суток в $6\frac{1}{2}$ раза меньше протекшей?

Основной прием решения — введение условной единицы [1]. Оставшаяся часть суток — 1 часть. Протекшая часть суток — $6\frac{1}{2}$ части.

1) $1+6\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$ (части).

2) $24:7\frac{1}{2}=\frac{24\cdot 2}{15}=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$ (*ч*).

Следует решать так: оставшаяся часть суток неизвестна, обозначим ее через x *ч*, тогда протекшая часть суток будет составлять $6\frac{1}{2}$ x *ч*.

$$x+6\frac{1}{2}x=24; \quad 7\frac{1}{2}x=24.$$

Пользуясь зависимостью между компонентами и результатом действий, учащиеся находят $x=3\frac{1}{5}$.

3) $24-3\frac{1}{5}=20\frac{4}{5}$ (*ч*).

(Ответ: 20 *ч* 48 *мин.*)

2. Сумма двух чисел равна 272,8, а частное от деления этих чисел 14,5. Найти числа.

3. Сумма двух чисел равна 51. Найти эти числа, если $\frac{2}{5}$ первого числа составляют $\frac{4}{7}$ второго.

Способ 1-й. Примем второе число за единицу. Тогда $\frac{2}{5}$ первого числа будут равны $\frac{4}{7}$ единицы.

Первое число равно

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 2}=1\frac{3}{7}; \quad 1+1\frac{3}{7}=2\frac{3}{7}; \quad 51\cdot 2\frac{3}{7}=\frac{51\ 7}{17}=21;$$

$$51-21=30.$$

[1] Указание для учителя.

Способ 2-й. При помощи графической иллюстрации (рис. 1) учащиеся устанавливают, что I число во столько раз больше II, во сколько $\frac{4}{7}$ больше $\frac{2}{5}$.

1) $\frac{4}{7} : \frac{2}{5} = 1\frac{3}{7}$.

Обозначим II число через x, тогда I число равно $1\frac{3}{7}x$.

2) $x + 1\frac{3}{7}x = 2\frac{3}{7}x$.

Дальнейшее решение совпадает с предыдущим.

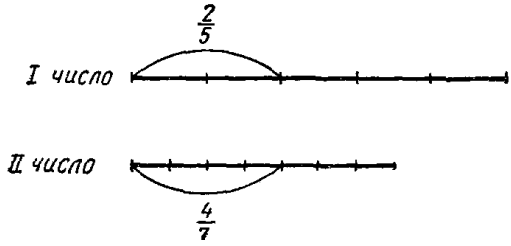


Рис. 1

В VI классе решение сводится к пропорциональному делению Исходя из равенства $\frac{2}{5}x_1 = \frac{4}{7}x_2$, записывается отношение:

$$x_1 : x_2 = \frac{4}{7} : \frac{2}{5} = 10 : 7 \text{ и т. д.}$$

II. *Задачи на нахождение двух чисел по их разности и отношению.*

Примеры.

1. Отец старше сына на 23 года. Сколько лет назад отец был в два раза старше сына, если отцу в настоящее время 56 лет?

2. В классе число отсутствующих учеников равно $\frac{2}{17}$ числа присутствующих. Сколько учеников числится в классе, если присутствует на 30 человек больше, чем отсутствует?

Прием решения задач этого типа отличается от рассмотренного приема тем, что вместо суммы разность неизвестных чисел выражается числом условных единиц.

При решении первой задачи, кроме того, применяется свойство неизменяемости величины разности при увеличении или уменьшении уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число.

В последней задаче:

Число присутствующих x. Число отсутствующих $\frac{2}{17}x$;

$$x - \frac{2}{17}x = 30.$$

1) $x-\frac{2}{17}x=\frac{15}{17}x$; $\frac{15}{17}x=30$;

2) $30:\frac{15}{17}=34$ (уч.) и т. д.

III. *Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности.* Задачи этого типа согласно программе восьмилетней школы решают впервые в V классе.

Примеры.

1. Полупериметр прямоугольника $8\frac{1}{4}$ *см*, его основание больше высоты на $3\frac{1}{4}$ *см*. Вычислить стороны прямоугольника.

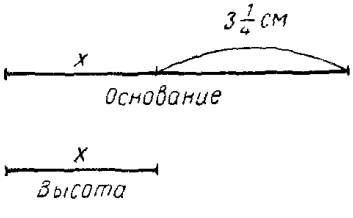


Рис 2

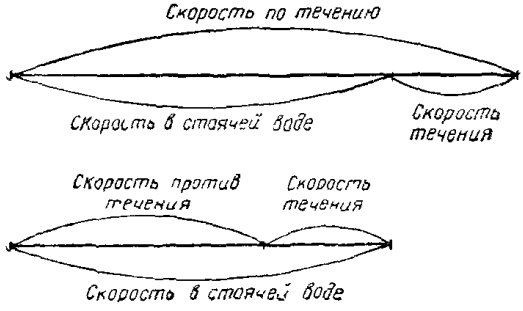


Рис 3

Решение (рис. 2). $2x+3\frac{1}{4}=8\frac{1}{4}$; $8\frac{1}{4}-3\frac{1}{4}=5$ (*см*).

Чему равна удвоенная длина высоты, или чему был бы равен полупериметр, если бы длина основания была равна длине высоты?

$$2x=5;\ 5:2=2\frac{1}{2}\ (см)\ \text{и т. д.}$$

2. Сумма двух чисел равна 7,72, а разность равна 1,22. Найти эти числа.

Основное отличие этой задачи от предыдущей в том, что иначе сформулировано второе условие. Последняя формулировка вызывает затруднения при решении этой задачи. Необходимо предварительно выяснить, что *разность* двух чисел показывает, насколько первое число больше второго.

3. Лодка шла по течению со скоростью $14^1/_2$ *км/ч*, против течения — со скоростью 12 *км/ч*. Какова скорость лодки в стоячей воде и какова скорость течения?

Для решения этой задачи необходимо установить, что скорость лодки по течению равна сумме скорости лодки в стоячей воде и скорости течения, а скорость лодки против течения равна разности скорости лодки в стоячей воде и скорости течения.

Усвоению условия помогает следующая графическая запись условия (рис. 3).

IV. *Задачи на движение в одном направлении.*

К этому типу относятся задачи, в которых известна разность произведений и разность множимых (множителей) при одинаковом неизвестном множителе (множимом), который и требуется найти. И. И. Александров дает название методу решения задач данного типа «Метод остатков». Этим названием и выделяет соответствующий класс задач[1]. Решение задач данного вида следует увязать с изучением изменения произведения с изменением сомножителей.

Примеры.

1. По шоссе едут два велосипедиста в одну и ту же сторону. Расстояние между ними 9 *км*. Первый едет со скоростью 15 *км/ч*, второй догоняет его со скоростью 18 *км/ч*. Через сколько часов второй догонит первого?[2]

Решение.

а) 18 *км* — 15 *км* = 3 *км*. На 3 *км* приближается второй велосипедист к первому за каждый час. (Разность множимых.)

б) 9 *км* : 3 *км* = 3; через 3 *ч* второй велосипедист догонит первого. (9 *км* — разность произведений; 3 *ч* — неизвестный множитель.)

Рассмотренный прием решения применяется не только к задачам на движение.

2. Если в зрительном зале поставить в каждом ряду по 28 кресел, то число мест будет на 20 меньше, чем предполагалось; если же в каждом ряду поставить по 30 кресел, то мест получится на 50 больше предположенного. Сколько рядов кресел должно помещаться в зале и на сколько мест рассчитан зрительный зал?

При решении данной задачи разность произведений равна 20+50=70 (кресел), так как если поставить в каждом ряду по 30 кресел, то не только дополнится 20 мест до предположенного числа мест, но получится на 50 мест больше предположенного.

3. Шофер выехал на автомобиле из города *A* в город *B*. Если он будет ехать со скоростью 35 *км/ч*, то опоздает на 2 *ч*, если же он поедет со скоростью 50 *км/ч*, то приедет на 1 *ч* раньше срока. За какое время нужно проехать этот путь (рис. 4)?

Можно провести следующие рассуждения. Длина пути равна произведению скорости на время. Скорость изменяется. Сохраним время постоянным. Рассмотрим, как изменится длина пути, пройденного в назначенное время, с изменением скорости.

Решение.

а) 35·2=70 (*км*). 70 *км* шофер не доедет до города *B*, если будет ехать назначенное число часов со скоростью 35 *км/ч*.

---

[1] См. [118].

[2] См. [178].

б) На 50 *км* он будет дальше города *B*, если будет ехать назначенное число часов со скоростью 50 *км/ч*.

70+50=120 (*км*). На 120 *км* он проедет во второй раз больше, чем в первый.

в) 50—35=15 (*км*). На 15 *км/ч* скорость во второй раз больше, чем в первый.

г) 120 : 15=8 (*ч*). Число часов, которое должно быть затрачено на весь путь.

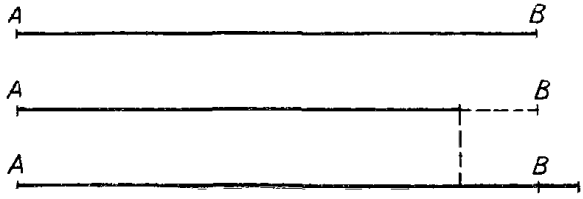


Рис. 4

V. *Задачи на пропорциональное деление.*

Задачи этого типа решаются в IV, V и VI классах. В IV классе решаются без записи отношения, в V классе с записью отношения. Способ решения этого типа задач в VI классе после прохождения темы «Пропорциональные величины» разобран в § 21.

VI. *Задачи, решаемые исключением одного из неизвестных способом его замены.*

Задачи этого типа хотя и не указаны в объяснительной записке к программе, но имеются в стабильном задачнике[1]. Они могут быть использованы на внеклассных занятиях.

Примеры.

1. Путешественник проехал 696 *км* в $21\frac{1}{4}$ *ч*, из которых $16\frac{2}{3}$ *ч* он ехал поездом, а остальное время — пароходом. С какой скоростью он ехал поездом, с какой — пароходом, если пароход проходил в час на $15\frac{3}{4}$ *км* меньше, чем поезд?

При решении определяется расстояние, которое проехал бы путешественник, если бы использовал только пароход (или поезд), то есть скорость движения поезда заменяется скоростью парохода. Благодаря указанной замене длина всего пути уменьшается на расстояние, равное $262\frac{1}{2}$ *км*, так как

$$15\frac{3}{4}\cdot 16\frac{2}{3}=\frac{63\cdot 50}{4\cdot 3}=\frac{525}{2}=262\frac{1}{2}\ (км).$$

696 *км* — $262\frac{1}{2}$ *км* = $433\frac{1}{2}$ *км* — длина пути, которую путешественник

[1] См. [164].

проехал бы за $21\frac{1}{4}$ *ч* пароходом. Отсюда определяется скорость движения парохода.

2. На 3 тонких тетради и 2 толстых тетради израсходовано $38\frac{1}{2}$ листа бумаги. Сколько бумаги пошло на каждую тонкую и толстую тетрадь, если на каждую толстую израсходовано в 4 раза больше, чем на тонкую?

При решении определяется, сколько тонких тетрадей можно сделать из $38\frac{1}{2}$ листа бумаги.

Так как на толстую тетрадь пошло бумаги в 4 раза больше, то вместо одной толстой тетради можно изготовить 4 тонких. Получим, что из $38\frac{1}{2}$ листа бумаги можно изготовить тонких тетрадей $3+8=11$ (тетрадей). Отсюда определяется, сколько пошло бумаги на тонкую тетрадь.

К этому же типу задач по способу решения некоторые авторы [1] относят задачи «на смешение II рода». В этих задачах дается количество и стоимость смеси и цена каждого из веществ, входящих в смесь, а требуется определить количество каждого из смешанных веществ.

На стр. 187—188 приведено решение задачи этого типа.

VII. *Задачи на правило ложного положения.*

В некоторых задачниках задачи «на смешение II рода» отнесены к особому типу, называемому «задачи на предположение» [2], в других — к задачам «на правило ложного положения» [3], то есть к типу, более широкому по сравнению с предыдущим

Сущность метода «ложного положения» в том, что неизвестной величине дают произвольное значение, пользуясь которым вычисляют значение одной из данных величин, устанавливают ошибку. Так как в задачах, решаемых этим способом, данная величина, значение которой определяется через значение неизвестной, есть линейная функция неизвестной, то приращение этой величины пропорционально приращению неизвестной [4]. Пользуясь этим, исправляют значение неизвестной.

При решении задач на смешение II рода [5] путем замены одной величины другой одно неизвестное число приравнивают 0, а другому придают значение, равное сумме двух неизвестных. В этом отличие последнего способа решения от способа «за-

---

[1] См [128].

[2] См. [177].

[3] См. [151]

[4] Указание о характере зависимости данной величины от неизвестной дано для преподавателя

[5] Решение рассмотрено в § 7.

мены», при котором одно неизвестное число заменяется равным ему выражением через другое неизвестное число.

Способ ложного положения — древний способ, применявшийся при решении задач, приводящихся к уравнениям первой степени, еще египтянами в древности. Этот способ рассматривался и в старинном русском учебнике Л. Ф. Магницкого под названием «Фальшивое правило».

Этот способ полезно знать преподавателю, он дает возможность решить арифметически многие задачи.

Пример.

Из колхоза в город, расстояние до которого 48 *км*, отправились одновременно колхозник на лошади со скоростью 7 *км/ч* и почтальон на велосипеде со скоростью 13 *км/ч*. Через сколько часов остаток пути до города для почтальона будет в 3 раза меньше, чем остаток пути до города для колхозника?

При решении рассуждения ведутся так.

Предположим, что через 1 *ч* (можно дать и другие значения) остаток пути до города для почтальона будет в 3 раза меньше, чем для колхозника. Тогда, приняв остаток пути для почтальона *за 1 часть, получим, что остаток пути для колхозника* составит 3 части; разность остатков пути равна 2 частям и равна разности скоростей.

$$13 - 7 = 6\left(\frac{км}{ч}\right);\ 6:2 = 3(км).$$

Остаток пути для почтальона равен 3 *км*, а весь предполагаемый путь

$$13\ км + 3\ км = 16\ км,$$

в действительности весь путь равен 48 *км*, то есть в 3 раза больше Следовательно, искомое число часов должно быть в 3 раза больше, то есть через 3 часа остаток пути до города для почтальона будет в 3 раза меньше, чем остаток пути до города для колхозника.

Решение этой задачи приводит к решению уравнения

$$48 - 7x = 3(48 - 13x),\ \text{откуда}\ 48 = 16x.$$

Имеет место прямая пропорциональная зависимость длины пути от искомого времени.

VIII. *Задачи, решаемые способом уравнивания данных.*

Задачи, решаемые способом уравнивания данных, являются усложненным видом задач типа «Нахождение неизвестного по двум разностям», которые решали в III классе.

Пример.

$3\frac{1}{2}$ *куб. м* березовых дров и $2\frac{1}{2}$ *куб. м* сосновых весят вместе

$3\frac{18}{25}$ *т*, а $4\frac{1}{2}$ *куб. м* березовых и 5 *куб. м* сосновых весят $5\frac{16}{25}$ *т*. Сколько весит 1 *куб. м* березовых и 1 *куб. м* сосновых дров в отдельности?

Предварительно рассматривается задача, в которой значения одной величины даны в обоих случаях равные [1], например:

найти два числа по следующим условиям:

$\frac{1}{3}$ первого числа и $\frac{1}{4}$ второго составляют в сумме 16;

$\frac{1}{3}$ » » » $\frac{1}{7}$ » » » » 13.

При решении последней задачи устанавливается, что первая сумма больше второй, потому что ее второе слагаемое больше, чем у второй суммы. Отсюда разность сумм равна разности вторых слагаемых.

$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$ (второго числа); $16-13=3$; $\frac{3}{28}x=3$; $x=28$.

При решении первой задачи достаточно уравнять в обоих случаях количество или березовых дров или сосновых; проще уравнять количество сосновых дров. Для этого достаточно первую партию дров увеличить в 2 раза, тогда условие задачи изменится так:

7 *куб. м* березовых дров и 5 *куб. м* сосновых дров весят $7\frac{11}{25}$ *т*;

$4\frac{1}{2}$ *куб. м* » » 5 *куб. м* » » » $5\frac{16}{25}$ *т*.

Получилась задача, подобная второй задаче.

Следует учитывать, что некоторые задачи могут быть решены несколькими способами, а поэтому их можно отнести к различным типам. Примером могут служить задачи на смешение II рода, которые могут быть отнесены также к типу задач на пропорциональное деление.

Пример.

Имеются 90-процентная и 70-процентная кислоты. Сколько надо взять той и другой, чтобы получить 1 *кг* кислоты 82-процентной?

При решении можно провести следующие рассуждения.

При смешивании и 90-процентная и 70-процентная кислоты заменяются 82-процентной. При замене 90-процентной кислоты 82-процентной в таком же количестве теряется 8% этого количества чистой кислоты (90%—82%=8%). При замене же 70-процентной кислоты таким же количеством 82-процентной

[1] Задача типа «Нахождение неизвестного по двум разностям».

приобретается 12% этого количества чистой кислоты (82%—70%=12%). Так как в результате при смешивании избыток должен был покрыть недостаток, то 8% количества 90-процентной кислоты (x_1) должны равняться 12% количества 70-процентной кислоты (x_2). Получаем:

$$0{,}08\,x_1 = 0{,}12\,x_2.$$

$$x_1 : x_2 = 0{,}12 : 0{,}08 = 12 : 8 = 3 : 2;\ 3+2=5 \text{ (частей)},$$

$$1000 : 5 = 200\ (г);\ 200 \cdot 3 = 600\ (г);\ 200 \cdot 2 = 400\ (г).$$

(Ответ: 600 *г* 90-процентной кислоты; 400 *г* 70-процентной кислоты.)

IX. *Задачи с практическим содержанием.*

В целях осуществления связи обучения с жизнью необходимо давать задачи, которые подготавливают учеников к практической деятельности. Примеры таких задач приведены в I части книги, § 3.

Большое значение имеют упражнения, связанные с построением и измерением [1]. При изучении дробей учащиеся строят доли линейного, квадратного и кубического дециметра.

I. Можно дать задание:

1. Найти периметр прямоугольной четверти квадратной единицы (*кв. дм, кв. см*) двух видов, размеры которых в линейных единицах:

$$\text{а) } 1 \times \frac{1}{4}; \quad \text{б) } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

Сделать чертеж.

2. Найти площадь поверхности восьмой доли кубического дециметра трех видов, размеры которых в *дм*:

$$\text{а) } 1 \times \frac{1}{8} \times 1; \quad \text{б) } 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}; \quad \text{в) } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

Сделать из плотной бумаги соответствующие модели.

II. При изучении геометрического материала в теме «Десятичные дроби» следует предложить учащимся самостоятельно измерить и найти данные для решения следующих задач:

3. Найти общее количество бумаги, израсходованной на тетрадь, измерив длину и ширину страницы.

4. Определить, достаточно ли света в V классе, если для нормального освещения класса площадь окон должна составлять не менее $\frac{1}{6}$ площади пола.

5. Вычислить объем спичечной коробки.

6. Определить количество обоев шириной 0,5 *м*, необходимое для оклейки комнаты.

III. Группа упражнений на построение диаграмм линейных, прямоугольных и секторных.

---

[1] Примеры задач приведены в ч. IV этой книги.

При изучении дробей полезно строить диаграммы, показывающие распределение частей в целом. Например, предложить изобразить в виде прямоугольника число учеников в V классе, и выделить в этом прямоугольнике части, соответствующие: а) числу учеников, имеющих в четверти оценки только «5» и «4»; б) числу учеников, имеющих оценку «3»; в) числу учеников, имеющих оценку «2». Найти, какую часть от всего числа учеников составляют выделенные части.

В теме «Десятичные дроби» полезно строить диаграммы по данным, выраженным в процентах, например: начертить секторную диаграмму, показывающую состав молока по следующим данным. В молоке содержится: воды — 87,2%, жиров — 3,9%, белков — 3,4%, молочного сахару — 4,65%, минеральных веществ — 0,7%.

Предварительно пятиклассники под руководством учителя изготовляют процентный транспортир. При построении ученики самостоятельно округляют данные с точностью до 0,5%.

Следует предлагать ученикам определять соотношения между данными по готовой диаграмме.

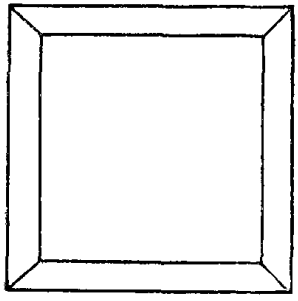


Рис. 5

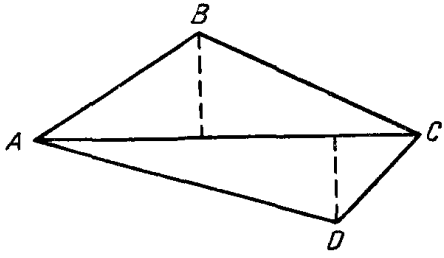


Рис. 6

IV. Следующая группа упражнений — построение плана по данным, полученным непосредственным измерением. В связи с изучением отношений уточняется определение числового масштаба и проводится ряд упражнений, связанных с понятием масштаба.

В эту группу включается и обратная задача: нахождение размеров фигуры по плану, например: «Найти площадь рамки, изображенной на чертеже в масштабе 1 : 10». При решении данной задачи ученики должны самостоятельно установить, какие измерения достаточны для решения задачи, и выполнить их (рис. 5).

В журнале «Математика в школе» [1] описан опыт проведения

[1] См. Рыбаков, Геометрические задачи в V классе, «Математика в школе», 1952, № 4.

решения задач по готовым чертежам. Чертежи были выполнены на листах чертежной бумаги размером 20×15 *см*². На каждом листе был помещен один или два чертежа и тексты задач. Ученикам раздавали чертежи для выполнения решения, копировать чертеж не требовалось. Пример: «Найти площадь, занимаемую лугом, план которого изображен четырехугольником *ABCD*». (Рис. 6.)

Масштаб: 100 *м* в 1 *см*.

В I части данной книги приведены задачи с техническим содержанием. Перед решением такой задачи следует разъяснить ученикам содержание, для чего использовать чертеж или модель, и познакомить их с технической терминологией.

§ 7. Методика обучения решению задач

Обучение решению задач начинается с решения простых задач. *Простые задачи* — это задачи, которые решаются одним действием, например: «Типография отпечатала 32 000 календарей, причем на каждый календарь пошло $\frac{5}{8}$ листа бумаги. Сколько листов бумаги пошло на все календари?»

С такого вида задач и начинается обучение решению задач на умножение дроби на целое число.

Если задача требует для своего решения более одного действия, она называется составной и при решении разбивается на несколько простых задач. В некоторых руководствах по арифметике *составные задачи* названы «сложными». Такое название вносит некоторую путаницу, так как иногда и простые задачи могут оказаться сложными по характеру рассуждений, которые необходимы для решения их. Кроме того, термин «сложные» недостаточно четко указывает на то, что задача состоит из простых задач. Кроме этого деления, задачи различают по структуре условия.

Задачи с приведенным условием.

Встречаются так называемые приведенные задачи. В этих задачах самый текст и построение условия подсказывает порядок, последовательность решения простых задач, из которых состоит данная составная.

Рассмотрим одну из задач с приведенным условием.

«Куплено 3 сорта пряников: $\frac{1}{4}$ *кг* первого сорта по 1 руб. 20 коп. за 1 *кг*; $5\frac{3}{4}$ *кг* третьего сорта по 80 коп. за 1 *кг* и 4,1 *кг* второго сорта по 90 коп. за 1 *кг*. Сколько уплатили за всю покупку?»

Как видно, ход решения задачи в данном случае подсказывается расположением данных.

Неприведенные задачи.

Особую трудность для учеников представляют неприведенные задачи. Структура условия этих задач такова, что числовые данные, необходимые для решения простых задач, разъединены; рядом поставлены такие данные, которые не связаны непосредственно друг с другом. Кроме того, иногда и связь между данными и искомыми выражена неявно и ее надо при изучении условия еще установить.

Вот пример неприведенной задачи.

«Куплено 3 сорта пряников: $\frac{1}{4}$ *кг* первого сорта, $5\frac{3}{4}$ *кг* третьего сорта и 4,1 *кг* второго сорта. Цена 1 *кг* первого сорта 1 руб. 20 коп., второго сорта 90 коп. и третьего — 80 коп. Сколько уплатили за покупку?»

Обучение решению составных задач обычно начинают с решения приведенных задач, затем, переставляя данные, усложняют условие задачи. Такая работа проводится в начальной школе, но и в V классе полезно, изменяя расположение данных в условии, усложнять его.

Схематическая запись условия помогает сделать задачу приведенной (см. стр. 181).

Так как задачи неприведенные значительно труднее, чем приведенные, то для развития навыков в решении их требуется продолжительная работа с учениками и решению их необходимо уделить большое внимание.

После разбора нового теоретического материала надо начинать решать простые задачи с применением вновь изученной теории, а затем переходить к решению составных задач, постепенно усложняя их.

Однако ошибочно считать, что решение простых задач не может вызвать у учащихся никаких затруднений. Это верно, когда условие содержит совершенно понятный для ученика факт, выражает ясную зависимость между данными и искомыми. Но и среди простых задач есть немало таких, которые требуют напряжения мысли в установлении зависимостей между величинами в условии.

Примерами таких задач могут быть следующие:

1. Сколько распилов надо сделать, чтобы бревно распилить на 8 частей?

2. Среднее арифметическое двух чисел 11, а их полуразность 1.

Какова величина большего числа?

3. Если из одной пачки тетрадей переложить в другую 10 штук, то тетрадей в пачках будет поровну. На сколько тетрадей в одной из них больше, чем в другой?

4. Если к числу прибавить 5, то оно делится без остатка на 7.

Каков остаток от деления этого числа на 7?

Ответ на каждую из приведенных задач, может быть, некоторые ученики по соображению дадут довольно быстро, но провести нужные рассуждения смогут, вероятно, немногие.

Простые задачи следует решать при подготовке к решению составных задач, в которые они входят. Их следует решать с подробным разбором хода рассуждений, чтобы установить, какие действия надо выполнить для получения ответа на поставленный вопрос.

В условии составной задачи хотя бы в два действия по меньшей мере одно из чисел, необходимых для решения, отсутствует, его нужно еще найти. Если же задача состоит из ряда простых задач, то таких неизвестных чисел несколько. Расчленение составной задачи на простые в определенной последовательности выясняется на основе зависимости между величинами, заданными в условии, и теми, какие могут быть найдены в этой последовательности. Эти пока что скрытые величины должны явиться необходимым дополнением к данным условия.

Работа ученика при решении задачи слагается из следующих этапов:

а) восприятие и сознательное овладение условием задачи;

б) разбор задачи и составление плана решения;

в) собственно решение и проверка;

г) дополнительная работа после решения задачи: решение задачи другими способами; запись решения в виде формулы; составление задач, аналогичных данной; составление и решение подобных задач с данными, взятыми из окружающей жизни (связь с жизнью).

Изучение условия задачи и составление плана решения

Процесс установления зависимости между данными и искомыми условия, выяснение, каких данных недостает или какие из них представлены в условии скрытыми, неявно выраженными, и является первым этапом решения задачи — изучением условия (иногда называемым анализом условия).

Изучение условия ведет к составлению плана решения, за планом решения идет решение с объяснениями, а затем проверка решения.

Изучение условия начинается с внимательного чтения его и уяснения конкретного содержания задачи, вопроса задачи. Часто ученик затрудняется решить задачу потому, что не представляет реального факта, описанного в условии задачи; иногда не знает смысла употребленных в условии терминов. Объяснения смысла отдельных терминов и понятий учитель должен давать сам, пользуясь для этого конкретными простыми задачами.

Уяснить содержание задачи, зависимость между данными величинами помогает схематическая запись условия задачи.

Удачная запись довольно часто подсказывает план решения задачи. Приведем примеры.

З а д а ч а. Составлена смесь из 10,5 *кг* сушеных груш, 15,2 *кг* сушеных яблок и 8,5 *кг* сушеных слив. Вся смесь стоила 35,65 руб. Сколько стоил 1 *кг* сушеных груш, 1 *кг* сушеных яблок и 1 *кг* сушеных слив, если 1 *кг* сушеных груш стоил на 30 коп. дороже 1 *кг* сушеных яблок, а 1 *кг* яблок стоил на 20 коп. дороже 1 *кг* слив? Запись условия.

10,5 *кг* груш	1 *кг* груш дороже на 30 коп.	
	1 *кг* яблок	Стоимость всей смеси 35,65 руб.
15,2 *кг* яблок	1 *кг* яблок на 20 коп. дороже	
	1 *кг* слив	
8,5 *кг* слив		

Какова цена 1 *кг* каждого сорта фруктов?

Если условие можно выразить графически, то этим следует воспользоваться, так как графическая запись условия обычно особенно выразительна.

Схематическую запись условия нескольких задач учитель проводит сам, сопровождая соответствующими пояснениями. После этого для схематической записи условия задач вызываются к доске учащиеся. Аналогичная работа проводится и с графической записью условия.

З а д а ч а. Колхоз засеял свеклой три участка земли, всего 964,46 *га*. Второй участок на 26,4 *га* меньше первого и на 58 *га* меньше третьего. Сколько гектаров в каждом участке?

Графическую запись условия смотрите на рис. 7.

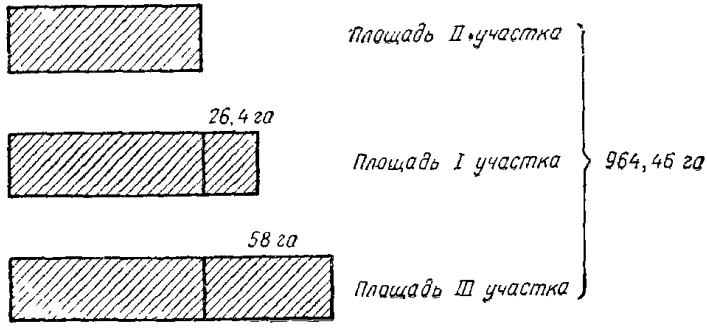
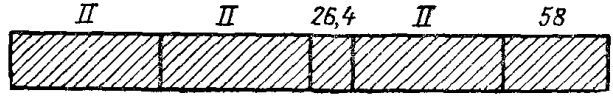


Рис. 7

Графические иллюстрации могут облегчить ученику решение задачи. К данной задаче с этой целью может быть сделан такой чертеж (рис. 8). Из этого чертежа видно, что 964, 46 *га*



Площадь всех участков.

Рис. 8

включают 3 вторых участка и еще $26{,}4+58=84{,}4$ (*га*). Дальнейший ход решения ясен.

Пример задачи, которая в стабильном задачнике[1] отнесена в число задач повышенной трудности, благодаря графической иллюстрации делается задачей средней трудности.

З а д а ч а. Мальчик накопил на покупку фотоаппарата 5.2 руб. Остальные деньги ему дали отец и два старших брата. Оказалось, что первый брат дал 25% суммы, собранной на покупку без него, второй брат дал $33\frac{1}{3}\%$ суммы, собранной на покупку без него, и отец дал 50% суммы, собранной на покупку без него. Сколько рублей заплатил мальчик за фотоаппарат? (Рис. 9).

Для данной задачи графическая иллюстрация отражает не только условие задачи, но и частичный анализ условия.

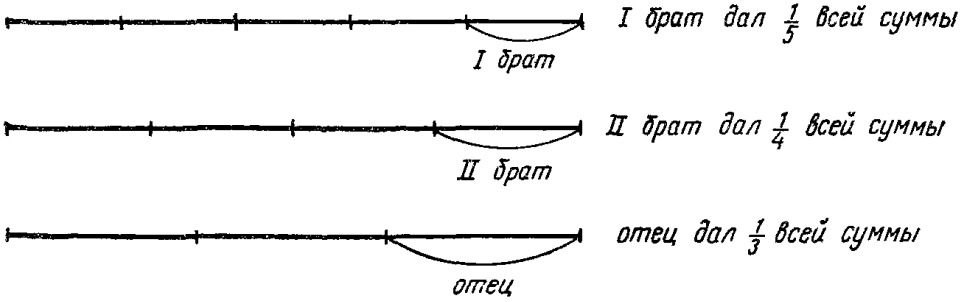


Рис. 9

Дальнейший ход решения ясен.

Следующий этап изучения условия связан с длительными рассуждениями, в основе которых лежит так называемый аналитический путь мышления (анализ) или синтетический путь (синтез), в результате чего составляется план решения задачи.

Основное различие названных путей мышления разобрано в I части данной книги (см. § 8). Из этого параграфа нам известно, что в любом случае рассуждения при решении задач являются сложными, а самый процесс мышления протекает как *аналитико-синтетический*.

Действительно, когда мы при анализе идем от вопроса задачи и подбираем к нему данные, то делаем это не абстрактно, а исходя из условия задачи, из представления о ней в целом, то есть пользуемся синтезом. Наоборот, начав рассуждение с синтеза, то есть остановившись на некоторой взаимозависимой паре данных и подобрав к этим данным вопрос, мы затем проверяем, ведет ли намеченная комбинация к решению основного вопроса задачи.

---

[1] См. [164], задача № 1350.

Покажем на примере, как применяется анализ и синтез для составления плана решения задачи.

Задача. Колхоз получил за год от каждой из 56 коров по 3,4 *т* молока, от каждой из других 27 коров — по 4,8 *т*. Сколько сливок получили из всего молока, если из 2 *т* молока получали 0,32 *т* сливок?

Синтетическое рассуждение и решение изобразим схематически.

Таблица 1

Зная	можно узнать	Каким действием
число коров в I партии и количество молока, полученного от одной коровы,	количество молока, полученного от всех коров I партии.	3,4·56=190,4 (*т*)
число коров во II партии и количество молока, полученного от одной коровы этой партии,	количество молока, полученного от всех коров II партии.	4,8·27=129,6 (*т*)
количество молока, полученного от I и II партий коров,	количество всего полученного молока.	190,4+129,6=320 (*т*)
количество сливок, полученных из 2 *т* молока,	количество сливок, полученных из 1 *т* молока.	0,32 : 2=0,16 (*т*)
общее количество молока, полученного колхозом, и количество сливок, полученных из 1 *т* молока,	сколько сливок можно получить из всего молока.	0,16·320=51,2 (*т*)

Как видно из схемы, мы последовательно выбирали зависимые между собой и нужные нам пары данных в условии чисел, проверяя каждый раз, приближаемся ли мы к получению ответа при выбранных комбинациях. Следует заметить, что выделение и решение простых задач шло в этом случае параллельно.

Однако мы могли бы те же данные комбинировать иначе, например могли бы узнать, на сколько больше молока колхоз получил от одной коровы I партии, чем от одной коровы II партии. Такая комбинация данных дала бы нам верный, но не нужный для решения данной задачи частный ответ.

Приведенная схема могла бы быть представлена и так (рис. 10).

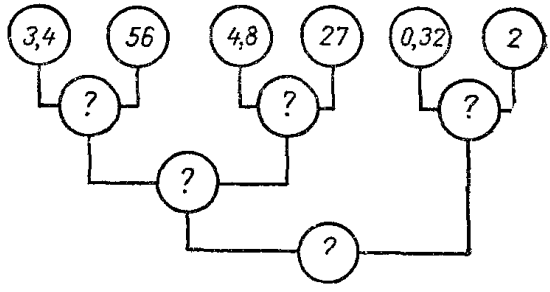


Рис. 10

Таблица 2

Аналитическое рассуждение и решение той же задачи

Чтобы узнать	Надо найти	Дано	Вычислили	Решение и ответы на вопросы первой колонки
сколько сливок можно получить из сданного молока,	сколько сливок можно получить из 1 *т* молока, сколько молока получил колхоз.		0,16 *т* 320 *т*	0,16·320=51,2(*т*)
сколько сливок можно получить из 1 *т* молока,	количество сливок, количество молока, из которого получены сливки.	0,32 *т* 2 *т*		0,32 : 2=0,16 (*т*)
сколько молока получил колхоз,	сколько молока получено от I партии коров, сколько молока получено от II партии коров.		190,4 *т* 129,6 *т*	190,4+129,6= =320 (*т*)
сколько молока получено от I партии коров,	количество молока, полученного от одной коровы I партии, количество коров.	3,4 *т* 56 коров		3,4·56=190,4 (*т*)
сколько молока получено от II партии коров,	количество молока, полученного от одной коровы II партии, количество коров.	4,8 *т* 27 коров		4,8·27=129,6 (*т*)

Приведенная схема могла быть представлена и так (рис. 11).

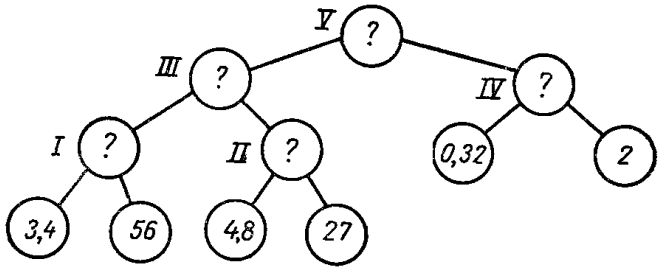


Рис 11

Аналитический способ рассуждения приучает учеников к строгой последовательности мышления и в большей мере способствует развитию логического мышления учащихся, чем синтетический. Этим способом следует пользоваться всегда, когда преподаватель не уверен, что план решения задачи для учеников ясен. Возможно частичное применение анализа в случае, если дальнейший ход решения задачи ясен.

Из рассмотрения схем видно взаимно обратное направление рассуждений — синтетического и аналитического.

Если бы решение задачи было оформлено в виде одной из указанных схем, то это могло бы исчерпать собой два этапа решения: изучение условия и само решение с объяснением. Однако на практике такие схемы при решении задач не составляются — они громоздки[1], а рассуждения проводятся устно, *причем анализ или синтез в чистом виде встречается редко.* Наряду с устным составлением плана решения задач следует требовать для некоторых задач письменных объяснений, причем устное составление плана должно всегда предшествовать этим объяснениям.

Решение задачи с объяснением. Проверка решения задачи

Решение с объяснением включает в себя действия над числами и объяснение, почему выбрана данная комбинация чисел и выполняется именно данное действие.

Объяснение решения задачи может быть представлено в различной форме.

Проверку решения задачи или полученного ответа можно делать не всегда, но познакомить учащихся с тем, как ее проводить, надо. *Один способ* проверки решения задачи состоит в решении новой задачи, в которой одно из данных принято за искомое, а найденное искомое число помещено в условие в качестве данного. Задачу при такой проверке надо считать решенной верно в том случае, когда ответ новой задачи совпадает с данным первоначальной задачи.

Такая работа громоздка и потому практически проводится редко.

Второй способ состоит в проверке, удовлетворяет ли найденный ответ условию задачи. При проверке решения желательно использовать те связи или комбинации между данными, которые при решении прямо не использовались.

Примеры записи решений задач с объяснениями.

Задача 1. Два трактора вспахали поле за 6 *ч*. Первый трактор, работая один, мог бы вспахать это поле за 15 *ч*. За сколько часов вспахал бы это поле второй трактор, работая один?

Анализ условия. В условии задачи дано число часов, которое потребуется двум тракторам для того, чтобы вспахать поле при одновременной работе, и число часов, которое потребуется первому трактору для того, чтобы вспахать то же поле. Для того чтобы найти производительность в час двух тракторов и одного первого, необходимо знать площадь поля. Примем площадь поля за единицу. Тогда, зная производительность двух

[1] Схема составлена для преподавателя, чтобы показать логические этапы рассуждения.

тракторов и первого, сможем узнать производительность второго трактора и время работы.

План решения. 1) Найдем, какую часть поля вспахали два трактора, работая вместе, в 1 *ч*. 2) Найдем, какую часть поля мог бы вспахать один первый трактор в час. 3) Найдем, какую часть поля мог бы вспахать один второй трактор в час. 4) Найдем число часов, которое потребовалось бы второму трактору, чтобы вспахать поле.

Решение.

1) $1:6=\frac{1}{6}$ часть всего поля вспахали оба трактора за 1 *ч*.

2) $1:15=\frac{1}{15}$ часть всего поля мог бы вспахать первый трактор за 1 *ч*.

3) $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ часть всего поля мог бы вспахать второй трактор за 1 *ч*.

4) $1:\frac{1}{10}=10$ (*ч*) — время, за которое вспахал бы поле второй трактор.

Проверка. Положим известным, что второй трактор мог бы вспахать все поле за 10 *ч*, а первый за 15. Узнаем, за сколько часов вспахали поле два трактора. 1) $1:10=\frac{1}{10}$; 2) $1:15=\frac{1}{15}$; 3) $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$; 4) $1:\frac{1}{6}=6$ (часов).

Задача 2[1]. Колхоз собрал урожай клевера с трех участков. С первого участка было собрано 37% всего урожая, а число тонн клевера, собранного со второго участка, так относилось к числу тонн, собранных с третьего участка, как $1\frac{4}{5}:4\frac{1}{2}$. Сколько тонн клевера собрал колхоз, если известно, что с первого участка было собрано клевера на 91,2 *т* больше, чем со второго участка?

Анализ условия. В условии дано число, выражающее вес части клевера — это 91,2 *т*. Если узнать, какой процент от всего урожая составляет этот вес части клевера, то узнаем весь урожай. Следовательно, надо остальные данные выразить либо в процентах, либо в частях от урожая.

План решения. Определим, какой процент всего урожая собран со второго и третьего участков вместе, а затем с каждого из них в отдельности, пользуясь заданным в условии отношением.

Определив разность в урожае с первого и второго участков в процентах к общему урожаю, мы найдем весь урожай клевера, так как знаем выражение этой разности в единицах веса.

---

[1] Для учеников VI класса.

Решение с объяснением. За 100% принимаем вес всего урожая. Так как в условии сказано, что 37% от всего урожая собрано с первого участка, то:

1) $100\% - 37\% = 63\%$ всего урожая приходится на второй и третий участки вместе.

2) $1\frac{4}{5} : 4\frac{1}{2} = \frac{9}{5} : \frac{9}{2} = 18 : 45 = 2 : 5$ — отношение урожая со второго участка к урожаю с третьего участка.

Урожай же со второго и третьего участков составляет 63% всего сбора, поэтому примем 63% за $2+5=7$ единиц, и тогда:

3) $(63\% : 7) \cdot 2 = 18\%$ всего урожая снято со второго участка.

4) $37\% - 18\% = 19\%$; на 19% снято с первого участка больше, чем со второго.

5) Обозначим вес всего урожая в тоннах через x, тогда $19\% x = 91{,}2$.

$91{,}2 : 0{,}19 = 9120 : 19 = 480$ (m); $x = 480$. Вес всего урожая равен 480 m.

Проверка. 1) $480 \cdot 0{,}37 = 177{,}6$ (m) собрано с первого участка.

2) $177{,}6 - 91{,}2 = 86{,}4$ (m) собрано со второго участка.

3) $177{,}6 + 86{,}4 = 264$ (m) собрано с первого и второго участков вместе.

4) $480 - 264 = 216$ (m) собрано с третьего участка.

5) $86{,}4 : 216 = 2 : 5 = 1\frac{4}{5} : 4\frac{1}{2}$.

(Ответ: 480 m.)

Задача 3. На платформы погружено 196 сосновых и еловых бревен, общий вес которых 58,8 T. Сколько в отдельности погружено тех и других бревен, если одно сосновое бревно весило 0,28 T, а еловое — 0,35 T?

Задача требует для решения особого приема.

Решение с объяснением. Предположим, что на платформы погружены только сосновые бревна. Тогда, чтобы получить вес всех бревен, надо 0,28 T умножить на 196, так как вес одного соснового бревна 0,28 T, а вес 196 бревен в 196 раз больше.

Получим

$$0{,}28 \cdot 196 = 54{,}88 \ (T)$$

Предполагаемый вес всех бревен меньше веса, данного в условии задачи. Найдем разность этих весов Получим

$$58{,}8 - 54{,}88 = 3{,}92 \ (T).$$

Эта разность в весе получилась вследствие замены еловых бревен сосновыми. Найдем разность в весе одного соснового и одного елового бревна. Получим

$$0{,}35 - 0{,}28 = 0{,}07 \ (T).$$

Так как, заменяя каждое еловое бревно сосновым, мы уменьшаем вес бревна на 0,07 T, а общий вес на 3,92 T, то число еловых бревен равно

$$3{,}92:0{,}07=56 \text{ (бревен).}$$

Число сосновых бревен равно $196-56=140$ (бревен).

Получим следующую формулу решения:

$$x=\frac{58{,}8-0{,}28\cdot 196}{0{,}35-0{,}28}=56 \text{ (еловых бревен).}$$

Задача 4. После того как вспахали 68% участка, оставшаяся часть оказалась на 54 *га* меньше вспаханной. $\frac{4}{15}$ всей пашни предназначено под клевер, остальное под лен. Сколько гектаров на этом участке намечено засеять льном?

Анализ условия. Чтобы ответить на основной вопрос задачи, надо знать площадь всего участка. В условии дано одно число 54 *га*, выражающее часть всего участка. Если узнать, какую часть площади всего участка выражает это число, то все необходимое для ответа будет известно. 54 *га* составляют разность между частью вспаханной земли и невспаханной. С определения этой разности в процентах от всего участка и начнем решение задачи.

Решение с объяснением. Согласно условию задачи принимаем весь участок за 1, или 100%.

1) Сколько процентов участка еще не вспахано?

$$100\%-68\%=32\%.$$

2) Какова разность в процентах между вспаханной и невспаханной частями участка?

$$68\%-32\%=36\%.$$

36% участка равны 54 *га* (по условию); $36\%=0{,}36$.

3) Какова площадь всего участка?

$$54:0{,}36=5400:36=150 \quad (га).$$

4) Какую часть площади намечено засеять льном?

$$1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}.$$

5) Сколько гектаров участка будет засеяно льном?

$$150\cdot\frac{11}{15}=\frac{150\cdot 11}{15}=110 \ (га).$$

(Ответ: 110 *га*.)

Из приведенных примеров видно, что рассуждения, которые ведутся при решении задач, можно записать различно, а именно:

Объяснение чередуется с выполнением действий (задача 3).

Объяснение решения записывается в виде предварительных вопросов или пояснений перед совершением действий (задача 4).

Объяснение решения записывается в виде пояснения смысла или значения результата выполненного действия (задача 2).

Объяснению предшествует план решения, выясняющий последовательность действий (задача 1).

Развернутое объяснение решения после решения задачи применяется редко.

В процессе решения задачи в классе необходимо показывать ученикам различные записи объяснений и обучать школьников вести эти записи. При самостоятельном решении задачи школьниками не следует требовать от них какой-либо обязательной формы записи объяснений: лучше предоставить им выбрать по своему желанию тот или иной вариант записи; это приучает учеников к свободному изложению своих мыслей.

На уроке при решении задач учащиеся в большинстве случаев устно формулируют вопросы к выполняемым действиям. После того как устный план решения задачи составлен коллективно, можно проводить комментированное решение. При решении задач, требующих новых приемов, а также в контрольных работах и при выполнении домашних заданий учащиеся должны записывать объяснения к решению.

В V классе при записи решения задач следует приучать учащихся выполнять действия с отвлеченными числами, а наименование указывать только в результате, заключая его в скобки, это готовит их к правильным записям в курсе алгебры.

Необходимо приучать учащихся к записи решения задач в виде числовой формулы. В объяснительной записке к программе по арифметике для начальных классов предлагается в IV классе записывать решение несложной задачи числовой формулой. В V классе эта работа продолжается. Пятиклассники начинают с записи в виде формулы решения задач в три, четыре действия, при этом задание обычно формулируют так: записать решение задачи в виде примера (позднее можно ввести термин «формула»). Ознакомление учащихся с формулами служит подготовкой к изучению алгебры, помогает усвоению учащимися порядка действий, свойств действий. Им следует показать, что, упрощая формулу решения задачи, можно найти более короткий путь решения.

Задача: Из двух городов, расстояние между которыми 1620 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 18 *ч*. Найти скорость второго поезда, если скорость первого была 50 *км/ч*.

Ученики обычно предлагают следующее решение:

1) $50 \cdot 18 = 900$ (*км*); 2) $1620 - 900 = 720$ (*км*);

3) $720 : 18 = 40 \left(\frac{км}{ч}\right)$

Формула решения:

$$(1620 - 50 \cdot 18) : 18 = 40 \left(\frac{км}{ч}\right)$$

Эту формулу можно упростить, пользуясь распределительным свойством деления.

$$(1620 - 50 \cdot 18) : 18 = 1620 : 18 - 50 \cdot 18 : 18 = 1620 : 18 - 50.$$

Получаем следующий способ решения:

1) $1620 : 18 = 90$ (*км/ч*) — сумма скоростей I и II поездов.

2) $90 - 50 = 40$ (*км/ч*) — скорость II поезда.

§ 8. Устные упражнения по арифметике

Вопрос о значении, видах и способах подачи устных упражнений был рассмотрен в первой части этой книги. Остановимся на некоторых примерах устных упражнений по арифметике и определим основные цели, которые могут быть поставлены при их проведении.

1. Цель упражнений: *подготовить учащихся к сознательному усвоению нового вывода.*

Упражнения содержат повторительный материал, на котором основан последующий вывод. Иногда в эти упражнения включаются вопросы, облегчающие усвоение словесной формулировки нового правила, или определения, а также вопросы, ответы на которые являются элементами предполагаемого в дальнейшем рассуждения.

Подготовительные устные упражнения перед выводом правила умножения десятичных дробей.

а) Умножение обыкновенных дробей (с повторением правил).

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}; \quad \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{3} \text{ и т. д.}$$

б) Деление целого числа на степень десяти.

$$27 : 10; \ 571 : 100; \ 63 : 100; \ 39 : 1000 \text{ и т. д.}$$

в) Назвать числитель и знаменатель в написанных десятичных дробях: 0,348; 5,7; 0,017 и т. д.

Выполнив эти упражнения, ученики самостоятельно смогут умножить дроби

$$0{,}3 \cdot 1{,}13; \ 0{,}11 \cdot 0{,}7; \ 2{,}1 \cdot 0{,}3 \text{ и т. д.}$$

и под руководством учителя выведут правило умножения десятичных дробей.

Затем проведенные рассуждения для вывода правила следует повторить, записав десятичные дроби в виде обыкновенных.

В дальнейшем при рассмотрении методики преподавания различных вопросов арифметики приводится ряд подобных устных упражнений, например: первые три подготовительные упражнения, предшествующие выводу признака делимости на 9, и все упражнения, предшествующие выводу признака делимости[1] на 3, и др.

2. Цель упражнений: *усвоение новых терминов или символов. Понятие числа, обратного данному.*

а) Назвать числа, обратные числу 20; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{2}$; 1 и т. д.

б) Найти сумму чисел $\frac{1}{4}$ и числа, ему обратного.

в) От числа 5 вычесть число, ему обратное, и т. д.

3. Цель упражнений: *более глубокое осознание учащимися математических понятий.*

Понятие отношения.

а) Придумать два числа, отношение которых равно единице.

б) Как изменить величину предыдущего члена (не меняя последующего), чтобы отношение стало меньше единицы?

в) Если отношение двух чисел равно $\frac{2}{3}$, чему будет равно отношение чисел, обратных данным числам? И т. д.

4. Цель упражнений: *приобретение и закрепление определенных навыков, искоренение «типичных» ошибок учащихся.*

Существуют ошибки, которые ученики допускают во всех классах школы Причиной этих ошибок во многих случаях является невнимание, отсутствие навыка. Систематические устные упражнения по вопросам, вызывающим затруднения, помогут почти полностью искоренить такие «типичные» ошибки.

Пропуск нуля в частном при делении.

а) При устных упражнениях на целые числа регулярно даются примеры вида 2032 : 4.

б) В разделе «десятичные дроби» снова включаются аналогичные упражнения, например. 7,56 : 1,5.

в) При решении примеров на отношения опять включаются упражнения типа $32{,}48 : x = 16$ и т. д.

Ошибки в делении на дробь вида $\frac{1}{n}$.

Даются примеры:

$$20 \cdot \frac{1}{2}; \quad 60 — 5 : \frac{1}{5}; \quad 30 : \frac{2}{3} + 16 : \frac{1}{20} \text{ и т. д.}$$

---

[1] См § 12.

5. Цель упражнений: *практическое применение пройденного теоретического материала,* развитие умения и навыков быстро, правильно и рационально производить вычисления, *развитие сообразительности.*

Так как упражнения на вычисления часто даются для приобретения навыка в применении какой-либо формулы или для усвоения определенного приема, то, естественно, что предлагается ряд однотипных примеров. Шаблонный подбор примеров, при котором учащиеся многократно воспроизводят один и тот же прием, может легко привести к механическому решению. Необходимо так ставить упражнения, чтобы ученики были вынуждены вдумываться в каждую новую задачу, сознательно отыскивать наиболее рациональный прием решения, проверять правильность выбранного способа.

Вычисление с применением законов арифметических действий.

Решая однотипные примеры, ученики обычно не думают о порядке действий, о том, какой именно закон можно применить, а соединяют те числа, над которыми легче произвести указанное действие. Так как примеры подбираются на определенное свойство, то ошибки возникают редко.

Вычислить:

а) $2\frac{5}{8}-\left(\frac{2}{17}+\frac{5}{8}\right)$; б) $3\frac{8}{11}-\left(1\frac{3}{23}-\frac{3}{11}\right)$; в) $2\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left(2-1\frac{2}{3}\right)$.

В последнем примере ученик должен заметить, что нельзя делать вычитания: $2\frac{3}{4}-\frac{3}{4}$.

Порядок действий.

Для усвоения порядка действий можно предложить пример, а затем после решения несколько раз изменить порядок действий в нем при помощи скобок.

На доске записано:

$$30-15\cdot\frac{3}{5}+4:\frac{1}{2}.$$

После решения учитель ставит скобки и предлагает вычислить

$$(30-15)\cdot\frac{3}{5}+4:\frac{1}{2}.$$

Затем снова меняет расположение скобок:

$$30-\left(15\cdot\frac{3}{5}+4\right):\frac{1}{2}.$$

Такое упражнение наглядно показывает учащимся, как меняется результат в зависимости от порядка действий, и вызывает большой интерес.

6. Цель упражнений: *научить выявлять математическое содержание в конкретных данных.* Этой цели служит решение задач с конкретным содержанием.

Задачи для устного решения не должны содержать сложных вычислений, условие должно быть кратким. Усмотрев в устной задаче ее логическую структуру и поняв способ ее решения, ученик потом легче выявит аналогичные соотношения в более сложной задаче. Ряд небольших задач позволяет быстро и отчетливо выявить сходство и различие в приемах их решения.

Решение задач на проценты, требующие правильного понимания, от какого числа берется процент.

а) В кружке участвовало 25 учеников. В течение первого полугодия выбыло 5 членов кружка. На сколько процентов уменьшилось число членов кружка за первое полугодие?

б) В течение второго полугодия вновь принято в кружок 5 учеников. На сколько процентов увеличилось число членов кружка за второе полугодие?

Большей частью учащиеся считают, что и в первом и во втором случае число членов изменилось на 20%. Выяснение этой ошибки вызывает большой интерес.

Решение некоторых «типовых» задач.

а) Разделить 120 руб. на 2 части так, чтобы одна часть была на 20 руб. больше другой.

б) Разделить 120 руб. на 2 части так, чтобы одна часть была в 5 раз больше другой.

в) Разделить 120 руб. на 2 части так, чтобы одна часть составляла $\frac{1}{5}$ долю другой части.

г) Разделить 120 руб. на 2 части так, чтобы $\frac{1}{2}$ одной части была равна $\frac{1}{3}$ другой части.

Задачи, подготовляющие к решению сложной задачи[1]

а) В буфете было 24 *кг* конфет. Утром продали $\frac{3}{4}$ всех конфет, днем $\frac{1}{3}$ остатка. Сколько конфет осталось в буфете?

б) Сколько конфет было в буфете, если утром продали $\frac{3}{4}$ всех имеющихся конфет, днем $\frac{1}{3}$ оставшихся и после этого осталось 4 *кг* конфет?

[1] Упражнения проведены на уроке учительницей 46-й школы Ленинграда М. Л. Крыловой.

в) Утром продали $\frac{3}{4}$ всех имеющихся в буфете конфет, днем $\frac{1}{3}$ остатка. Сколько было всех конфет в буфете, если утром продали на 16 *кг* больше, чем днем?

После решения проводится анализ условий и решений, затем дается для письменного решения следующая задача

В колхозе $\frac{4}{9}$ пахотной земли занято зерновыми культурами, $\frac{3}{7}$ остатка — картофелем и остальное — бобовыми. Найти площадь всей пахотной земли и площадь, занятую бобовыми культурами, если известно, что площадь под зерновыми больше площади, занятой картофелем, на 390 *га*.

Составление числовых формул решения задач

Решить и составить формулы решения.

а) В водоем проведены 2 трубы. Через первую трубу водоем наполняется за 20 *мин*, через вторую — за 30 *мин* За сколько минут может наполниться водоем при одновременном действии обеих труб?

б) Одним экскаватором можно выкопать котлован за 6 *ч*, другим — за 4 *ч* За сколько часов можно выкопать этот котлован двумя экскаваторами, если их производительность не изменится?

Формулы записываются затем на доске, учащиеся наблюдают сходство формул решения

7 Цель *дать упражнения творческого характера*

а) Простейшие упражнения заключаются в самостоятельном придумывании учащимися примеров, когда они отвечают правила или определения Учащийся говорит, например «Общим делителем двух или нескольких чисел называется число, на которое делится каждое из данных чисел без остатка» — и приводят пример

б) Учащиеся придумывают примеры по указаниям учителя.

Придумайте две дроби, знаменатели которых взаимно простые числа

Придумайте пятизначное число, которое делится без остатка на 4.

Составление задач по заданным формулам, их решения

Составить условие задачи, если ее решение записано формулой

а) $x=3\cdot 17+2{,}5\cdot 20,$

б) $x=\frac{450}{26+24}$

При подборе упражнений к уроку надо исходить из темы урока и цели упражнения. В зависимости от темы учитель подбирает упражнения для повторения, для подготовки учеников к новому выводу, для совершенствования уже изученных понятий, или намечает ряд упражнений для дальнейшего закрепления полученных знаний, для приобретения навыков. Подбирая задачи для письменного решения, учитель может заранее предвидеть особо трудные моменты и приготовить для их выяснения соответствующие короткие устные задачи.

ГЛАВА III

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Основными вопросами арифметики натуральных или целых чисел (как их принято называть в курсе школьной арифметики), которые входят в I тему курса математики V класса, служат: 1) нумерация устная и письменная, 2) система арифметических действий, 3) законы арифметических действий, 4) делимость чисел.

В объяснительной записке к программе восьмилетней школы даны следующие указания: «При развитии навыков действий над натуральными числами обращается внимание на законы арифметических действий, зависимость между данными числами и результатами действий над ними и изменение результатов действий. При изучении натуральных чисел эти вопросы рассматриваются в связи с упрощением устных и письменных вычислений».

§ 9. Нумерация устная и письменная

Вопросам нумерации уделяется большое внимание в курсе арифметики начальной школы. В результате дети к V классу умеют правильно писать и читать натуральные числа. Кроме того, в IV классе изучение нумерации сопровождается некоторыми обобщениями, которые формулируются учащимися как выводы, а именно:

1) При счете первые десять чисел получают особые названия.

2) Счетные единицы объединяются в группы так, что из десяти одинаковых единиц составляется новая счетная единица, единица второго разряда, из десяти единиц второго разряда составляется единица третьего разряда и т. д.

3) Так как каждая разрядная единица, начиная со второй, состоит из десяти единиц следующего низшего разряда, то наша система счисления называется десятичной. Число 10 называется основанием системы счисления.

4) Единицы различных разрядов объединяются в классы, по три разряда в каждом. Первым четырем разрядным единицам даются особые названия, из них четвертая единица — тысяча — рассматривается как единица второго класса, из которой составляются следующие разрядные единицы так же, как из основной. Тысяча единиц второго класса образует единицу третьего класса — миллион и т. д.

5) Для записи чисел служат 10 цифр. Все цифры, кроме нуля, называются значащими.

6) Значение цифры изменяется в зависимости от места, которое она занимает.

В V классе повторяется и дополняется материал, проработанный в начальной школе.

Полезно записать с учащимися начало натурального ряда чисел и рассмотреть его свойства.

Например, можно ли найти наибольшее число в этом ряду, как найти для данного числа в этом ряду неизвестное последующее число, предшествующее. Далее, ввести термины: натуральное число, натуральный ряд чисел. Повторяя устную и письменную нумерацию целых чисел, следует остановиться на основных принципах десятичной нумерации. Следует повторить запись чисел как суммы разрядных чисел, например:

$$28\,156 = 20\,000 + 8000 + 100 + 50 + 6 =$$
$$= 10\,000 \cdot 2 + 1000 \cdot 8 + 100 \cdot 1 + 10 \cdot 5 + 6.$$

Эта запись выделяет логические этапы составления числа и служит базой для изучения свойств чисел при изучении делимости чисел. Повторение нумерации тоже следует проводить путем соответственно подобранных упражнений и вопросов, например: Как подсчитать большое число предметов? Сколько нужно разных слов, чтобы назвать все числа до 100? до 1 000 000? Назовите число, содержащее три единицы третьего разряда, две единицы второго и пять единиц первого разряда второго класса. Сколько разрядов единиц мы употребляем при счете? Какую экономию слов дает введение классов при счете? Почему система счисления называется десятичной? И т. д.

Материал для упражнений в записи больших чисел дают задачи следующего вида. Записать на доске расстояние, которое отделяет нашу Землю от Солнца (149 500 000 *км*), планету Марс от Солнца (277 700 000 *км*) и самую дальнюю планету Плутон от Солнца (6 896 900 000 *км*).

Наглядными пособиями при повторении нумерации могут служить: таблица, передающая запись на абаке, таблицы под названием «разрядные единицы», единицы различных классов, классные счеты (абак — счетная доска у древних греков).

Примером могут служить таблицы 3, 4.

Таблица 3

Разрядные единицы

Устная нумерация разрядных единиц	...	Класс миллионов			Класс тысяч			Класс единиц			Письменная нумерация разрядных единиц
		сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы	
Единица										1	1
Десять единиц — десяток									1		10
Десять десятков— сотня								1			100
Десять сотен — тысяча							1				1 000
Десять тысяч — десяток тысяч						1					10 000
Десять десятков тысяч — сотня тысяч					1						100 000
Десять сотен тысяч — миллион											
и т. д.				1							1 000 000

Таблица 4

Единицы различных классов	
Единица	1
Тысяча	1 000
Миллион	1 000 000
Миллиард (биллион)	1 000 000 000
Триллион	1 000 000 000 000
Квадриллион	1 000 000 000 000 000
Квинтиллион	1 000 000 000 000 000 000
и т. д.	. . . . .

Следует дать краткие исторические сведения о счете, о записи чисел; рассказать, что не всегда считали десятками, считали и пятками, дюжинами (по 12) и т. д.; познакомить с римской системой счисления, последнее указывается и программой [1].

[1] См. [119], [74], [69].

Особое внимание следует уделить двоичной системе счисления, рассказать об электронной вычислительной машине, которая работает в двоичной системе, сама переводит числа с десятичной системы в двоичную. На занятиях кружка следует научить пятиклассников записывать и читать небольшие числа в другой системе счисления, например в пятеричной и в двоичной. Полезно провести практическую работу. Дать каждому ученику, например, 13 палочек и предложить связать их по две, полученные пары взять по 2, положить в мешочки, по 2 мешочка положить в коробочки. Получится $13=1101_2$.

§ 10. Система арифметических действий

При повторении второго основного вопроса темы, действий над целыми числами учитель сталкивается с вопросом об определении действий. При определении действий в школьном курсе выделяются операции над числами, производимые при выполнении данного действия, или те задачи, которые решаются данным действием. В ряде случаев определение заменяется правилом, например определение сложения дробей. В большей части учебной и методической литературы вводится прежде название действия, а потом результата действия. Это можно встретить в учебнике И. Н. Шевченко.

В основу определения сложения натуральных чисел в большей части учебников берется составление суммы множеств из данных множеств. «При сложении два числа соединяются в одно число, содержащее в себе все единицы, входившие в данные числа»[1]. Предварительно рассматривается объединение двух множеств в одно множество на примере некоторых множеств яблок, тетрадей. Следующее определение вполне раскрывает *содержание понятия сложения:* «Если из двух групп предметов составлена новая группа, то число предметов в этой новой группе называется суммой этих двух чисел, которые показывают, сколько предметов в каждой из данных групп. Нахождение суммы двух чисел называется сложением этих чисел»[2].

Для того чтобы определение сложения натуральных чисел было логическим, следует ввести элементы теории множеств. Понятие множества имеет применение и в курсе геометрии, и в курсе алгебры. Появились в методической литературе высказывания за введение элементов теории множеств в школьный курс арифметики.

А. И. Маркушевич указывает на возможности введения элементов теории множеств в начальной школе на основе детского математического опыта. «Сюда относятся, например, понимание того, что каждый ребенок является членом опреде-

[1] См [182].
[2] См. [153]

ленной семьи, что эта семья входит в коллектив жильцов данного дома, что этот коллектив жильцов является частью населения квартала или населенного пункта»[1].

Появилось учебное пособие, в котором приводится изложение арифметики натуральных чисел на основе теории множеств, рассчитанное на учащихся пятых классов[2].

Для остальных действий и в школьном курсе построены логические определения. Умножение натуральных чисел определяется как сложение одинаковых слагаемых[3]. Вычитание — как действие, обратное сложению, состоящее в отыскании одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому. Подобным же образом деление определяется как действие, обратное умножению. Все эти определения посильны для пятиклассников.

Следует подчеркнуть учащимся, что всякое арифметическое действие производится над двумя числами. Надо определить, что значит сложить три числа, четыре числа и т. д.

Повторяя действия над целыми числами, следует составить таблицы, выявляющие основные логические этапы образования прямых действий, обратных действий, и сводную таблицу, дающую обзор четырех арифметических действий. Рассмотрим таблицы.

Таблица 5

Образование прямых арифметических действий

Обозначение искомого числа	Название искомого числа	Название действия
$3+4$	Сумма двух чисел	Сложение двух чисел
$3+4+2+5$	Сумма нескольких чисел	Сложение нескольких чисел
$3+3+3+3$	Сумма нескольких одинаковых чисел	Сложение нескольких одинаковых чисел
$3 \cdot 4$	Произведение двух чисел	Умножение двух чисел
$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$	Произведение нескольких чисел	Умножение нескольких чисел

Эту таблицу ученики могут заполнять постепенно, по мере повторения действий, причем они заполнят также и вторую таблицу для обратных действий. Затем по заполненным таблицам нужно сделать обзор всех изученных действий и составить сводную таблицу (см. таблицу 7).

[1] А. И Маркушевич. Об очередных задачах преподавания математики в школе, «Математика в школе», 1962, № 2

[2] См. [119].

[3] Вводится дополнительное условие для множителя, равного единице «Если множитель равен единице, то произведение принимается равным множимому».

Можно начать с повторения прямых и обратных действий, затем перейти к детальному повторению каждого действия.

При составлении первой таблицы ведутся следующие рассуждения: Что обозначает запись 3+4? (Сумму чисел 3 и 4.) Как называются числа при сложении? Что обозначает запись 3+4+2? (Сумму трех чисел.) Как найти сумму трех чисел? (Найти сначала сумму двух чисел и к полученной сумме прибавить третье число.) Что называется суммой трех чисел? Показать скобками порядок действий при нахождении суммы трех чисел [(3+4)+2]; четырех {[(3+4)+2]+5} и т. д. Чем отличается сумма 3+3+3+3 от предыдущей суммы? Что нужно знать, чтобы вычислить эту сумму? (Слагаемое и число слагаемых.) Как можно иначе записать эту сумму? (3·4.) Как называется иначе эта сумма? И т. д.

Приведенные рассуждения показывают ученикам, что для нахождения суммы трех чисел необходимо выполнить два раза действие сложения, а чтобы найти сумму четырех чисел, необходимо выполнить три раза действие сложения, то есть сложение производится над двумя числами.

Из подобных рассуждений ученики узнают, что и умножение производится над двумя числами. В результате они придут к выводу, что всякое действие производится над двумя числами.

При составлении таблицы 6 ведутся следующие рассуждения: 3+4=7. Какой вопрос выражает запись $x+4=7$? (К какому числу надо прибавить 4, чтобы получить 7?) Каким действием можно найти неизвестное число? (Вычитанием $x=7-4$.) Какое действие называется вычитанием? Как называются числа при вычитании? Мы нашли первое слагаемое по сумме и второму слагаемому. Как записать, что мы ищем второе слагаемое по сумме и первому слагаемому? ($3+y=7$.) Какой вопрос выражает последняя запись? (Какое число надо прибавить к 3, чтобы получить 7?) Каким действием можно найти второе слагаемое? (Вычитанием $y=7-3$.) Изменится ли сумма, если слагаемые поменять местами? Следовательно, второе слагаемое можно сделать первым, а первое — вторым, поэтому оба слагаемых находятся одним действием — вычитанием.

Таблица 6

Образование обратных[1] арифметических действий

$3+4=7 \begin{cases} \nearrow x+4=7 \to x=7-4 \\ \searrow 3+y=7 \to y=7-3 \end{cases}$
$3\cdot 4=12 \begin{cases} \nearrow x\cdot 4=12 \to x=12:4 \\ \searrow 3\cdot y=12 \to y=12:3 \end{cases}$

[1] Таблицы 5 и 6 вместе с наглядными пособиями, изображенными на рисунках 12, 13, 14, 15, предложены П. А Компанийцем См. [153].

Такие же рассуждения проводятся относительно деления. Полезно предложить самим учащимся составить задачи на прямое действие — на сложение (или умножение) — и две обратные

Таблица 7

Система четырех арифметических действий

Прямые действия	Обратные действия
Сложение $3+4=7$	Вычитание $7-4=3$ Вычитание $7-3=4$
Умножение $3 \cdot 4=12$	Деление $12:3=4$ Деление $12:4=3$

задачи. Хорошим упражнением для закрепления названий компонентов, зависимости между компонентами действия и результатом служат следующие задания:

1. Найдите x, если. $17+x=28$; $x-32=19$;

$$4 \cdot x=36\,484; \quad x:24=15.$$

2. Запишите при помощи скобок и знаков арифметических действий: из суммы чисел 605 и 409 вычесть разность чисел 403 и 211. Решите полученный пример.

3. Прочитайте пример: $56-(27+16)$.

При решении примеров первого вида учащиеся ведут следующие рассуждения: в первом примере неизвестно слагаемое; чтобы найти неизвестное слагаемое, достаточно из суммы вычесть другое слагаемое

$$28-17=11; \quad x=11.$$

При решении примеров второго вида учащиеся, чтобы получить запись $(605+409)-(403-211)$, вспоминают, от какого действия получается сумма, разность; устанавливают порядок действий.

Читая пример третьего вида: найти разность числа 56 и суммы чисел 27 и 16, ученики вспоминают названия результата действий, проводят анализ порядка действий.

Вопрос о действиях с нулем не включен в программу арифметики восьмилетней школы, в стабильном учебнике и задачнике этот вопрос рассматривается. В курсе арифметики V класса действия с нулем мало применяются, поэтому у учащихся долго сохраняется представление о нуле как знаке отсутствия числа, полученное в начальных классах.

Построение числового луча при изучении обыкновенных дробей поможет пятиклассникам изменить *представление о нуле* при помощи следующих рассуждений: каждому числу соответствует точка на числовом луче, нулю соответствует точка, начало луча, следовательно, естественно нуль считать числом. Можно параллельно с изучением действий над натуральными числами рассматривать и действия с нулем. Затруднение вызывает только умножение на нуль: до учащихся нелегко доходит, что в этом случае вполне закономерно считать произведение равным нулю. Усвоить это помогают наблюдения за изменением произведения с уменьшением множителя на единицу.

Задача. Общая тетрадь стоит 9 коп. Сколько денег требуется заплатить за три, две, одну тетрадь?

Решение. $9 \cdot 3 = 27$; $9 \cdot 2 = 18$; $9 \cdot 1 = 9$. Сколько истратили бы денег, если бы не купили ни одной тетради? При решении этого вопроса естественно записать: $9 \ 0 = 0$. Рассматривая деление как действие, обратное умножению, учащиеся легко убеждаются, что деление на нуль невозможно.

§ 11. Законы арифметических действий

Следующий вопрос, который требует расширения и углубления,— законы арифметических действий. В V классе уже вводятся названия законов.

В объяснительной записке к программе восьмилетней школы 1963 г. указывается, что при изучении натуральных чисел «преждевременно требовать от учащихся заучивания формулировок законов и свойств арифметических действий. Это целесообразно сделать при дальнейшем изучении курса арифметики в V классе».

Изучение законов арифметических действий в V классе строится так: ученики при анализе приемов решения ряда примеров и задач подмечают закономерность и обобщают ее. *Переместительный закон сложения* ученики начальных классов знают обычно хорошо, поэтому необходимо только, чтобы пятиклассники научились формулировать этот закон, запомнили его название и усвоили буквенную запись. Можно вспомнить его хотя бы на таком примере для устного счета: $7 + 42$.

Спрашивают учащихся, как они считали. Они обыкновенно отвечают, что к 42 прибавляли 7. Запишите, что $7 + 42 = 42 + 7$. Что эта запись показывает? От перемены мест слагаемых сумма не меняется.

В дальнейшем следует дать буквенную запись закона. Это можно сделать или при подведении итогов по материалу темы «Натуральные числа», или при изучении сложения дробей. Можно дать предварительно такую запись: I сл.+II сл.= = II сл.+ I сл.

Изучение *сочетательного закона* можно начать с решения задачи двумя способами:

Задача. Мальчик купил 6 тетрадей за 10 коп., учебник за 22 коп. и задачник за 25 коп. Сколько денег истратил мальчик?

Решение.

I способом запишется так: 1) 10 коп.+22 коп.=32 коп.
2) 32 коп.+25 коп.=57 коп.
(10+22)+25=57(коп.)

II способом: 1) 22 коп.+25 коп.=47 коп.
2) 10 коп.+47 коп.=57 коп.
10+(22+25)=57 (коп.)

Получится запись: $(10+22)+25=10+(22+25)$.

Ученики дают словесную формулировку полученной записи.

Предыдущие наблюдения следует продолжить, полезно рассмотреть следующие примеры и сделать подробную запись их решения:

I
$$\begin{cases} 7+5=7+(3+2)=(7+3)+2, \\ 20+17=20+(10+7)=(20+10)+7, \\ 300+260=300+(200+60)=(300+200)+60. \end{cases}$$

II
$$\begin{cases} 32+8=(30+2)+8=30+(2+8), \\ 46+7=(40+6)+7=40+(6+7), \\ 250+30=(200+50)+30=200+(50+30). \end{cases}$$

После рассмотрения первой группы примеров учащиеся формулируют закон: чтобы к какому-нибудь числу прибавить сумму двух чисел, достаточно к этому числу прибавить сначала первое слагаемое, а потом к полученной сумме прибавить второе слагаемое.

После рассмотрения II группы примеров они делают следующий вывод; чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, достаточно третье число прибавить ко второму слагаемому, а потом полученную сумму прибавить к первому слагаемому данной суммы.

Следует предложить учащимся прочитать полученные записи *в I и II группе примеров справа налево, после этого учащиеся* убеждаются, что обе записи выражают один и тот же закон.

Позднее, записав полученные результаты в общем виде, пятиклассники убеждаются еще раз, что подмеченные свойства выражают один и тот же закон: в одном случае прочитанный справа налево, в другом случае — слева направо. Действительно, в первом случае

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

во втором

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Для закрепления следует дать примеры вида: $56+87+13$, при решении которых, рационально группируя слагаемые $56+(87+13)$, можно быстро получить ответ. Следует показать ученикам, что, складывая многозначные числа, они применяют законы сложения, например:

$$27+35=(20+7)+(30+5)=[(20+7)+30]+5=[(20+30)+7]+5=$$
$$=(20+30)+(7+5).$$

В большей части учебной литературы по арифметике, в том числе и в стабильном учебнике [1], приведена следующая формулировка сочетательного закона: сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых мы заменим их суммой. Можно дать и эту формулировку сочетательного закона, но при этом следует подчеркнуть, что прибавление суммы к числу и числа к сумме является лишь иным выражением того же сочетательного закона сложения. Если же в формулировке прибавления суммы к числу и числа к сумме не учитывать порядок слагаемых рассматриваемых сумм, то получим соотношение, которое является следствием переместительного и сочетательного законов сложения, например: чтобы прибавить какое-нибудь число к сумме нескольких слагаемых, достаточно прибавить это число к какому-нибудь одному слагаемому, оставив другие без изменения [2].

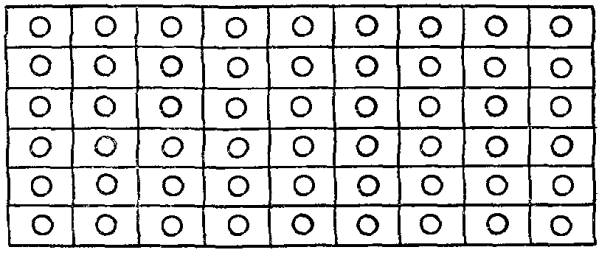


Рис. 12

Давая первую из рассмотренных формулировок сочетательного закона, следует подчеркнуть, что производится соединение (сочетание) в первом случае I и II слагаемых, во втором случае II и III слагаемых, отсюда и произошло название «сочетательный закон».

Законы умножения изучаются так же, как и законы сложения. Можно использовать следующую задачу [3]: «Подсчитать двумя способами число ямок, вырытых для посадки деревьев на опытном участке по данным на чертеже». Учащиеся получат $9\cdot 6=6\cdot 9$ и сформулируют *переместительный закон*. Эта же за-

[1] См. [182].
[2] См. [182].
[3] См. [119].

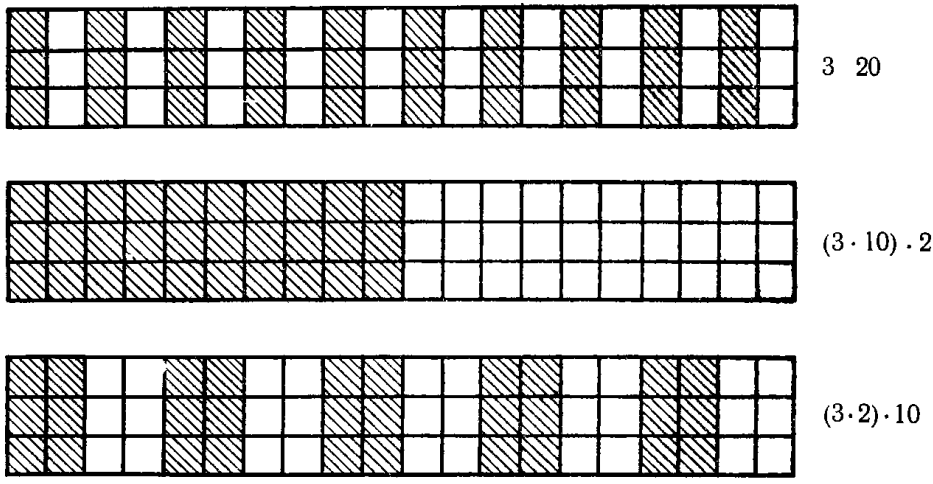
дача может быть использована для сочетательного закона, если добавить, что в каждую ямку кладется по 4 желудя и требуется найти число желудей, необходимое для гнездовой посадки на опытном участке (рис. 12). Учащиеся получат, подсчитывая двумя способами, $(4 \cdot 9) \cdot 6 = 4 \cdot (9 \cdot 6)$.

Рассматриваются следующие примеры:

1) $30 \cdot 5 = (10 \cdot 3) \cdot 5 = 10 \cdot (3 \cdot 5)$,

2) $7 \cdot 60 = 7 \cdot (6 \cdot 10) = (7 \cdot 6) \cdot 10$.

В результате рассмотрения решения задачи и приведенных примеров ученики формулируют *закон умножения произведения двух чисел* на третье число и закон умножения числа на произведение двух чисел. Учащиеся, так же как и при сложении, путем словесной формулировки решения двух примеров (или записи в общем виде) устанавливают, что эти два закона тождественны и выражают один и тот же закон, который получится из одной формулы в одном случае при чтении ее справа налево, в другом случае — слева направо. Одним из наглядных пособий для изучения свойств произведений служит прямоугольник, разбитый на квадратные единицы, особым образом сгруппированные (рис. 13).



$3 \cdot 20 = 3\ (10\ 2) = 3\ (10 \cdot 2)$; $3 \cdot 20 = 3 \cdot (2\ \ 10) = (3 \cdot 2) \cdot 10$

Рис. 13

Этот чертеж показывает, что, вычисляя площадь прямоугольника с основанием в 20 ед. и высотой в 3 ед., мы можем подсчитывать число квадратных единиц различными способами, то есть различными способами получить одно и то же произведение. На первом прямоугольнике показан подсчет по 3 двадцать раз, на втором — по 3 десять раз и полученное произведение взято 2 ра-

за, на третьем — по 3 квадратика взято 2 раза и полученное число — 10 раз.

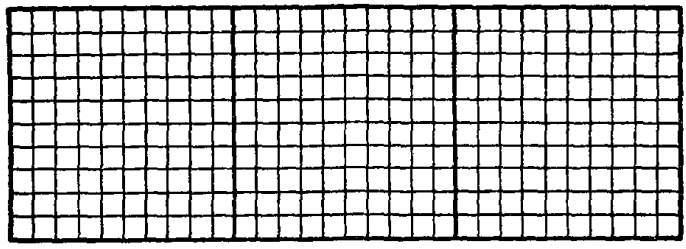
Рисунок 14 иллюстрирует формулу $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$, которая получается как следствие сочетательного и переместительного законов умножения.

Для закрепления сочетательного закона можно предложить ученикам решить двумя способами задачу: «Сколько минут в 360 сутках?»

Запись решения: 1) $24 \cdot 360 = 8640$ (*ч*);
2) $60 \cdot 8640 = 518\,400$ (*мин*),

Отсюда $60 \cdot (24 \cdot 360) = 518\,400$.

II способ. 1) $60 \cdot 24 = 1440$ (*мин*); 2) $1440 \cdot 360 = 518\,400$ (*мин*).
$(60 \cdot 24) \cdot 360 = 818\,400$; $60 \cdot (24 \cdot 360) = (60 \cdot 24) \cdot 360$.



$30 \cdot 10 = (10 \cdot 3) \cdot 10 = (10 \cdot 10) \cdot 3 = 100 \cdot 3 = 300$

Рис. 14

Изучение *распределительного закона* умножения можно начать с рассмотрения следующих примеров:

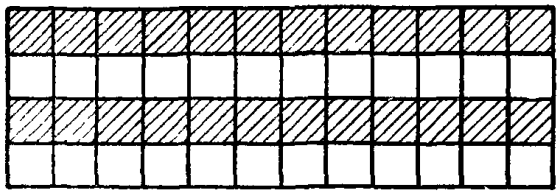
1) $2 \cdot 6 =$
$2+2+2+2+2+2;$
$(2+2+2+2+2)+2 = 2 \cdot 5 + 2;$
$2 \cdot (5+1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1;$
$(2+2+2+2)+(2+2) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2;$
$2 \cdot (4+2) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2;$
$(2+2+2)+(2+2+2) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3;$
$2 \cdot (3 \cdot 2) = (2 \cdot 3) \cdot 2.$

2) $3 \cdot 23 = 3\,(20+3) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 3;$

3) $156 \cdot 4 = (100+50+6) \cdot 4 = 100 \cdot 4 + 50 \cdot 4 + 6 \cdot 4.$

На первом примере учащиеся наблюдают, что, группируя слагаемые, мы разбиваем произведение $2 \cdot 6$ на два произведения: $2 \cdot 5$ и $2 \cdot 1$; $2 \cdot 4$ и $2 \cdot 2$ и т. д., множители которых являются слагаемыми данного множителя. Получаем закон, в котором говорится, как умножить число на сумму. На следующем примере показываем, что этот закон применяется при умножении однозначного числа на многозначное.

Рассмотрев третий пример, ученики подмечают закон умножения суммы двух чисел на третье число. Первый закон называется распределительным законом умножения относительно суммы во множителе, второй — относительно суммы во множимом.



$12 \cdot 4 = (10+2)\ 4 = 10 \cdot 4 + 2\ 4$

Рис. 15

Наглядным пособием для распределительного закона умножения может служить рисунок 15.

Первый пример можно использовать и для вывода сочетательного закона умножения. Группируя слагаемые по 3, мы разбиваем произведение $2 \cdot 6$ на два равных произведения, каждое из которых равно $2 \cdot 3$, получаем произведение $(2 \cdot 3) \cdot 2$, последние два сомножителя которого являются сомножителями данного множителя 6, отсюда $2 \cdot (3 \cdot 2) = (2 \cdot 3) \cdot 2$.

Следует показать, что при умножении многозначного числа на многозначное мы пользуемся законами умножения. Полезно иллюстрировать это на прямоугольнике, разбитом на квадратные единицы (рис. 16).

$$23 \cdot 14 = 23 \cdot (10+4) = 23 \cdot 10 + 23 \cdot 4 = (20+3) \cdot 10 + (20+3) \cdot 4 =$$

$$= 20 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4.$$

Площадь данного прямоугольника можно найти тремя способами: 1) умножив длину основания на длину высоты, 2) разбив его на два прямоугольника по высоте, сумма площадей которых равна $23 \cdot 10 + 23 \cdot 4$, 3) разбив на четыре прямоугольника, сумма площадей которых равна $20 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4$.

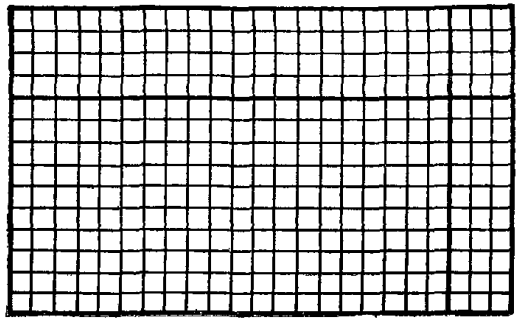


Рис. 16

Уроки, посвященные законам действий, должны проводиться при активном участии учеников. Они выполняют чертежи в тетрадях, производят подсчеты; решают в тетрадях примеры самостоятельно и сверяют свое решение с записью на доске; решают устно примеры вида: 1) $138 \cdot 8 \cdot 125$; 2) $4 \cdot 37 \cdot 25$; 3) $29 \cdot 48 + 29 \cdot 52$.

Свойства обратных действий можно вывести как следствия определения обратных действий и законов прямых действий.

В школьном курсе эти свойства устанавливаются на частных примерах.

Примером может служить таблица, предложенная П. А. Компанийцем.

Таблица 8

276+98	276+98	374—98	374—98
98=100—2	98=100—2	98=100—2	98=100—2
276+100=376 376—2=374	276—2=274 274+100=374	374—100=274 274+2=276	374+2=376 376—100=276
276+98=374	276+98=374	374—98=276	374—98=276
$a+(b-c)=\begin{cases}(a+b)-c\\(a-c)+b\end{cases}$		$a-(b-c)=\begin{cases}(a-b)+c\\(a+c)-b\end{cases}$	

Таким же образом изучаются в школе и остальные свойства обратных действий.

Запишем ряд свойств вычитания и деления в общем виде:

1. $a+(b-c)=\begin{cases}(a+b)-c\\(a-c)+b\end{cases}$ $\quad a\cdot(b:c)=\begin{cases}(a\cdot b):c\\(a:c)\cdot b\end{cases}$
2. $a-(b-c)=\begin{cases}(a-b)+c\\(a+c)-b\end{cases}$ $\quad a:(b:c)=\begin{cases}(a:b)\cdot c\\(a\cdot c):b\end{cases}$
3. $a-(b+c)=\begin{cases}(a-b)-c\\(a-c)-b\end{cases}$ $\quad a:(b\cdot c)=\begin{cases}(a:b):c\\(a:c):b\end{cases}$
4. $(a+b)-c=\begin{cases}(a-c)+b\\a+(b-c)\end{cases}$ $\quad a\cdot b:c=\begin{cases}(a:c)\cdot b\\a\cdot(b:c)\end{cases}$

В V классе доказательство свойств обратных действий не проводится, но связь законов сложения и вычитания, умножения и деления показывается путем сопоставления решений соответствующих примеров.

1) $24+26=24+(20+6)=(24+6)+20=50;$
$50-26=50-(20+6)=(50-20)-6=24;$

2) $8\cdot 300=8\cdot(3\cdot 100)=\left\{\begin{matrix}(8\cdot 3)\cdot 100\\(8\cdot 100)\cdot 3\end{matrix}\right\}=2400;$

$2400:300=2400:(3\cdot 100)=\left\{\begin{matrix}(2400:100):3\\(2400:3):100\end{matrix}\right\}=8.$

Свойства каждого из действий следует рассмотреть не на одном, а на нескольких уроках, постоянно закрепляя их устными примерами и задачами.

Следует указать учащимся, что при вычитании многозначных чисел по разрядам мы пользуемся разобранными свойствами вычитания, например:

$$76 - 34 = (70+6) - (30+4) = [(70+6) - 30] - 4 =$$
$$= [(70 - 30)+6] - 4 = (70 - 30)+(6 - 4).$$

Такая длинная запись трудна для понимания пятиклассников. Можно ограничиться только такой записью:

$$76-34=(70+6)-(30+4)=(70-30)+(6-4).$$

Материал для закрепления свойств действий дают вычисления на счетах, например: при сложении на счетах чисел 356 и 187, прибавляя к 5 десяткам 8 десятков, прибавляют 1 сотню и отнимают 2 десятка, то есть 8 заменяют разностью 10—2, также, прибавляя 7 к 6, заменяют 7 разностью 10 — 3. В обоих случаях пользуются свойством вычитания, в котором говорится, как прибавить к числу разность.

При вычитании на счетах пользуются свойством, в котором говорится, как из числа вычесть разность.

При умножении на счетах пользуются сочетательным и распределительным законами умножения, например:

$$356 \cdot 4 = (356 \cdot 2) \cdot 2;$$
$$78 \cdot 20 = (78 \cdot 10) \cdot 2;$$
$$78 \cdot 22 = 78 \cdot 20 + 78 \cdot 2.$$

При умножении на 5 используется свойство деления:

$$836 \cdot 5 = (836 \cdot 10) : 2.$$

Полезно с законами действий увязать изменение результатов действий с изменением компонентов. Изучение этого вопроса обычно начинают с повторения на примерах и задачах материала, изученного в начальной школе, а затем расширяют и углубляют его.

Примеры упражнений.

Изменение суммы.

1. Найти сумму чисел 3276 и 1534. а) Увеличить в одном из них число сотен на 3. б) Увеличить число тысяч в одном слагаемом на 2, а в другом на 1. в) В одном слагаемом увеличить число десятков на 5, а в другом число сотен уменьшить на 4.

Как изменится сумма в каждом случае? Нельзя ли найти сумму, полученную после изменения слагаемых из первоначальной суммы?

2. Составить таблицу изменения суммы двух чисел с изменением слагаемых на какое-нибудь число и сделать подробную запись решения.

Таблица 9

Первое слагаемое	Второе слагаемое	Сумма	
7	8	15	7+8=15
10	8	18	(7+3)+8=(7+8)+3
10	12	22	(7+3)+(8+4)=(7+8)+(3+4)
7	4	11	7+(8—4)=(7+8)—4
11	4	15	(7+4)+(8—4)=(7+8)+(4—4)

Сформулировать свойства суммы и разности, на основании которых можно получить записанные равенства.

Подобные же упражнения рассматриваются при изучении разности.

Особого внимания требует тот случай, когда с изменением компонентов разность не изменяет своей величины.

Изменение суммы и разности следует рассматривать в V классе сразу после изучения свойств этих действий, используя их для обоснования.

Изменение произведения.

1. Самостоятельно составить таблицы для наблюдения изменений произведения с увеличением и уменьшением сомножителей в несколько раз.

2. Как изменится периметр квадрата, если сторону его увеличить в 2 раза?

3. Начертить прямоугольник, у которого длина основания 6 *см*, длина высоты 4 *см*.

а) Увеличить высоту в 2 раза. б) Уменьшить основание в 3 раза, сохраняя первоначальную высоту.

Как изменится площадь прямоугольника в том и другом случае?

4. Известно, что $276 \cdot 15 = 4140$. Как кратчайшим способом вычислить $2760 \cdot 15$; $92 \cdot 15$?

5. Рассмотреть изменение произведения при изменении одного из сомножителей на какое-нибудь число. Составить таблицу, подобную следующей:

Таблица 10

Множимое	Множитель	Произведение	
5	3	15	5·3=15
6	3	18	(5+1)·3=5·3+3
7	3	21	(5+2)·3=5·3+2·3
5	7	35	5·(3+4)=5·3+5·4

На основании какого закона умножения можно записать эти равенства?

6. Решить задачи на применение свойства изменения произведения. (Эти задачи рассмотрены в гл. II, § 6.)

7. Не вычисляя произведения, установить, как оно изменится для каждого случая:

а)	б)	в)
$300 \cdot 40$;	$287 \cdot 5$;	$324 \cdot 10$;
$300 \cdot (40 \cdot 3)$;	$(287+7) \cdot 5$;	$(324-25) \cdot 10$;

Подобные упражнения рассматриваются и при изучении изменения частного.

Работа по изучению зависимости результата действия от его компонентов представляет первые шаги по изучению функциональной зависимости и имеет большое значение.

§ 12. Делимость чисел

Делимость чисел в программе восьмилетней школы входит в тему «Натуральные числа». Из программы исключено изучение вопроса о наибольшем общем делителе данных чисел. Так как делимость чисел (нахождение делителей числа, наименьшего общего кратного) применяется главным образом при изучении дробей, в некоторых учебниках и методиках предлагается изучать темы «Делимость чисел» и «Обыкновенные дроби» совместно[1]. Такое расположение нарушает систематичность изучения дробей. Значение вопросов делимости чисел можно показать на ряде других задач, поэтому расположение материала, предложенное программой восьмилетней школы, более удачно.

Основные вопросы делимости чисел: 1) Признаки делимости чисел. 2) Разложение чисел на простые множители. 3) Общие делители нескольких чисел. 4) Наименьшее кратное нескольких чисел.

Изучение делимости чисел имеет цель не только создать необходимую базу для изучения дробей, но и расширить знания учащихся о свойствах натуральных чисел, а кроме того, научить их рассматривать всякое натуральное число как произведение натуральных чисел.

Признаки делимости

В программу восьмилетней школы включены признаки делимости на 2; 5; 9 и 3. В основу изучения их положено следующее.

1) Признаком делимости одного числа на другое называется необходимое и достаточное условие делимости первого числа на второе.

2) Если одно из двух слагаемых делится на какое-нибудь число, то для того, чтобы вся сумма разделилась на это число,

[1] См. [181], [158], ч. II.

необходимо и достаточно, чтобы другое слагаемое делилось на то же число.

3) Чтобы произведение двух сомножителей делилось на данное число, достаточно, чтобы один из сомножителей делился на это число [1].

Первый урок о делимости чисел посвящается введению понятий: *делитель числа, кратное число.* Этот урок следует за повторением всех действий над целыми числами, и поэтому его полезно начать с вопроса: для всех ли пар целых чисел выполнимы все 4 арифметических действия? Предложить придумать примеры невыполнимости действий вычитания и деления. Показать, что признак невыполнимости вычитания прост; не производя же деления, иногда трудно установить, делится ли нацело одно число на другое. (С этого начинает и стабильный учебник.) Затем перейти к решению задач, которые показывают цель изучения этого раздела. Такими задачами могут служить задачи на определение размеров прямоугольника по его площади и размеров прямоугольного параллелепипеда по его объему, например:

1. Под клумбу нужно отвести участок в виде прямоугольника, площадь которого равна 24 *кв. м.* Найти длину и ширину его.

2. Найти длину, ширину и высоту прямоугольного ящика, объем которого равен 40 *куб. дм* (если длина, ширина и высота выражаются целыми числами).

В результате решения этих задач ученики приходят к выводу, что необходимо уметь числа раскладывать на множители: число 24 на два множителя, 40 на три множителя, а для этого нужно знать, на какие числа делятся данные числа без остатка.

Полезно устно выполнить упражнения, решение которых упрощается путем применения разложения на множители, например $72 \cdot 125$. Рассуждения при решении можно записать так:

$$72 \cdot 125 = (8 \cdot 9) \cdot 125 = (8 \cdot 125) \cdot 9 = 9000.$$

Затем вводятся понятия «делитель числа», «число, кратное данного числа». Эти понятия закрепляются решением примеров.

Дано число 16. Назовите его делители, назовите несколько чисел, кратных 16. Назовите наименьший делитель данного числа, наименьшее кратное его, наибольший делитель, наибольшее кратное этого числа. Следующие уроки посвящаются изучению на частных примерах основных теорем делимости.

Примерный план урока на тему «Делимость суммы» [2].

1. Устные упражнения на нахождение делителей данного числа, кратного данного числа.

---

[1] Для учеников, как будет показано ниже, все эти положения формулируются проще

[2] План составлен учительницей школы № 66 Ленинграда Ануфриевой.

2. Перед учащимися ставится задача: найти признаки, по которым можно узнать, не производя деления, делится ли одно число на другое.

Записывается тема урока.

Вывешиваются по очереди таблицы для наблюдений. Первый справа столбец закрыт. Его открывают после того, как ученики сделали вывод относительно делимости суммы.

Таблица 11

Делимость слагаемых	Примеры	Делимость суммы
Каждое слагаемое делится на 2 без остатка	8+14=22 8+12+6=26	Сумма делится на 2 без остатка
Каждое слагаемое делится на 5 без остатка	25+45=70 30+40+35=105	Сумма делится на 5 без остатка
Каждое слагаемое делится на 3 без остатка	3+9=12 15+24+30=69	Сумма делится на 3 без остатка

Наблюдения учащихся за каждым слагаемым и суммой.

Самостоятельное придумывание пятиклассниками примеров и запись примеров в тетрадях с объяснением.

Вывод, сделанный самостоятельно учащимися после проведенных наблюдений: если каждое слагаемое делится на одно и то же число, то и сумма разделится на это число.

Ученики записывают вывод в тетрадях.

Аналогичная работа проводится над таблицами (12, 13).

Таблица 12

Одно из слагаемых не делится без остатка на 2	12+5=17 18+13+14=45	Сумма не делится без остатка на 2
Одно из слагаемых не делится без остатка на 5	6+40=46 7+20+30+40=97	Сумма не делится без остатка на 5
Одно из слагаемых не делится без остатка на 3	17+12=29 15+24+16=55	Сумма не делится без остатка на 3
Одно из слагаемых не делится без остатка на 11	14+33=47 44+55+12=111	Сумма не делится без остатка на 11

Самостоятельный вывод: если одно из слагаемых не делится, а все прочие делятся на данное число, то сумма не разделится на это число.

Таблица 13

Слагаемые не делятся на 2 без остатка	7+9=16 19+5=24	Сумма делится на 2 без остатка
Слагаемые не делятся на 5 без остатка	4+11=15 8+17=25	Сумма делится на 5 без остатка
Слагаемые не делятся на 5 без остатка	3+11=14 8+13=21	Сумма ие делится на 5 без остатка
Слагаемые не делятся на 3 без остатка	7+11=18 8+13=21	Сумма делится на 3 без остатка

Самостоятельное придумывание учащимися (после наблюдения) примеров на тот и другой случай.

Вывод (дают ученики): если ни одно из двух слагаемых не делится на данное число, то сумма иногда делится, а иногда не делится на то же число.

Задачи (решаются устно).

1. В класс, в котором 40 учеников, принесены для раздачи три пачки тетрадей: две по 50 тетрадей, третья — 60. Если ученикам из каждой пачки дать поровну, то можно ли еще разделить на 40 человек оставшиеся тетради?

2. В класс, в котором 40 учеников, принесены для раздачи три пачки карандашей: в одной — 45 карандашей, во второй — 54, а в третьей — 44. Если каждому ученику из каждой пачки дать поровну, то можно ли еще разделить на 40 человек оставшиеся карандаши?

Наблюдения над примерами:

(8 + 7) : 5 — сумма остатков делится на 5 и сумма делится на 5.

(8 + 8) : 5 — сумма остатков не делится на 5 и сумма не делится на 5.

Вывод: если ни одно слагаемое не делится на данное число, то сумма разделится на это число в том случае, когда сумма остатков делится на данное число.

Домашнее задание. Учебник Шевченко, § 36 (делимость суммы). Придумать на каждый случай делимости суммы по одному примеру.

На следующем уроке можно рассмотреть с учениками следующие суммы: 1) 7 + 5 + 6; 2) 8 + 6 + 5; 3) 8 + 11 + 6. Учащиеся путем наблюдений приходят к выводу, что если более чем одно из слагаемых не делится на данное число, то сумма может делиться на данное число, а может не делиться. Первая сумма делится на три, вторая не делится на пять, третья сумма делится на пять.

При повторении пройденного ученикам еще раз предлагаются примеры сумм двух слагаемых, из которых: 1) каждое делится на одно и то же число; 2) одно слагаемое делится на это число, а второе не делится, учащиеся делают заключение о делимости суммы. В результате можно сформулировать признак делимости суммы на данное число: если одно из двух слагаемых делится на данное число, то их сумма делится на это число тогда и только тогда, когда другое слагаемое делится на это число. Этот признак используется при выводе частных признаков делимости на 2 и 5. Данное число разбивается на два слагаемых, из которых одно делится на данное число, таким образом делимость всего числа будет зависеть только от второго слагаемого. Признаки делимости лучше всего проходить в следующем порядке: на одном уроке признаки делимости на 2 и 5, на другом — на 9, на третьем — закрепление признака делимости на 9 и признак делимости на 3.

При изучении признаков делимости на 9 и на 3 рассматривается сначала делимость разрядных единиц на 9, потом разрядных чисел на 9.

Упражнения.

1. Какой получится остаток, если разделить на 9 следующие числа: 10; 100; 1000; 10 000; 100 000?

Решение.

$$10=9+1;\ 100=99+1;\ 1000=999+1 \text{ и т. д.}$$

2. Какой получится остаток при делении на 9 следующих чисел:

20;	30;	40;	70;
200;	300;	400;	700;
2000;	3000;	4000;	7000?

Сравнить остатки чисел, получаемые при делении их в каждом ряду и в каждой колонке.

Решение. $20=10\cdot 2=(9+1)\cdot 2=9\cdot 2+2;$

$$300=100\cdot 3=(99+1)\cdot 3=99\cdot 3+3.$$

3. Какой остаток получится при делении на 9 каждого слагаемого, всей суммы (определить, не производя деления):

$$9000+90+9;\ 10\,000+1000+10;\ 2000+200+20+2?$$

4. Какой остаток получится при делении на 9 следующих чисел: 999; 321; 4031; 2302; 7001; 80 100?

5. То же для числа 5265?

Решение. $5265=5000+200+60+5;$

$$5000=999\cdot5+5;$$
$$200=99\cdot2+2;$$
$$60=9\cdot6+6;$$
$$5=5;$$
$$5265=(999\cdot5+99\cdot2+9\cdot6)+(5+2+6+5).$$

Так как сумма остатков $(5+2+6+5)$ делится на 9, то и все число 5265 делится на 9.

6. По какому признаку можно судить, не производя деления, делится ли число на 9 без остатка?

Упражнения, подводящие к формулировке признака делимости на 3.

1. Делятся ли на 3 без остатка числа, которые делятся без остатка на 9? Почему?

2. На основании какого свойства делимости сумм можно утверждать, что число разделится на 3 без остатка?

3. Указать числа, которые делятся на 3 без остатка, а при делении на 9 дают остаток.

4. Удобно ли на основании признака делимости числа на 9 судить о делимости числа на 3? Почему? (Нет, так как могут быть числа, которые делятся на 3, но не делятся на 9.)

5. Нельзя ли сформулировать на основании решения предыдущих вопросов признак делимости на 3?

При формулировке признаков делимости следует объяснить ученикам значение слов «те и только те» и требовать их употребления. Эти слова заменяют: «необходимо и достаточно».

Например, после того как учащиеся пришли к выводу, что если сумма цифр делится на 3, то и число делится на 3, полезно поставить вопрос, будет ли делиться на 3 число, сумма цифр которого не делится на 3. Отсюда можно перейти к краткой формулировке при помощи слов «те и только те».

Разложение чисел на простые множители.

Разложение чисел на простые множители — основной вопрос раздела «Делимость чисел». На первом уроке, посвященном этому вопросу, снова возвращаются к задачам определения размеров прямоугольника по его площади, размеров прямоугольного параллелепипеда по его объему. При решении этих задач ученики убеждаются, что существуют числа, которые могут быть представлены только как произведение единицы на само число, и после этого вводится определение простого числа.

Для закрепления представлений о простых и составных числах и их распределении в натуральном ряду чисел полезно познакомить пятиклассников с составлением таблицы простых чисел при помощи так называемого «решета Эратосфена».

«Решетом Эратосфена» называется прием для составления простых чисел, который был найден греческим ученым Эратосфеном (276—193 гг. до н. э.). Учащиеся знакомятся сначала с механическим приемом составления таблицы простых чисел. В тетрадях чертят квадрат со стороной в 5 *см*; разделенный на 100 клеток, в каждой клетке записывают натуральное число, начиная от 1 до 100, и учитель предлагает зачеркивать числа: сначала 1, потом каждое второе число после 2, каждое третье число после 3, каждое пятое число после 5 и каждое седьмое после 7.

После этого учитель предлагает объяснить, почему полученные числа простые. Учащиеся называют числа, вычеркнутые после 2.

$4=2+2$; $6=2+2+2$; $8=2+2+2+2$ и т. д. и убеждаются, что все эти числа кратные 2, вычеркнутые после 3: $6=3+3$; $9=3+3+3$ и т. д. Эти числа, кратные 3. Следующие группы чисел — кратные 5, кратные 7. Выясняется вопрос, почему не вычеркиваются числа, кратные 11. Так как самое большое число в таблице 100 при делении на 11 дает в частном 9, то кратные 11 имеют делитель меньше 9. Числа, кратные 11, уже вычеркнуты.

Обращается внимание, что единица не считается ни простым, ни составным числом, так как она имеет только один делитель, простые же числа имеют два делителя и только два, составные — три и более.

Полезно рассказать учащимся, что число простых чисел неограниченно, нельзя назвать последнее простое число. На занятиях в кружке полезно доказать это.

Чтобы, не пользуясь таблицей, установить, что данное число простое, необходимо попробовать делить его на все последовательные простые числа до тех пор, пока в частном не получится число, меньшее делителя, и только тогда можно сделать вывод, что данное число простое.

Следует познакомить учащихся с таблицей простых чисел, приведенной в стабильном учебнике и задачнике, и приучить их пользоваться этой таблицей. Большинство пятиклассников обычно не представляют простого числа, которое больше двузначного числа. Они с трудом воспринимают, что числа 2143; 4373, 5639— простые числа.

Далее перед учениками ставится задача разложения чисел на простые множители. Сначала следует представить число в виде произведения составных множителей, а затем уже получить разложение на простые множители. На нескольких примерах ученики наблюдают, что всякое *составное число раскладывается только на один ряд простых множителей*, независимо от способов разложения, например:

$$36=4\cdot 9=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3;$$
$$36=6\cdot 6=2\cdot 3\cdot 2\cdot 3=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3.$$

Полезно начать разложение с небольших чисел и составить таблицу разложения составных чисел от 4 до 20. Особо следует остановиться на разложении чисел, записанных единицей с нулями, на простые множители. Числа, оканчивающиеся нулями, удобно разлагать на множители, выделив сначала составной множитель, записанный единицей с нулями.

$$45\,000=45\cdot1000=5\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5.$$

Запись разложения на множители с помощью вертикальной черты следует использовать только в тех случаях, когда промежуточное разложение на составные множители затруднительно. При записи разложения с помощью вертикальной черты учащиеся часто не представляют числа в виде произведения и производят разложение механически. Разложение на множители используется для нахождения делителей числа с целью подготовки к изучению вопросов: делители данного числа и кратные данного числа.

Следует рассмотреть решение примеров вида — найти частное кратчайшим путем: 1) $(5\cdot7):7$; 2) $(2\cdot3\cdot5):2$ и т. д.

Затем показать, что произведение нескольких сомножителей можно представить в виде произведения любого его множителя на произведение всех остальных, например:

$$210=2\cdot3\cdot5\cdot7=2\cdot(3\cdot5\cdot7)=3\cdot(2\cdot5\cdot7)=5\cdot(2\cdot3\cdot7)=7\cdot(2\cdot3\cdot5).$$

Составное число можно разложить на два множителя другим способом.

$$210=(2\cdot3)\cdot(5\cdot7)=(2\cdot5)\cdot(3\cdot7)=(2\cdot7)\cdot(3\cdot5)=$$
$$=(2\cdot3\cdot5)\cdot7=(2\cdot3\cdot7)\cdot5=(3\cdot5\cdot7)\cdot2.$$

Ученики приходят к выводу: 1) делитель составного числа может быть произведением двух, трех, четырех и т. д. его любых простых множителей; 2) кратное данного числа должно содержать все простые множители делителя.

Один из уроков следует посвятить введению понятия общего делителя нескольких чисел. Учащимся предлагается найти делители чисел и выписать общие делители. После рассмотрения ряда конкретных примеров они дают определение общего делителя. Учащиеся знакомятся с взаимно простыми числами. Им следует предложить указать среди общих делителей наибольший общий делитель.

Не рассматривая с пятиклассниками способа отыскания наибольшего общего делителя данных чисел, полезно решить задачи, показывающие практическое применение понятия общего делителя, например:

1. Длина прямоугольника 175 *м*, ширина 105 *м*. Чертежник хочет сделать план участка, приняв 1 *см* на чертеже равным такому целому числу метров, чтобы чертеж имел наименьшие размеры, выраженные в целых числах. Какой масштаб нужно взять?

2. Начертить диаграмму, изображающую в виде прямоугольников с равными основаниями следующие глубины:

Великого океана в среднем	3500 *м*
Атлантического » »	3780 *м*
Сев. Ледовитого » »	4830 *м*
Средиземного моря »	1400 *м*

Какой масштаб нужно взять, приняв 1 *мм* равным такому целому числу метров, чтобы чертеж имел наименьшие размеры, выраженные в целых числах?

Ученики для решения используют признаки делимости чисел. Рассмотрим примерную систему упражнений, подводящую учащихся к понятию наименьшего общего кратного двух или нескольких чисел и к способу его нахождения.

1. Даны 2 числа: 3 и 4. Записать числа, кратные каждого из них в отдельности.

Запись: 3 | 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36;
4 | 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48.

Подчеркните общие кратные чисел 3 и 4. Можно ли еще назвать числа, которые будут общими кратными чисел 3 и 4? Назовите их. Можно ли найти наибольшее общее кратное? Назовите наименьшее общее кратное чисел 3 и 4.

2. Найдите также общие кратные для чисел 4 и 5, подчеркните и выделите среди них наименьшее.

3. То же для чисел 18 и 15.

4. Какое число называется наименьшим общим кратным данных чисел?

Решить 1—2 задачи, аналогичные данной: «Требуется приготовить ящик для укладки коробок шириной в 9 *см* и длиной в 21 *см*. Какова должна быть наименьшая величина стороны квадратного дна, чтобы коробки поместились в ящике вплотную? Сделать чертеж, на котором длина клеточки тетради соответствует 3 *см* в действительности».

После выполнения упражнений учащимся предлагается разложить на простые множители данные числа, найти их НОК и сравнить состав сомножителей полученных произведений, например: $9 = 3 \cdot 3$; $21 = 3 \cdot 7$; $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$. Ученики замечают, что в НОК входят все множители одного числа и недостающие множители из разложения второго числа. Полученные наблюдения подводят учащихся к формулировке правила нахождения НОК.

ГЛАВА IV

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 13. Различная последовательность изучения тем «Десятичные дроби» и «Обыкновенные дроби»

В связи с тем что к десятичным дробям могут быть применены правила десятичной нумерации и на них распространяется механизм многих действий над целыми числами, десятичные дроби занимали различное положение в учебной и методической литературе. В учебниках и программах дореволюционной школы десятичные дроби были помещены после обыкновенных дробей. Исключение составляло руководство для военных учебных заведений В. Буняковского [1]. В этом учебнике десятичные дроби изучаются параллельно с целыми числами. Вопрос о порядке изучения десятичных и обыкновенных дробей поднимался на I Всероссийском съезде преподавателей математики (1911—1912) К. Ф. Лебединцевым. После Октябрьской революции благодаря введению метрической системы мер десятичные дроби получили большое практическое значение и появился ряд высказываний за ограничение объема изучения обыкновенных дробей в пользу прохождения десятичных дробей. Выдвигались предложения изучать десятичные дроби раньше обыкновенных. Такой порядок изучения был проведен в ряде книг [2].

Выдвигалось также предложение параллельного изучения систематического курса обыкновенных и десятичных дробей. Такой порядок изучения приведен тоже в ряде учебников [3]. В учебнике К. Ф. Лебединцева предлагается изучение обыкновенных и десятичных дробей разбить на два концентра. В I концентре излагаются те вычисления с «простыми» и десятичными дробями, которые не требуют расширения понятия о действиях.

---

[1] См. [133].
[2] См. [155], [126]
[3] См. [158], ч. II; [137], [137], [19], [156].

Во II концентре параллельно изучаются умножение и деление на дробь обыкновенных и десятичных дробей.

Изучению систематического курса дробей до 1949 г. предшествовал пропедевтический курс десятичных дробей в IV классе начальной школы. В 1949 г. этот курс в связи с разгрузкой программы начальной школы был из нее исключен.

В 1959 г. в связи с перестройкой изучения математики в свете новых задач средней школы в проекте программы предлагалось десятичные дроби изучать до обыкновенных, выделив на тему «Десятичные дроби» большее число часов за счет темы «Обыкновенные дроби». В программе по математике восьмилетней школы Министерства просвещения РСФСР сохранен прежний порядок изучения дробей, но увеличено число часов на тему «Десятичные дроби». Министерство просвещения Молдавской ССР утвердило программу по математике, по которой работают с 1959/60 учебного года школы Молдавской республики. Эта программа предусматривает изучение десятичных дробей в V классе раньше, чем обыкновенных.

Министерством просвещения Молдавской ССР выпущено учебное пособие по арифметике для V класса восьмилетней и средней школы, в котором за темой «Натуральные числа» сразу следует тема «Десятичные дроби»[1]. Выпущено методическое пособие[2], в котором понятие десятичной дроби вводится как обобщение понятия натурального числа в результате продолжения десятичной системы нумерации. В нем десятичная дробь определяется как число, которое содержит десятичные доли единицы, записанные по правилу записи натуральных чисел с помощью запятой, отделяющей целые единицы от десятых долей единицы.

Авторы методического пособия утверждают, что десятичная дробь не может считаться частным случаем обыкновенной, что, определяя десятичную дробь, нельзя пользоваться понятием «числитель» и «знаменатель».

Приведенное толкование понятия десятичной дроби вызвало возражения[3]. Правильно указывается, что нахождение дроби числа, предшествующее умножению на дробь, может быть понято учениками тогда, когда дробное число выступает как пара натуральных чисел, из которых одно показывает, на сколько равных частей разделена единица, а другое — сколько таких частей было взято. Поэтому и при новом порядке прохождения дробей необходимо сообщить учащимся, что десятичная дробь есть частный случай обыкновенной дроби. Числа 0,3 и $\frac{3}{10}$ отли-

[1] См. [122].
[2] См. [134]
[3] См. «Математика в школе», 1961, № 5.

чаются только формой записи и характеризуют одно и то же количественное отношение между объектами внешнего мира, а по содержанию это тождественные числа.

На основании учебной и методической литературы и опыта изучения десятичных и обыкновенных дробей в школе можно признать более удачным следующий *порядок изучения дробей:*

1. После введения понятия дроби, изучения простейших дробей вводится понятие десятичной дроби и изучаются действия над десятичными дробями, которые не требуют расширения понятия о действиях. К десятичным дробям применяются правила десятичной нумерации и правила действия над целыми числами.

2. Затем изучаются преобразования обыкновенных дробей и те же действия над обыкновенными дробями.

3. Вводится определение умножения на дробь и изучается параллельно умножение и деление на дробь обыкновенных и десятичных дробей.

Предлагаемый порядок изучения дробей частично проводился до исключения из программы начальной школы десятичных дробей.

§ 14. Введение понятия дроби. Преобразования дробей

Основные идеи темы «Обыкновенные дроби»:

1. Введение дробных чисел — новый этап расширения числовой области

2. Новое понятие числа требует нового определения понятия равенства чисел, суммы и произведения.

3. Введение дробных чисел снимает ограничения с действия деления целых чисел (кроме деления на нуль).

4. На дробные числа распространяются все установленные для натуральных чисел законы арифметических действий.

Дробные числа в школьном курсе изучаются в два этапа: на первом рассматриваются понятие дроби, сложение и вычитание, а также умножение и деление на натуральное число; на втором — умножение и деление на дробь. На первом этапе определения действий над дробями мало отличаются от определений соответствующих действий над целыми числами; первое расширение понятия арифметического действия дается на примере умножения на дробь.

Как указывалось раньше, в начальных классах восьмилетней школы дети на конкретном материале знакомятся с простейшими дробями, имеющими знаменатель в пределах 10, с их записью, раздроблением и превращением; решают задачи на нахождение дроби числа и числа по одной его доли. В V классе изучается систематический курс дробей, включающий вопросы обоих этапов изучения.

Основные вопросы систематического курса дробей в средней школе:

1. Образование дробей.
2. Преобразования дробей.
3. Действия над дробями.

Хотя в курсе начальной школы дети получили представление о простейших дробях, необходимо эту тему в V классе начинать с углубления и закрепления понятия о дроби. При этом следует исходить из рассмотрения конкретных примеров величин, учитывая, что исторически дроби возникли в связи с потребностью измерять. В практике измерения простейшими задачами являются определение длины отрезка, площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда. Для этих измерений нужны сначала натуральные числа, потом дробные числа (а затем и иррациональные числа). Поэтому для иллюстрации различных вопросов школьного курса дробей лучше всего пользоваться долями линейной единицы, квадратной единицы и кубической единицы.

Наглядные пособия при изучении дробей

Линейный дециметр и его доли (рис. 17).

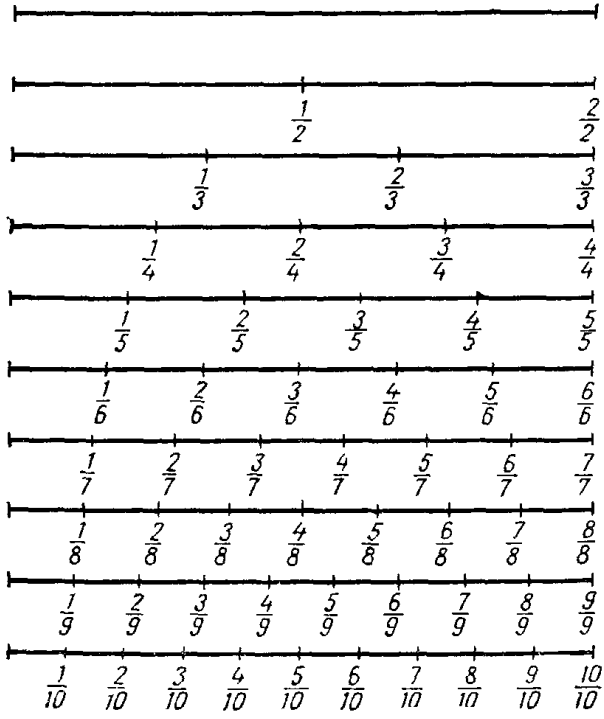


Рис. 17

Квадратный сантиметр и его прямоугольные доли (рис. 18).

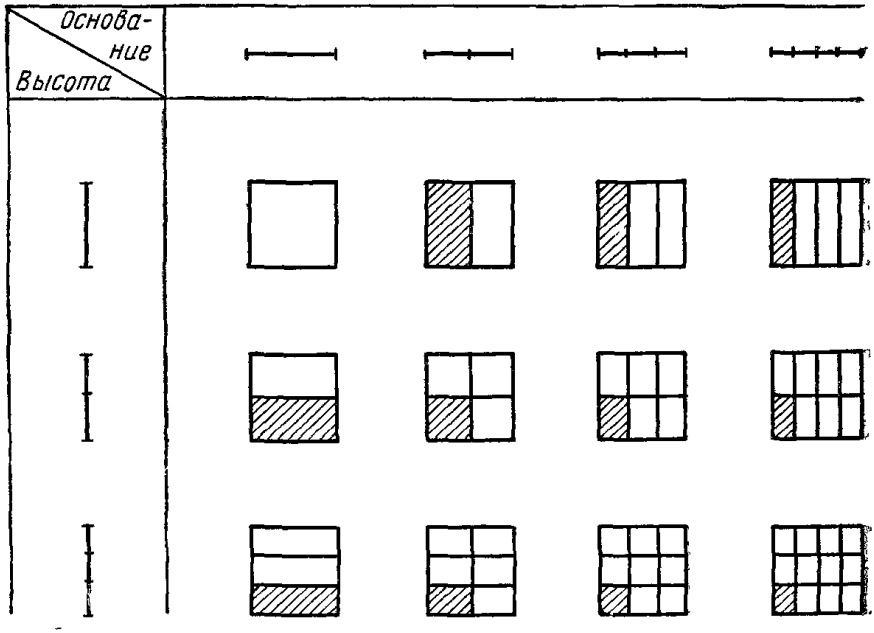


Рис. 18

Кубический сантиметр и его доли (рис. 19, 20).

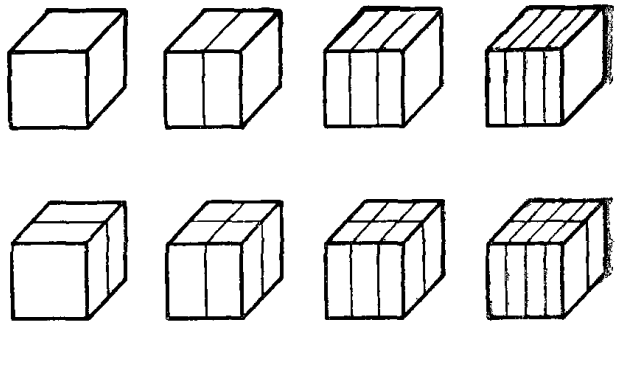


Рис. 19

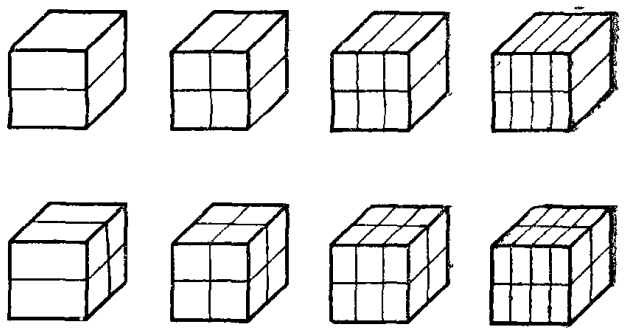


Рис. 20

Составление прямоугольников из долей квадратной единицы (рис 21).

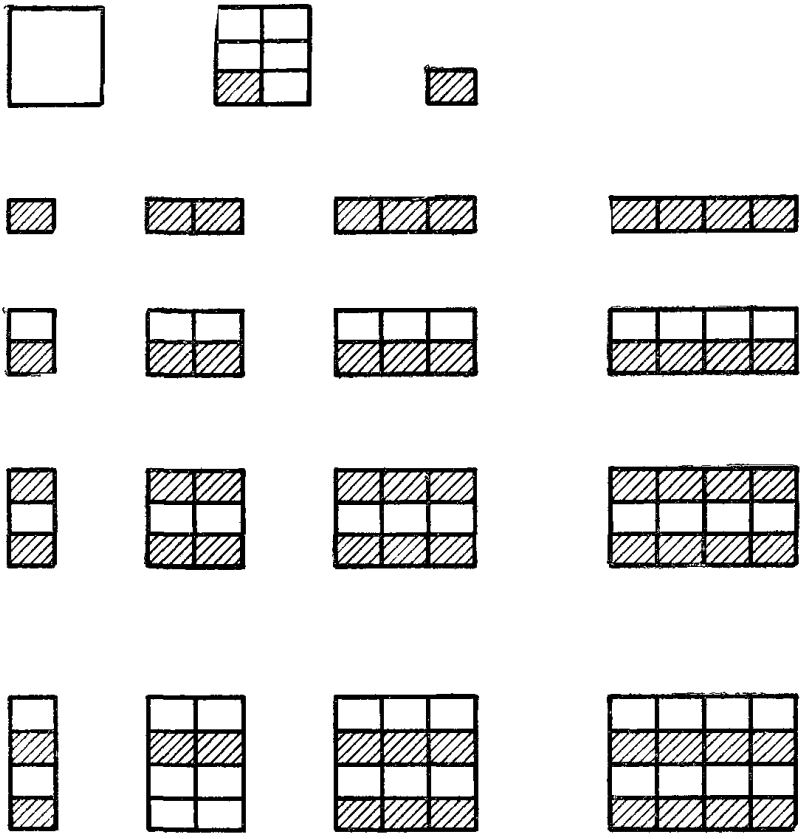


Рис 21

В результате такой работы ученики отчетливо представляют себе дробь как совокупность равных долей единицы и сами составят соответствующее определение Многие учебники сразу же рассматривают и способ получения дроби при делении целого числа на равные части, а именно на примерах показывают, что при делении меньшего числа на большее получается в частном одна или несколько долей единицы, то есть, согласно рачее введенному определению, дробь Рассуждения ведутся так Чтобы разделить веревку длиной в 3 *м* на 4 равные части, можно представить каждый метр веревки разделенным на 4 равные части, тогда веревка будет содержать 12 четвертей метра, разделив 12 четвертей метра на 4 равные части, получим в каждой $\frac{3}{4}$ метра Это рассуждение иллюстрируется рисунком 22.

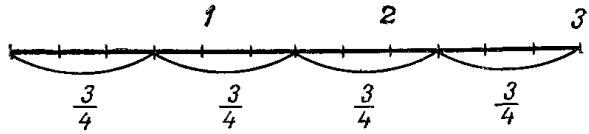


Рис. 22

Рассматривается второй способ рассуждений: 4 мальчика разделили между собой поровну 3 яблока.

При этом можно каждое яблоко разделить на 4 равные части и каждому дать по одной четверти. Каждый ребенок получит $\frac{3}{4}$ яблока.

В ряде учебников дается правило деления целого числа на несколько равных частей.

Основная мысль приведенных рассуждений о делении целого на равные части та, что доли единицы можно взять за новые счетные единицы и с полученными числами производить действия так же, как с целыми именованными числами. Но почему же начинать с деления? Деление определяется как действие, обратное умножению. Удовлетворяет ли рассмотренное деление этому определению? $3 : 4 = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \cdot 4$ будет ли равно 3? Все это требует обоснования. Без этого учащиеся не будут связывать этот случай деления с определением деления.

Практически на конкретных примерах можно показать получение дроби в результате деления двух целых чисел при образовании понятия дроби, но в дальнейшем после умножения дроби на целое число необходимо вернуться к этому вопросу, показать, что полученная дробь удовлетворяет определению действия деления, сформулировать вывод.

После того как введено понятие дроби, необходимо ввести *понятия равенства и неравенства дробей.* В теоретических курсах эти понятия вводятся путем определений. В школьном курсе необходимо предварительно показать целесообразность вводимых определений путем рассмотрения конкретных примеров.

Составляя дроби из долей одной и той же единицы, ученики убеждаются, что дроби могут быть меньше единицы, равны единице, больше единицы. Эти наблюдения следует положить в основу определений и классификации дробей на неправильные и правильные. Формальный же признак, указывающий на соотношение между числителем и знаменателем у правильных и неправильных дробей, следует установить как следствие определения. Обращение смешанного числа в равную ему неправильную дробь и исключение целого числа из неправильной дроби следует начать с рассмотрения конкретных примеров. При составлении отрезков из долей линейной единицы возникает во-

прос: сколько целых линейных единиц содержится в данном отрезке? При составлении прямоугольников из долей квадратной единицы возникает вопрос: сколько квадратных единиц можно составить из данного прямоугольника? Решение этих вопросов приводит к исключению целого числа из неправильной дроби.

Не следует спешить с выводом формального правила для этих преобразований, следует заставлять учащихся проводить соответствующие рассуждения, основанные на составе единицы из долей этой единицы. Например, при обращении смешанного числа $2\frac{2}{3}$ в неправильную дробь ведутся следующие рассуждения: в единице 3 третьих доли, в двух единицах $3 \cdot 2$ третьих доли, всего $(3 \cdot 2 + 2)$. Отсюда

$$2\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{3} = \frac{8}{3}.$$

В методической литературе[1] поднимался вопрос о включении в школьный курс обращения смешанного числа в неправильную дробь и обратного преобразования после изучения умножения дроби на целое число и деления дробей с одинаковыми знаменателями.

Но общепринятое расположение материала имеет то преимущество, что позволяет рассматривать действия над всеми видами дробей и смешанными числами одновременно. Кроме того, эти преобразования не нарушают системы изучения действий, они связаны с конкретными представлениями дробей и сводятся к действиям над целыми числами.

При рассмотрении различных долей единицы и дробей естественно поставить вопрос о сравнении их по величине. В основу этого сравнения также кладется сравнение величин, измеряемых данными дробями. В стабильном учебнике[2] дается определение равных дробей: «Две дроби считаются равными, если величины, соответствующие этим дробям, равны между собой при одной и той же единице измерения». Это определение не следует заучивать, но на конкретных примерах следует подчеркнуть высказанное в нем положение. Для иллюстрации сравнительной величины долей единицы полезно дать задание ученикам на отрезке, равном линейной единице, от одного из его концов отложить отрезки, соответствующие долям единицы (рис. 23). Для вывода

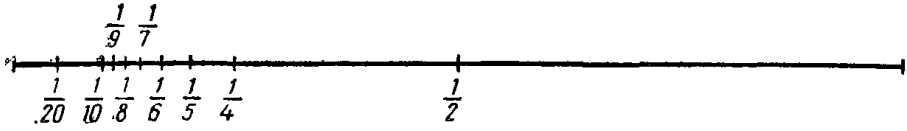


Рис. 23

[1] См. [188].
[2] См. [182].

формальных признаков сравнения дробей можно рекомендовать проводить работу по следующему плану: 1) сравнение долей единицы; 2) сравнение дробей с одинаковыми знаменателями, с одинаковыми числителями (не устанавливая, во сколько раз одна дробь больше другой); 3) основное свойство дроби.

Для сравнения чисел по величине можно использовать числовой луч. Необходимо познакомить пятиклассников с числовым лучом, на это указывает и программа восьмилетней школы. Учащиеся под руководством учителя строят в тетрадях луч, выбирают определенный отрезок за единицу длины и откладывают единицу длины на луче от его начала. На луче получают точки, против которых ставят числа, показывающие, сколько раз единица длины была отложена от начала луча до данной точки. Против начала отсчета ставится число 0. Затем откладываются доли единицы $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и т. д. и против полученных точек записывают дроби[1] (рис. 24).

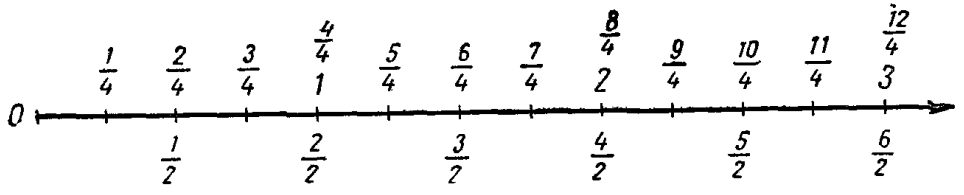


Рис. 24

Ученики наблюдают, что одной и той же точке числовой оси может соответствовать несколько дробей, эти дроби равны, так как выражают длину одного и того же отрезка. Полученные наблюдения служат подготовкой к усвоению основного свойства дробей. *Вывод основного свойства дробей* следует построить на том положении, что дроби, измеряющие одну и ту же величину при одной и той же единице измерения, равны. Таким образом, основное свойство получится как следствие определения равенства дробей, что соответствует научному построению изучения дробей. Каждый ученик должен самостоятельно сделать в тетрадях следующий чертеж: взяв за единицу отрезок в 16 клеток, выделить отрезок в $\frac{3}{4}$ единицы, показать, что полученный отрезок составляет $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{12}{16}$ единицы. После этого предлагается выяснить, как получились знаменатель и числитель каждой из указанных дробей из знаменателя и числителя дроби $\frac{3}{4}$, и обрат-

[1] См. [19].

но, как можно получить знаменатель и числитель дроби $\frac{3}{4}$ из знаменателя и числителя полученных дробей (рис. 25).

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\dots,$$

$$\frac{3}{4}=\frac{2\cdot3}{2\cdot4}=\frac{3\cdot3}{3\cdot4}=\frac{4\cdot3}{4\cdot4}=\dots,$$

$$\frac{12\cdot4}{16.4}=\frac{9\ 3}{12:3}=\frac{6\cdot2}{8\cdot2}=\frac{3}{4}.$$

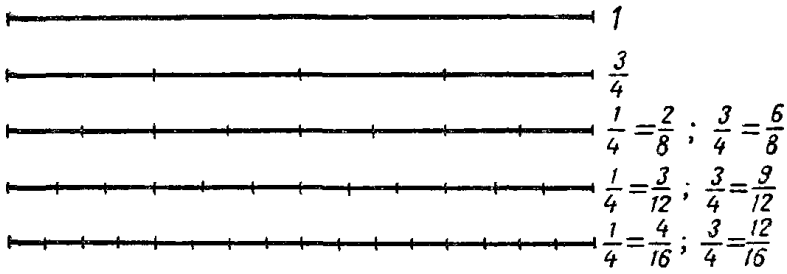


Рис. 25

Для вывода основного свойства дроби в ряде учебников и методик предлагается предварительно изучить изменение величины дроби с увеличением (или уменьшением) числителя или знаменателя в несколько раз, причем устанавливается, во сколько раз увеличивается или уменьшается при этом дробь. Выводится правило увеличения и уменьшения дроби в несколько раз, то есть умножения и деления дроби на целое число. После этого рассматривается одновременно увеличение (или уменьшение) членов дробей в одно и то же число раз и устанавливается основное свойство дроби.

Рассмотрение *увеличения или уменьшения дроби в несколько раз* следует увязывать с прохождением умножения и деления дроби на целое число, так как эти задачи тождественны. Если же этот вопрос рассматривать до действий, то необходимо показать, что, увеличивая дробь в несколько раз, мы ее умножаем на целое число, уменьшая — делим на целое число, но тогда нарушится систематичность изложения. Очень часто эта связь не подчеркивается и пятиклассники не осознают тождественность задачи — увеличить дробь в несколько раз и умножить дробь на целое число — и не решаются применять правила увеличения и уменьшения дроби к умножению и делению дроби на целое число. Такое изучение увеличения и уменьшения дроби в несколько раз приносит вред учащимся, создавая путаницу в их умах.

После изучения основного свойства следует перейти к преобразованиям дробей: к сокращению дробей, затем к приведению дробей к общему знаменателю. Эти преобразования можно связать с сравнением дробей с разными числителями и знаменателями

Для сознательного усвоения *преобразования дробей* применяются построения, выполняемые учащимися в тетрадях. Например, сокращение дроби $\frac{6}{8}$ можно показать на чертеже следующим образом (рис. 26):

$$\frac{6}{8}=\frac{6}{8}\frac{2}{2}=\frac{3}{4}.$$

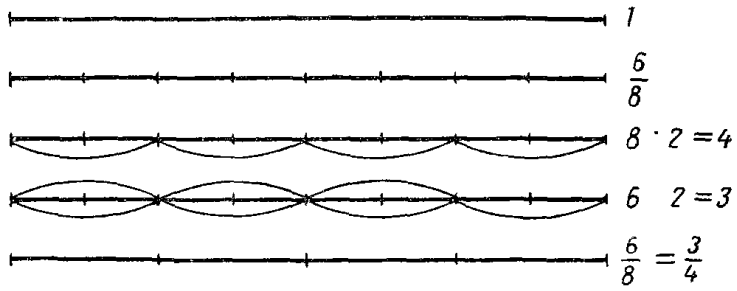


Рис 26

При этом ведутся следующие рассуждения: возьмем отрезок, составляющий $\frac{6}{8}$ линейной единицы, 8 восьмых долей единицы можно сгруппировать по 2 восьмых, тогда число долей, на которые разделена единица, уменьшится в 2 раза (8 : 2 = 4), 6 восьмых долей той же единицы тоже можно сгруппировать по 2 восьмых, тогда число долей в данном отрезке тоже уменьшится в 2 раза (6 : 2 = 3): отрезок, составленный из 6 восьмых линейной единицы, можно рассматривать составленным из 3 четвертей той же единицы.

§ 15. Действия над дробями

1. *Сложение и вычитание дробей*

Действия с дробями в V классе следует начать со сложения дробей с одинаковыми знаменателями и на конкретных примерах подчеркнуть, что сложение дробей состоит в подсчете одинаковых долей, содержащихся в данных дробях вместе, то есть определение сложения дробей мало отличается от определения сложения целых чисел.

Полезно подвести учащихся к формулировке правила сложения дробей, заменяющего определение, путем выполнения ими построений. Следует предложить учащимся построить отрезки, равные $\frac{2}{7}$ единицы и $\frac{3}{7}$ единицы, и отрезок, равный их сумме. Учащиеся в результате построений получают $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$.

Аналогичное построение предлагает провести и стабильный учебник [1].

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями следует составить систему упражнений, охватывающую все возможные случаи сложения: 1) целого с дробью; 2) целого со смешанным числом; 3) двух правильных дробей: а) дающих в сумме правильную дробь, б) дающих в сумме целое число, в) дающих в сумме неправильную дробь; 4) смешанного числа с дробью, причем: а) сумма дробей — правильная дробь; б) сумма дробей — целое число; в) сумма дробей — неправильная дробь; 5а), 5б), 5в) — те же случаи для суммы смешанных чисел. При сложении дробей с разными знаменателями в основу системы упражнений берутся различные случаи отыскания общего знаменателя. Следует вначале брать простые случаи отыскания общего знаменателя, которые не отвлекали бы от основной задачи — сложения дробей. На основании рассмотрения различных примеров ученики устанавливают справедливость законов сложения для дробных чисел, например:

$$1)\ \frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5+3}{7}=1\frac{1}{7};\quad \frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=1\frac{1}{7};$$

$$\boxed{\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}+\frac{5}{7}}.$$

$$2)\ \frac{20}{37}+\left(\frac{17}{37}+\frac{28}{37}\right)=\frac{20+(17+28)}{37}=1\frac{28}{37};$$

$$\left(\frac{20}{37}+\frac{17}{37}\right)+\frac{28}{37}=\frac{(20+17)+28}{37}=1\frac{28}{37};$$

$$\boxed{\frac{20}{37}+\left(\frac{17}{37}+\frac{28}{37}\right)=\left(\frac{20}{37}+\frac{17}{37}\right)+\frac{28}{37}}.$$

Рассуждения, приведенные на частных примерах, имеют общий характер, а именно: сложение дробей с одинаковыми знаменателями сводится к сложению числителей, то есть целых чисел, так как для целых чисел справедливы законы сложения, следовательно, они справедливы и для дробных чисел.

[1] См. [182].

Вычитание дробей определяется так же, как и для целых чисел, как действие, обратное сложению.

Некоторые авторы [1] учебных руководств предлагают проходить вычитание параллельно со сложением. После каждого примера сложения составлять соответствующий пример на вычитание. Такой порядок имеет свои преимущества, при этом подчеркивается, что вычитание — действие, обратное сложению. Большинство же учебников сначала рассматривают сложение дробей, потом вычитание, после этого совместно сложение и вычитание, считая, что последний порядок изучения сосредоточивает внимание ученика на одной трудности.

При вычитании дробей система упражнений имеет еще большее значение, чем при сложении, так как при вычитании иногда приходится уменьшаемое преобразовывать, что затрудняет учащихся. Постепенно усложняя упражнения, можно подготовить учащихся к усвоению трудных случаев вычитания. Рассмотрим различные случаи, которые можно положить в основу системы упражнений на вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, а именно. 1) из дроби вычесть дробь; 2) из смешанного числа — дробь, которая меньше дробной части смешанного числа; 3) из единицы — дробь; 4) из целого числа, большего единицы,— дробь; 5) из числа, равного единице с дробью, вычесть дробь, которая больше дроби в уменьшаемом; 6) из смешанного числа — смешанное, причем дробь вычитаемого меньше дроби уменьшаемого; 7) из целого — смешанное число; 8) из смешанного — смешанное число, дробь которого больше дроби в уменьшаемом.

Примерная запись при сложении и вычитании дробей:

$$3\frac{11}{20}+1\frac{7}{12}+5\frac{13}{15}=3\frac{33}{60}+1\frac{35}{60}+5\frac{52}{60}=9\frac{33+35+52}{60}=9\frac{120}{60}=11.$$

$$7\frac{2}{9}-4\frac{8}{21}=7\frac{14}{63}-4\frac{24}{63}=6\frac{77}{63}-4\frac{24}{63}=2\frac{53}{63}.$$

Не следует спешить переходить к записи общего знаменателя под одной чертой; учащиеся часто не осознают, что производится замена данных дробей равными им дробями с общим знаменателем.

2. *Умножение дроби на целое число*

Следующим за сложением и вычитанием дробей изучается умножение дроби на целое число. Умножение дроби на целое число определяется так же, как умножение целых чисел.

При изучении *умножения дроби на целое число* [2] необходимо установить с учащимися определение этого действия как сложе-

[1] См [137], [19]

[2] Натуральное число, не равное единице.

ния равных слагаемых, из которых каждое равно множимому; показать тождественность умножения дроби на целое увеличению дроби в несколько раз; дать определение умножения дроби на 1; показать рациональный прием сокращения дроби, числитель которой представляет произведение (значение сокращения пятиклассники осознают при умножении дроби на целое); научить применять умножение дроби на целое к задачам; рассмотреть частные случаи умножения, например: умножение дроби на число, равное знаменателю; умножение смешанного числа на целое число. Приведенный перечень вопросов, возникающих при изучении умножения дроби на целое число, показывает, что каждый из них, кажущийся простым, требует тщательного изучения.

Примерный план урока на тему «Умножение дроби на целое число»

1) Устные упражнения на сложение и вычитание дробей.
2) Устные примеры на деление произведения на число:

$$(36\cdot 17):9= \quad ; \ (28\cdot 18):7=$$

3) Сокращение дробей:

$$\frac{15}{35}; \ \frac{8\cdot 9}{3}; \ \frac{4\cdot 3}{16}; \ \frac{2\cdot 10}{25}.$$

4) Повторение определения умножения на целое число:

$$5\cdot 3=5+5+5=15.$$

5) Определение умножения дроби на целое число:

$$\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}=\frac{6}{7}.$$

6) Решение задач в одно действие на умножение дроби на целое число, например: «1 $м^3$ сосновых дров весит $\frac{3}{10}$ $т$. Найти вес 2 $м^3$ этих дров (в тоннах), 7 $м^3$».

7) Сформулировать правило умножения дроби на целое число: чтобы умножить дробь на целое число, достаточно числитель дроби умножить на это число, оставив прежний знаменатель.

8) Самостоятельная работа.

а) Найти произведения:

$$\frac{2}{17}\cdot 5; \ \frac{3}{16}\cdot 4; \ \frac{16}{27}\cdot 9; \ \frac{9}{16}\cdot 12.$$

б) Составить задачи, при решении которых требовалось бы умножить:

$$\frac{3}{7} \text{ на } 8; \quad \frac{4}{25} \text{ на } 9.$$

9) Домашнее задание.

Приведенные в этом плане устные упражнения на деление произведения на число и сокращение дробей готовят учащихся к обоснованию сокращения дробей, в числителе которых стоит произведение. Ученики вспоминают, как разделить произведение на число и при сокращении дробей ведут следующие рассуждения: чтобы сократить дробь, надо числитель и знаменатель разделить на одно и то же число; в числителе стоит произведение; чтобы произведение разделить на число, достаточно один из множителей разделить на это число. Поэтому при сокращении дроби $\frac{2\ 10}{25}$ делим 10 и 25 на 5.

На следующем уроке следует предложить ученикам на нескольких примерах умножения дроби на целое число сравнить множимое и произведение по величине. Установить, что для дробей, как и для целых чисел, увеличить дробь в несколько раз — значит умножить ее на целое число. На основании рассмотрения примеров вида

$$\frac{5}{11} \cdot 2 = \frac{10}{11}; \quad \frac{4}{25} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{4}{5}$$

делается вывод об изменении величины дроби с увеличением числителя или уменьшением знаменателя в данное число раз и дается частный прием умножения дроби на целое число, годный для случая, когда знаменатель дроби делится на данное число:

$$\frac{3}{20} \cdot 4 = \frac{3}{20:4} = \frac{3}{5}.$$

При *изучении умножения смешанного числа на целое* вначале рассматриваются два способа, например:

$$1) \quad 2\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{14}{5} \cdot 3 = \frac{14 \cdot 3}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5};$$

$$2) \quad 2\frac{4}{5} \cdot 3 = 2\frac{4}{5} + 2\frac{4}{5} + 2\frac{4}{5} = (2+2+2) +$$

$$+ \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) = 2 \cdot 3 + \frac{4}{5} \cdot 3 = 6 + \frac{12}{5} = 8\frac{2}{5}.$$

Последние рассуждения показывают справедливость распределительного закона умножения относительно суммы, когда одно из слагаемых дробь.

Рассматривается пример вида

$$25\frac{3}{13}\cdot 4=100\frac{12}{13}$$

и делается вывод, что при умножении смешанного числа на целое в большинстве случаев проще отдельно умножить целое и дробь на целое число.

3. *Деление дроби на целое число*

После умножения дроби на целое число следует перейти к делению целого числа и дроби на целое число, так как нахождение дроби числа, предшествующее умножению на дробь, требует деления на знаменатель. На это указывается в большей части методической литературы и в программах начиная с 1954/55 учебного года. Действие деления определяется как действие обратное умножению.

Рассмотрим пример: 4 : 5.

Сначала проводятся рассуждения, рассмотренные на стр. 226 и 227, то есть, чтобы разделить 4 на 5, представим мысленно каждую единицу разделенной на пять равных частей, тогда 4 единицы будут содержать 20 пятых частей, разделив 20 пятых частей на 5, получим $\frac{4}{5}$, что проверяется: $\frac{4}{5}\cdot 5=4$.

Мы нашли дробь, которая, будучи умноженной на 5, даст 4. Следовательно, деление произведено верно. Запишем:

$$4:5=x;\quad x\cdot 5=4;\quad \frac{4}{5}\cdot 5=4;$$

$$\boxed{4:5=\frac{4}{5}.}$$

Вывод. От деления целого числа на целое получается дробь, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю. Обратно· всякую дробь можно считать за частное от деления ее числителя на знаменатель.

Например, $\frac{3}{7}$ равно частному от деления 3 на 7, так как $\frac{3}{7}\cdot 7=3$.

Изучение деления дроби на целое число начинается с рассмотрения примера умножения дроби на целое число, для которого составляется обратная задача, например:

$$\frac{2}{15}\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{15}=\frac{8}{15};$$

обратная задача:

$$x\cdot 4=\frac{8}{15}.$$

Требуется найти такую дробь, которая, будучи умножена на 4, даст в произведении $\frac{8}{15}$. Такая дробь будет $\frac{2}{15}$. Запишем:

$$\frac{8}{15}:4=\frac{8:4}{15}=\frac{2}{15}.$$

В результате рассмотрения ряда подобных примеров учащиеся приходят к выводу, что при делении дроби на целое число достаточно числитель разделить на целое число, оставив прежний знаменатель. После этого задается вопрос, как разделить дробь, если числитель данной дроби не делится на целое число. Рассматривается второй прием умножения: $\frac{4}{21}\cdot 3=\frac{4}{7}$, отсюда $\frac{4}{7}:3=\frac{4}{21}$. Получается второй способ деления. Применив его к предыдущему примеру, убеждаемся, что второй способ — общий, он годится для любых случаев деления дроби на целое число (не равное 0).

Действительно,

$$\frac{8}{15}:4=\frac{8}{15\cdot 4}=\frac{2}{15}.$$

Правило формулируется так: чтобы разделить дробь на целое число, достаточно знаменатель дроби умножить на это число, оставив числитель прежним.

При делении дроби на целое число ученики встречаются с новым случаем сокращения дробей, поэтому полезно предварительно рассмотреть сокращение дроби вида $\frac{4}{9\cdot 6}$.

В связи с изучением деления дроби на целое ряд авторов[1] учебников предлагают рассмотреть деление дробей с одинаковыми знаменателями. К этому случаю деления можно прийти из решения следующего примера на умножение:

$$\frac{2}{15}\cdot 4=\frac{8}{15}.$$

Чтобы найти множитель, достаточно $\frac{8}{15}:\frac{2}{15}=4$. Получается деление по содержанию; 4 показывает, что $\frac{2}{15}$ содержится в $\frac{8}{15}$ четыре раза. Приходим к выводу, что при делении дробей с одинаковыми знаменателями достаточно числитель первой дроби разделить на числитель второй.

При изучении деления смешанного числа на целое тоже следует разобрать два способа выполнения действия: при первом способе смешанное число обращается в неправильную дробь и производится деление дроби на целое число, при втором — при-

[1] См. [158].

меняется распределительный закон деления относительно суммы и делится отдельно целая и дробная часть смешанного числа (предварительно устанавливается справедливость и применяемого закона деления), например:

$$1)\quad 2\frac{3}{4}:5=\frac{11}{4}:5=\frac{11}{20};$$

$$2)\quad 8\frac{4}{5}:4=8:4+\frac{4}{5}:4=2+\frac{1}{5}=2\frac{1}{5}$$

(в дальнейшем промежуточные записи опускаются);

$$3)\quad 8\frac{5}{11}:3=\left(6+2\frac{5}{11}\right):3=6:3+2\frac{5}{11}:3=$$

$$=6:3+\frac{27}{11}:3=2+\frac{9}{11}=2\frac{9}{11}.$$

В результате разбора решения нескольких примеров ученики отмечают те случаи, в которых рациональнее применять второй способ деления, особенно при устных вычислениях. На этом кончается первая часть изучения действий над дробями. Эта часть непосредственно примыкает к теме «целые числа», так как определения действий, рассмотренных в ней, мало отличаются от определений тех же действий с целыми числами.

4. *Умножение на дробь*

Вторая часть начинается с изучения действия умножения на дробь и представляет новый этап в изучении дробей. Смысл действия умножения на дробь резко отличается от умножения на целое число. Учащиеся привыкли до сих пор понимать под умножением сложение равных слагаемых, произведение считать больше множимого (смысл умножения на единицу им кажется мало отличающимся от обычного понимания умножения). Для умножения на дробь все эти представления не подходят. Поэтому определение умножения на дробь нелегко воспринимается учащимися. Им необходимо показать целесообразность введения нового определения умножения на дробь и конкретный смысл этого определения. В связи с этим в учебно-методической литературе предлагаются различные подходы к введению определения умножения на дробь или к выводу правила умножения на дробь, которое в большинстве случаев заменяет определение.

В XVIII в. и первой половине XIX в. существовал следующий подход к выводу правила умножения на дробь.

Рассуждения велись так: чтобы умножить 5 на $\frac{3}{4}$, умножим 5 сначала на 3, получим произведение 15, которое больше истинного, так как множитель увеличен в 4 раза; чтобы получить истинное произведение, надо полученное произведение 15 уменьшить в 4 раза, будем иметь $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{4}$.

Такой подход неправилен с точки зрения логического построения курса математики, так как здесь свойства произведения целых чисел распространены на произведение с дробным множителем в то время, когда не установлено, что значит «умножить число на дробь» и можно ли распространять эти свойства на произведение дробных множителей. Кроме того, этот подход страдает формализмом: из этих рассуждений не следует, к каким задачам возможно применение действия умножения на дробь.

Существует еще и такой подход:

$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 5$ (по переместительному закону умножения);

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Отсюда выводится правило.

Ошибка этого рассуждения в том, что переместительный закон распространяется на действие, которое еще не определено и еще не доказано, что оно подчиняется переместительному закону. Рассуждение оказалось бы правильным, если бы было обусловлено, что произведение целого числа на дробь должно быть составлено так, чтобы порядок сомножителей не имел значения, то есть для действия умножения на дробь переместительный закон оставался бы справедливым [1]. Была попытка дать общее определение действия умножения, пригодное и для целого и для дробного множителя [2]. Это определение было дано в следующей формулировке: умножить одно число на другое — значит из множимого составить новое число так, как множитель составлен из единицы. Смысл рассуждений при этом был следующий.

При умножении на целое число имеем: $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5$, множитель $3 = 1 + 1 + 1$.

При умножении 5 на $\frac{3}{4}$, так как множитель $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, то есть единица разделена на 4 и полученное частное взято слагаемым 3 раза, должны получить:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4}.$$

Это определение было распространено в учебниках дореволюционной школы. Основной недостаток этого определения — формальный характер его образования. Из определения неясно, к каким конкретным задачам можно применить умножение на дробь. Нельзя подвести учеников к составлению этого определения из рассмотрения конкретных задач.

---

[1] См. [131].
[2] См. [159].

Вторым недостатком его является математическая неточность. Из определения неясен способ составления множителя из единицы; как целое, так и дробное число может быть составлено из единицы различными способами. Число $\frac{3}{4}$ может быть составлено так:

$$\frac{1+1+1}{1+1+1+1}.$$

Если при умножении 5 на $\frac{3}{4}$ произведение из множимого составить так же, как $\frac{3}{4}$ составлено из единицы, то получим

$$\frac{5+5+5}{5+5+5+5}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{3}{4},$$

то есть совсем другой ответ, чем раньше. Кроме того, общее определение умножения затушевывает необходимость нового определения при умножении на дробь.

Основой приведенного определения умножения на дробь служит операторное толкование числа как характеристики действия, которое должно быть осуществлено над каким-либо объектом. Операторному толкованию числа при введении определения умножения на дробь уделялось внимание и в современной литературе [1]. Описан следующий опыт введения определения умножения на дробь: сначала устанавливалась связь между умножением на дробь и умножением на целое число при помощи общих слов, характеризующих это действие в обоих случаях ($10\cdot 2$ — взять 2 десятка, $10\cdot\frac{3}{5}$ — взять $\frac{3}{5}$ десятка) [2]. Этим оправдывалось применение термина «умножение» к разным операциям над данными числами. Для выяснения смысла умножения на дробь было дано наглядное толкование производимым операциям при помощи операций над отрезками. В результате было дано определение умножения на дробь как нахождение дроби числа. Такой прием введения понятия умножения на дробь устранял все вышеуказанные недостатки.

В настоящее время в учебной методической литературе рекомендуется *подводить учеников к определению умножения на дробь из решения задачи с конкретным содержанием;* такой подход рекомендовал еще один из старых русских методистов В. А. Евтушевский. На конкретной задаче и в стабильном учеб-

[1] См. [123].

[2] См.: М. Ф. Шинова, По поводу статей об умножении и делении на дробь, «Математика в школе», 1950, № 6.

нике показывается целесообразность вводимого определения умножения на дробь.

Перед введением определения действия умножения на дробь рассматривается решение задачи на нахождение части числа. В программе и в стабильном учебнике эта задача носит название «нахождение дроби числа». Замена слова «части» словом «дроби» вызвана, очевидно, расширением рассматриваемой задачи: в стабильном учебнике рассматриваются и такие задачи, как: «Найти $\frac{8}{3}$ числа $\frac{5}{6}$» (то есть требуется найти число долей от числа большее, чем во всем числе). Упражнения подбираются в такой системе, чтобы первые задачи и примеры помогли пятиклассникам повторить сведения, полученные в начальной школе, то есть числа должны быть подобраны так, чтобы само число и искомая доля числа были целым числом.

Первая группа упражнений.

Пример. Найти $\frac{4}{5}$ от 60

Решение. $\frac{1}{5}$ от 60 составляет $60:5=12$;

$\frac{4}{5}$ от 60 составляют $12\cdot 4=48$.

Вторая группа упражнений: нахождение части от целого числа, когда искомая доля — дробь.

Пример. Найти $\frac{3}{8}$ от 11.

Решение. $\frac{1}{8}$ от 11; $11:8=\frac{11}{8}$;

$\frac{3}{8}$ от 11; $\frac{11}{8}\cdot 3=\frac{11\cdot 3}{8}=4\frac{1}{8}$.

В дальнейшем записи следует сокращать.

Пример. Найти $\frac{4}{7}$ от 10.

$\frac{4}{7}$ от 10 составляют $(10:7)\cdot 4=\frac{10\cdot 4}{7}=\frac{40}{7}=5\frac{5}{7}$.

Третья группа упражнений: нахождение части от дроби.

Пример. Найти $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$.

Решение. $\left(\frac{4}{5}:3\right)\cdot 2=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}$,

или $\frac{1}{3}$ от $\frac{4}{5}$ составляет $\frac{4}{5\cdot 3}$;

$\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$ составляют $\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$.

Следует подчеркнуть при разборе конкретных задач, что *найти часть от дроби значит определить, какую часть от целого составляет часть от части этого целого.*

Пример. $\frac{3}{4}$ всей земли, принадлежащей колхозу, отведено под хлебные культуры; $\frac{2}{5}$ земли, занятой хлебными культурами, засеяно рожью. Какая часть земли, принадлежащей колхозу, засеяна рожью?

Для решения этой задачи нужно найти $\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{4}$.

$$\frac{2}{5} \text{ от } \frac{3}{4} \text{ составляют } \left(\frac{3}{4}:5\right)\cdot 2=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Рожью засеяно $\frac{3}{10}$ всей земли.

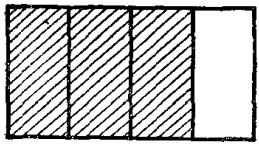


Рис. 27

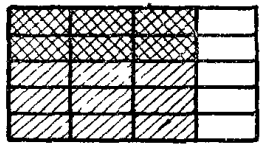


Рис. 28

Ученики должны в тетрадях сделать чертеж (рис. 27), заштриховать участок земли, отведенный под хлебные культуры, из участка, отведенного под хлебные культуры, выделить часть под рожь (рис. 28).

Формулировку «найти дробь числа» следует вводить не сразу, сначала пользоваться старой формулировкой «найти часть числа», конкретный смысл которой учащимся вполне ясен. К новой формулировке можно приучить постепенно, напоминая, что дробью называется одна или несколько равных частей единицы. Введение термина «дробь числа» облегчит формулировку задач, например «найти $\frac{7}{6}$ от $\frac{3}{4}$», а также определение умножения на неправильную дробь.

Решению задачи нахождения дроби числа следует посвятить достаточное количество времени: это создаст прочную базу для изучения умножения на дробь. Часть трудных вопросов этой темы будет, таким образом, выделена и подготовлена, а именно: что значит найти дробь числа? Как найти? Какие могут быть случаи? Как записать формулу решения в виде дроби? При этом можно рассмотреть и сокращение дроби, когда числитель и знаменатель представляют произведение.

Перейдем к изложению той методики преподавания умножения на дробь, которая в настоящее время получила призна-

ние в педагогической практике и в учебно-методической литературе.

К новому определению умножения можно подвести учащихся путем решения геометрической задачи на вычисление площади прямоугольника.

Предварительно рассматривается вычисление площади прямоугольника, у которого длины сторон — дробные числа, путем подсчета долей квадратной единицы, из которых может быть составлен прямоугольник, площадь которого можно определить без знания умножения дробей (подробно этот вопрос изложен в IV части данной книги). Далее предлагаются задачи примерно такого содержания:

Вычислить площадь прямоугольника, у которого:

1) основание 10 *см*, высота 6 *см*;

2) основание $7\frac{1}{2}$ *см*, высота 4 *см*.

Площадь первого прямоугольника ученики находят, пользуясь правилом для вычисления площади прямоугольника. Для второго прямоугольника преподаватель предлагает проверить справедливость правила. Учащиеся из чертежа находят, что в одном ряду укладывается $7\frac{1}{2}$ кв. ед. и таких рядов получается 4. Следовательно, для вычисления площади достаточно $7\frac{1}{2}$ умножить на 4.

Затем предлагается начертить прямоугольник, основание которого 4 *см*, а высота 1 *см*; затушевать на этом чертеже прямоугольник, у которого основание 4 *см*, а высота $\frac{1}{4}$ *см*, и вычислить его площадь. Учащиеся находят площадь затушеванного прямоугольника путем подсчета долей квадратной единицы. После этого преподаватель указывает, что для того, чтобы площадь прямоугольника вычислялась по одному правилу, условились и в этом случае решение записывать при помощи умножения длины основания на длину высоты, то есть $4 \cdot \frac{1}{4}$.

Чтобы выяснить смысл умножения 4 на $\frac{1}{4}$, предлагается с помощью чертежа (рис. 29) ответить на вопросы: чему равна площадь всего прямоугольника? Какая часть прямоугольника затушевана? Какова площадь затушеванной части? Учащиеся устанавливают, что искомая площадь составляет $\frac{1}{4}$ всей площади прямоугольника, то есть $\frac{1}{4}$ от 4 *кв. см* и равна $4:4=1$ (*кв. см*). Следовательно, $4 \cdot \frac{1}{4}$ — значит найти $\frac{1}{4}$ от 4. После этого записывают $4 \cdot \frac{1}{4} = 4:4=1$ (*кв. см*).

Затем предлагается построить второй прямоугольник, основание которого 4 *см*, а высота 1 *см* (рис. 30), затушевать на этом чертеже прямоугольник с основанием 4 *см* и высотой $\frac{3}{4}$ *см*. Применить правило для вычисления площади этого прямоугольника.

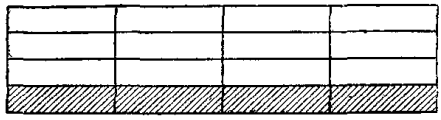


Рис. 29

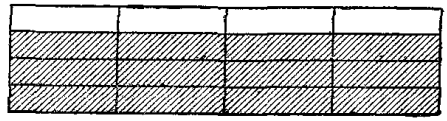


Рис. 30

Учащиеся получают $4 \cdot \frac{3}{4}$. Чтобы выяснить, что это значит, устанавливают по чертежу, что искомая площадь составляет $\frac{3}{4}$ от площади всего прямоугольника и равна $(4:4) \cdot 3 = 3$ (*кв. см*). Следовательно, $4 \cdot \frac{3}{4}$ — значит найти $\frac{3}{4}$ от 4.

$$4 \cdot \frac{3}{4} = (4:4) \cdot 3 = 3 \text{ (кв. см)}.$$

Следует повторить эти рассуждения с прямоугольником, основание которого 2 *дм* и высота 1 *дм*, и установить, что значит $2 \cdot \frac{1}{2}$, $2 \cdot \frac{3}{5}$. Учащиеся должны самостоятельно выполнить чертежи в тетрадях.

Вообще, *условились* считать, что *умножить число на дробь — значит найти эту дробь множимого*. Умножить число на правильную дробь — значит найти часть числа, которая выражена этой дробью.

Можно показать целесообразность определения умножения на дробь на решении следующих арифметических задач.

«Автомобиль едет со скоростью 45 *км/ч*. 1) Какое расстояние он пройдет в 3 часа? 2) в 7 часов? 3) в $\frac{2}{3}$ часа? 4) в $\frac{3}{4}$ часа?»

Записывается решение задач.

1-я задача	2-я задача	3-я задача	4-я задача
$45 \cdot 3 = 135$ (*км*)	$45 \cdot 7 = 315$ (*км*)	$\frac{2}{3}$ от 45 $(45:3) \cdot 2 =$ $= 30$ (*км*)	$\frac{3}{4}$ от 45 $(45:4) \cdot 3 =$ $= 33\frac{3}{4}$ (*км*)

Ведутся такие рассуждения.

Условие всех задач одинаково. Дана скорость автомобиля и требуется узнать, какое расстояние автомобиль пройдет за некоторое число часов. Для нахождения расстояния в 1-й и 2-й задачах скорость умножали на время. Чтобы одинаковые по смыслу задачи решались одинаковыми действиями, условились и в 3-й и в 4-й задачах называть нахождение $\frac{2}{3}$ от 45 и $\frac{3}{4}$ от 45 умножением 45 на $\frac{2}{3}$ и 45 на $\frac{3}{4}$, тогда решение 3-й и 4-й задач запишется так:

$$45 \cdot \frac{2}{3} = (45 : 3) \cdot 2 = 30 \ (км);$$

$$45 \cdot \frac{3}{4} = (45 : 4) \cdot 3 = 33\frac{3}{4} \ (км).$$

Умножить 45 на $\frac{2}{3}$ — значит найти $\frac{2}{3}$ от 45, умножить 45 на $\frac{3}{4}$ — значит найти $\frac{3}{4}$ от 45.

После этого устанавливается то же определение умножения на дробь. Правило умножения целого числа на дробь выводится после решения ряда примеров на основании определения. Для вывода правила следует взять такие упражнения, в которых знаменатель дроби и целое не имеют общего множителя, например:

$$7 \cdot \frac{2}{3}; \qquad 8 \cdot \frac{5}{7}.$$

При умножении целого числа на смешанное число рассматриваются два способа умножения: первый — множитель обращается в неправильную дробь, и умножение производится на основании установленного определения, второй — применяется распределительный закон умножения. Предварительно устанавливаем справедливость распределительного закона и в том случае, когда в множителе одно из слагаемых — дробь. Путем наблюдения на частных примерах выясняется, что оба способа умножения на смешанное число дают одно и то же произведение. Обращается внимание учеников на то, что второй способ короче для тех случаев, когда ответ требуется получить в виде смешанного числа. Умножение дроби на дробь изучается на основании определения умножения на дробь.

Задача. Литр керосина весит $\frac{4}{5}$ *кг*. Найти вес $\frac{2}{3}$ *л* керосина.

Решение. $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

Ведутся такие рассуждения. Умножить $\frac{4}{5}$ на дробь $\frac{2}{3}$ значит найти $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$. Для этого сначала находим $\frac{1}{3}$ от $\frac{4}{5}$, то есть делим $\frac{4}{5}$ на 3, получим $\frac{4}{15}$ Потом, чтобы найти $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$, умножаем $\frac{4}{15}$ на 2.

Это записывается так:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{4}{5}:3\right)\cdot 2=\frac{4}{5\cdot 3}\cdot 2=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}.$$

Короче можно написать:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}.$$

Числитель полученной дроби получился от перемножения числителей данных дробей, а знаменатель — от перемножения их знаменателей. После рассмотрения ряда примеров выводится правило: чтобы умножить дробь на дробь, достаточно числитель первой дроби умножить на числитель второй и знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе знаменателем произведения.

Необходимо *показать* пятиклассникам на частных примерах *справедливость основных законов умножения для дробных чисел.* Приведем несколько упражнений, убеждающих в справедливости сочетательного закона для дробных чисел.

Вычислить устно:

$$1)\ 10\cdot\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{3}.$$

Разбираются два способа вычисления:

$$10\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)=10\cdot 2=20;$$

$$10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=6\cdot\frac{10}{3}=20.$$

Результат получился одинаковый, следовательно,

$$10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=10\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}\right).$$

$$2)\ \frac{19}{45}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{3}. \qquad 3)\ 3\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}.$$

При рассмотрении умножения смешанных чисел обычный прием путем обращения смешанных чисел в неправильные дроби не вызывает затруднения. Следует обратить внимание

на другой способ умножения смешанных чисел — умножение по частям, отдельно на целое число и на дробь. Этот способ удобен в некоторых случаях при устном счете. Например, при умножении $6\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$ выгоднее считать так:

$$6\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = 6\frac{1}{2} \cdot 2 + 6\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) + \left(6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 13 + 2\frac{1}{6} = 15\frac{1}{6}.$$

Необходимо обратить внимание на этот способ еще и потому, что часто при устном счете ученики неправильно им пользуются, умножая целое число на целое и дробь на дробь, и сумму полученных произведений считают за искомое произведение. Неправильность таких вычислений следует показать на решении конкретной задачи, лучше всего с геометрическим содержанием. Рассмотреть следующую задачу.

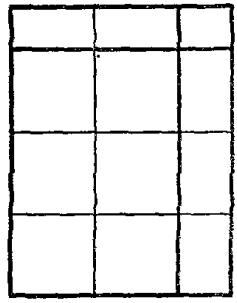


Рис. 31

«Построить прямоугольник, основание и высота которого $2\frac{2}{3}$ ед. и $3\frac{1}{2}$ ед., и найти его площадь двумя способами:

1) вычисляя сразу всю площадь, 2) вычисляя по частям» (рис. 31).

1-й способ.

$$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 8}{3 \cdot 2} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

2-й способ.

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6 + 2 + 1 + \frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

Учащиеся получают наглядное представление о втором способе умножения.

Полезно показать, что при вычислении вторым способом применяется распределительный закон умножения.

$$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 3\frac{1}{2} \cdot 2 + 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}.$$

Следует подчеркнуть учащимся, что совпадение произведений, полученных 1-м и 2-м способами, показывает на справедливость распределительного закона и в том случае, когда оба сомножителя — смешанные числа.

Изучая умножение дробей, следует обратить внимание учеников еще на одну особенность, отличающую умножение на дробь от умножения на целое число.

При умножении на правильную дробь полученное произведение меньше множимого (или от умножения на правильную дробь данное число уменьшается). Следует требовать обоснование этого вывода рассуждением и иллюстрировать примерами.

Рассмотрим систему примеров умножения на неправильную дробь.

$$6\cdot\frac{8}{3}=16;\quad \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5};\quad 3\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}=4\frac{1}{2};\quad 7\cdot\frac{5}{5}=7.$$

Вывод. При умножении на неправильную дробь, не равную единице, произведение больше множимого.

После этого следует предложить пятиклассникам сделать общий вывод относительно того, в каком случае произведение получается больше множимого, в каком случае меньше множимого, в каком случае оно равно множимому. Предлагаются учащимся, например, следующие контрольные вопросы: На какое число нужно умножить число 5, чтобы произведение получилось больше 5? равно 5? меньше 5? Приведите примеры.

5. *Деление на дробь*

Делению на дробь следует предпослать решение задачи на нахождение числа по данной величине его дроби. На это указывает и программа восьмилетней школы. В начальной школе дети решали задачи на нахождение числа по одной его доле. В V классе тоже следует начать с решения задач данного вида, сопровождая решение графической иллюстрацией.

Пример. $\frac{1}{5}$ длины веревки составляет 4 *дм*. Найти длину всей веревки. 4 *дм*$\cdot 5=20$ *дм* (рис. 32).

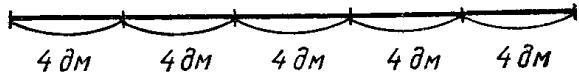


Рис. 32

Ученики выполняют чертеж в тетрадях. Учитель предлагает за 1 *дм* принять длину одной клетки в тетради.

Вторая группа упражнений. «Найти число, $\frac{5}{6}$ которого равны 20» (рис. 33). Обозначим неизвестное число буквой x, тогда условие задачи запишется: $\frac{5}{6}$ от x равны 20, короче говоря, $\frac{5}{6}x=20$.

Решение. 1) $\frac{1}{6}x=20:5=4$; 2) $x=4\cdot 6=24$.

Учащиеся самостоятельно выполняют чертеж в тетрадях.

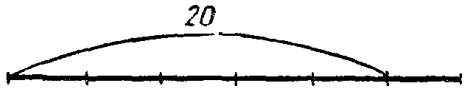


Рис. 33

После ряда упражнений следует объяснить происхождение записи $\frac{5}{6}x$. Так как часть числа находится умножением, то можно записать $x\cdot\frac{5}{6}$ или, пользуясь переместительным законом, $\frac{5}{6}\cdot x$, короче, $\frac{5}{6}x$.

Третий вид упражнений:

$$\frac{2}{3}x=7;\quad x=(7:2)\cdot 3=\frac{7\cdot 3}{2}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}.$$

Как и при нахождении дроби числа, при нахождении числа по данной величине его дроби необходимо рассмотреть все случаи.

Определение деления числа на дробь остается то же, что и при делении целых чисел. Эту мысль необходимо подчеркнуть. Следует начать с повторения решения примера вида $x\cdot 7=21$, затем перейти к рассмотрению примера умножения на дробь и образовать две обратные задачи, например: $27\cdot\frac{4}{9}=12$

Составим обратную задачу, взяв за искомое число множитель. Эта задача решается делением целого числа на целое, которое рассмотрено раньше.

Составим вторую обратную задачу, взяв за искомое множимое. Запишем:

$$x\cdot\frac{4}{9}=12.$$

Эта задача и для дробных чисел решается действием деления.

$$12:\frac{4}{9}=x.$$

Так как $x\cdot\frac{4}{9}=12$, или $\frac{4}{9}x=12$, то, чтобы найти x, мы находим число, $\frac{4}{9}$ которого равны 12, отсюда $x=(12:4)\cdot 9=27$.

При помощи такого рода рассуждений, основой которых служит определение, учащиеся приходят к выводу, что при делении на дробь отыскивается число по данной величине его дроби.

Первые примеры деления на дробь решаются с подробной записью, например.

$$6:\frac{3}{7}=x;\ \ \frac{3}{7}x=6;\ \ x=(6:3)\cdot 7=14;$$

$$6:\frac{3}{7}=\frac{6\cdot 7}{3}=14.$$

Дальше рассуждения проводятся устно, решение записывается так:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

После решения нескольких примеров формулируется правило деления целого числа на дробь.

Аналогично выводится правило деления дроби на дробь.

Неправильно строить изучение деления на дробь, взяв за определение, что разделить какое-нибудь число на дробь — значит найти число по данной величине его дроби. Это противоречит научному построению изучения действий над числами, при котором вычитание и деление любых чисел определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Полезно напомнить ученикам, что так как умножение обладает переместительным законом, то для отвлеченных чисел деление на дробь имеет одинаковый смысл независимо от того, какой из двух сомножителей — множимое или множитель — является данным и какой искомым.

Но при решении конкретных задач в том случае, когда искомым является множитель (деление по содержанию), деление на дробь имеет другой смысл по сравнению с тем случаем, когда искомым является множимое. Рассмотрим для примера задачу.

«Из 6 *м* проволоки нужно сделать прутики для классных счетов, длиною каждый по $\frac{3}{4}$ *м*. Сколько выйдет таких прутиков?»

Для решения этой задачи 6 *м*:$\frac{3}{4}$ *м*, в этом случае частное показывает, сколько раз $\frac{3}{4}$ *м* содержится в 6 *м* или во сколько раз 6 *м* больше $\frac{3}{4}$ *м*.

Для отыскания частного можно провести следующие рассуждения: 6 *м*$=\frac{24}{4}$ *м*, $\frac{3}{4}$ *м* содержится в $\frac{24}{4}$ *м* 8 раз.

Но можно рассуждать и так: $6:\frac{3}{4}=x$; $\frac{3}{4}\cdot x=6$. Но по переместительному закону умножения $\frac{3}{4}\cdot x=x\cdot\frac{3}{4}$.

Следовательно, и в этом случае мы можем деление выполнять по тому же правилу, что и при нахождении всего числа по данной его части.

Рассмотрим вторую задачу.

«Площадь одного участка $\frac{9}{10}$ *га*, другого $\frac{3}{8}$ *га*. Какую часть площадь второго участка составляет от площади первого?»

В этой задаче требуется найти дробь, при умножении на которую $\frac{9}{10}$ *га* получим $\frac{3}{8}$ *га*. Для этого $\frac{3}{8}$ *га*: $\frac{9}{10}$ *га*. Обозначим частное через x, получим $\frac{9}{10}\cdot x=\frac{3}{8}$. Но по переместительному закону умножения получаем $x\cdot\frac{9}{10}=\frac{3}{8}$. Следовательно, и в этом случае мы можем применить выведенное правило деления на дробь.

Приходим к выводу. При делении на дробь решаются задачи двух родов: 1) когда по дроби какого-нибудь числа ищется это число и 2) когда узнаем, сколько раз одно число содержится в другом или какую дробь одно число составляет от другого. Выведенное правило деления на дробь распространяется и на случай деления по содержанию. Таким же образом следует показать, что и при делении на целое число по содержанию можно пользоваться ранее выведенным правилом. Необходимо обратить внимание пятиклассников на то, что при делении на правильную дробь в частном получается число, большее делимого.

Так же как при умножении, рассматриваются на частных примерах возможные случаи соотношения между частным и делимым, устанавливается, при каком делителе частное больше делимого, при каком — частное равно делимому, при каком — частное меньше делимого.

Не следует забывать важного значения упражнений в придумывании учащимися различных простых задач, которые решались бы умножением на дробь и делением на дробь. Правильное выполнение этого задания служит критерием того, что в сознании ученика образовалось новое понятие о действии.

Например, составить задачу, решение которой записывается так:

$$1)\ 24\cdot\frac{3}{8};\quad 2)\ 8:\frac{2}{3}.$$

После того как учащиеся основательно поняли и усвоили смысл деления на дробь, можно дать *понятие о числе, обратном данному,* и познакомить их с общим правилом деления, пригодным для всех случаев. По этому правилу деление на дробь заменяется умножением на число, обратное делителю, что дает возможность распространять некоторые свойства произведения на частное. Это правило является новым обобщением, полученным благодаря введению дробных чисел

Необходимо обратить внимание учеников на рациональные приемы вычислений с дробями в тех случаях, когда приходится выполнять последовательно несколько умножений и делений; сначала следует обозначить действия, затем произвести возможные сокращения и только после этого выполнить вычисления, например:

$$9 \cdot 3\frac{1}{7} \cdot \frac{4}{11} : 1\frac{5}{7} = \frac{9 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 7}{7 \cdot 11 \cdot 12} = 6.$$

ГЛАВА V

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ. ПРОЦЕНТЫ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 16. Общие вопросы

При изучении десятичных дробей после обыкновенных в основу изучения первых должна быть положена теория обыкновенных дробей. Упрощения в технике производства действий над десятичными дробями, связанные с особенностью знаменателей этих дробей, устанавливаются путем применения к десятичным дробям нумерации и правил выполнения действий над целыми числами. Рассмотрим определения десятичных дробей. При указанном расположении темы «Десятичные дроби» в учебной и методической литературе применяются два вида определений десятичной дроби Первое определение: «Десятичной дробью называется дробь, у которой знаменатель — число, изображенное единицей с последующими нулями». Во втором определении еще добавляется условие особой записи, например: «но записанная при помощи десятичных знаков». В учебной литературе первое определение встречается чаще. Учащимся следует давать первое определение, так как добавление условия особой записи дроби, чтобы она была десятичной, делает классификацию дробей нечеткой, отвлекает ученика от мысли, что десятичные дроби есть частный вид обыкновенных дробей.

Чтобы подготовить учеников к изучению десятичных дробей, следует включить в упражнения над обыкновенными дробями упражнения с дробями, выраженными в десятичных долях, например: обратить в неправильную дробь $3\frac{27}{100}$, сложить дроби: $\frac{237}{1000}+8\frac{31}{100}+$ $+2\frac{9}{10}$. При решении этих примеров учащиеся наблюдают упрощения, связанные с особым видом знаменателей дробей.

Приступая к изучению десятичных дробей, следует еще раз на примерах напомнить, что вычисления с десятичными дробями гораздо проще, чем с другими; подчеркнуть, что десятичные доли наиболее употребительны в жизненной практике; вспомнить, что 1 *дм* $=\frac{1}{10}$ *м*, 1 *см* $=\frac{1}{100}$ *м*, копейка — сотая часть рубля и т. д.; установить задачи, которые можно решать при изучении этой темы

При изучении десятичных дробей возникает задача выработать правила, дающие возможность упростить и запись и вычисления с дробями. Можно рекомендовать следующий план изучения этой темы: 1) определение десятичной дроби, 2) запись и чтение десятичных дробей, 3) преобразования десятичных дробей, 4) сравнение десятичных дробей, 5) действия над десятичными дробями, 6) обращение обыкновенных дробей в десятичные.

§ 17. Запись и чтение десятичных дробей

Начиная знакомство с десятичными дробями, необходимо установить, что: 1) каждая десятичная доля в 10 раз больше следующей более мелкой доли; 2) каждую десятичную дробь можно представить в виде суммы дробей, знаменатели которых 10, 100, 1000 и т. д., а числители — однозначные числа, и обратно: каждую сумму десятичных дробей упомянутого вида можно заменить дробью, числитель которой многозначное число, записанное теми цифрами, которыми записаны числители этих дробей, а знаменатель — наибольший из знаменателей данных дробей; 3) для записи десятичных дробей можно использовать поместное значение цифр, если продолжить их запись вправо после цифры, обозначающей число единиц первого разряда, отделив цифру единиц от последующих цифр особым знаком.

Для изучения этих положений следует составить систему соответствующих упражнений, например:

1. Написать единицы различных разрядов, начиная с единиц первого разряда третьего класса и кончая единицей второго разряда первого класса; сравнить каждую следующую единицу с предыдущей. Записать десятичные доли, начиная с $\frac{1}{10}$ и кончая $\frac{1}{1\,000\,000}$; сравнить каждую следующую единицу с предыдущей.

Что общего в этих двух рядах чисел?

2. Сложить следующие числа:

а) $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$; б) $\frac{4}{10}+\frac{7}{100}$; в) $\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}$;

г) $\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{9}{1000}$; д) $\frac{7}{10}+\frac{8}{1000}$.

Прочитать все полученные суммы справа налево: сначала сумму, затем те слагаемые, из которых она составлена.

3. Записать дробь $\frac{1263}{10\,000}$ в виде суммы дробей, знаменатели которых 10, 100 и т. д., а числители — однозначные числа.

Следует рассмотреть с учащимися таблицу 14 и предложить им начертить подобную таблицу в тетрадях.

4. Прочитать числа, написанные в таблице. Как будет изменяться число, изображаемое цифрой, если ее передвигать по этой таблице от какой-нибудь графы влево? вправо?

Таблица 14

1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
тысячи	сотни	десятки	единицы	десятые	сотые	тысячные	десяти-тысячные	стоты-сячные	миллион-ные
	2	3	7	1	5	6			
		5	6	0	1	8	9		
				7	5				
					2				
			3	0	0	0	8	7	

5. Записать с помощью таблицы в тетрадях числа:

$$\frac{3}{10};\ \frac{7}{100};\ \frac{54}{1000};\ \frac{1246}{1000}.$$

6. Отложить на счетах числа.

Затем преподаватель объясняет: «Для того чтобы не чертить таблицы каждый раз, когда нужно записать десятичную дробь без знаменателя, после целых единиц ставят запятую; тогда цифры вправо от запятой на первом месте означают десятые доли, на втором — сотые доли и т. д.». После этого предлагает ученикам прочесть ряд десятичных дробей, записанных без знаменателя, и записать ряд дробей, не употребляя черты и таблицы.

В число упражнений полезно включить запись дробей $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ в виде десятичных, на это указывает и программа восьмилетней школы. Эти упражнения подчеркивают связь между обыкновенными и десятичными дробями.

§ 18. Преобразования и сравнение по величине десятичных дробей

При изучении третьего пункта плана — преобразования дробей, можно использовать такие упражнения:

1. Сравнить следующие числа:

а) 0,3; 0,30; 0,300; б) 1,4; 1,40; 1,400;

в) 0,23; 0,230; 0,2300.

2. Выразить в тысячных долях дроби: 0,7; 0,08; 7,8; 4.

3. Привести к общему знаменателю дроби: 0,25; 0,9; 0,781.

4. Сократить дроби, сохранив их десятичными: 1,8500; 100,400.

В результате подобного рода упражнений ученики вспоминают основное свойство дроби и устанавливают следующее.

Чтобы в результате преобразования десятичная дробь оставалась десятичной, можно числитель и знаменатель десятичной дроби умножать или делить только на 10, 100 и т. д., поэтому механизм приведения десятичных дробей к общему знаменателю состоит в приписывании нулей справа к записи десятичной дроби без знаменателя, а сокращение — в вычеркивании нулей в конце записи десятичной дроби. Таким образом, преобразование десятичных дробей гораздо проще, чем обыкновенных дробей.

Правила сравнения дробей учащиеся могут установить в результате упражнений следующего вида: 1) сравнить по величине числа 4,3 рубля и 3,56 рубля, длины отрезков в 2,35 *дм* и 2,5 *дм*, сделав соответствующий чертеж в тетради, 2) расположить по величине числа в порядке возрастания: 2,003; 0,7; 0,56; 2,05; 1,327; 1,8; 1,46; 2,1.

§ 19. Действия над десятичными дробями

Основное положение, что все правила действий, выведенные для обыкновенных дробей, справедливы и для десятичных дробей, ученик должен твердо помнить.

1. *Сложение и вычитание десятичных дробей*

При изучении сложения и вычитания десятичных дробей сначала рассматривается общий прием выполнения этих действий над дробями путем приведения их к общему знаменателю, уравниванием числа десятичных знаков после запятой. Затем отсюда выводится упрощенное правило сложения десятичных дробей: при сложении десятичных дробей достаточно подписать их так, чтобы одинаковые доли находились друг под другом в

одном столбце, и складывать их по разрядам Можно дать еще и такое обоснование правила: так как десятичные дроби можно представить как суммы дробей с знаменателями 10, 100, 1000 и т. д., то, группируя слагаемые, содержащие одинаковые доли, и находя их суммы, можно складывать данные дроби, как целые числа, по разрядам. Подобное же правило выводится для вычитания десятичных дробей.

Каждое действие следует рассмотреть отдельно, составив соответствующие системы упражнений, дающие возможность отработать все частные случаи, например, при вычитании:

1) число десятичных знаков у уменьшаемого и вычитаемого одинаковое;

2) у вычитаемого десятичных знаков меньше, чем у уменьшаемого;

3) у вычитаемого десятичных знаков больше, чем у уменьшаемого;

4) из целого числа вычесть десятичную дробь.

Затем уже можно решать комбинированные примеры.

При сложении и вычитании десятичных дробей программа рекомендует применять счеты.

2. *Умножение десятичных дробей*

Умножение десятичных дробей начинают с рассмотрения умножения десятичной дроби на целое число, причем сначала рассматривают общий прием умножения дроби на целое, затем уже вводят упрощения, например:

$$2{,}37 \cdot 9 = \frac{237 \cdot 9}{100} = \frac{2133}{100} = 21{,}33.$$

При выводе частного приема полезно провести также и рассуждения, основанные на применении распределительного закона умножения относительно суммы во множимом, следующим образом: 2,37 можно рассматривать как сумму 2 единиц, 3 десятых, 7 сотых, а чтобы умножить сумму на число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные произведения сложить, то есть 2 единицы умножить на 9; 3 десятых умножить на 9; 7 сотых умножить на 9 и произведения сложить.

Отдельно следует рассмотреть умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. В этом случае можно разделить знаменатель на 10, 100, 1000 и т. д., числитель же оставить прежний, например:

$$0{,}056 \cdot 10 = 0{,}56; \quad 0{,}056 \cdot 100 = 5{,}6; \quad 0{,}056 \cdot 1000 = 56.$$

Уменьшение знаменателя в 10, 100 и т. д. раз в записи десятичной дроби выражается перемещением запятой вправо. После этого выводится правило умножения десятичной дроби на целую степень десяти. Полезно разобрать с учащимися во-

прос, как изменяется значение цифр при переносе запятой вправо в записи десятичной дроби. В стабильном учебнике увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз и т. д. рассматривается до действий. Для десятичных дробей это возможно, так как все действия над ними определены. Но следует сразу же показать, что увеличение дроби в 10 раз, в 100 раз и т. д. означает умножение этой дроби на 10, на 100 и т. д., а также подчеркнуть эквивалентность деления и уменьшения дроби в 10, в 100 раз и т. д. При рассмотрении умножения дроби на целое число следует остановиться на умножении десятичной дроби на целое число, которое оканчивается одним или несколькими нулями. В этом случае решение подробно можно записать так: $1{,}237 \cdot 400 = 1{,}237 \cdot (4 \cdot 100) = (1{,}237 \cdot 100) \cdot 4$ или $(1{,}237 \cdot 4) \cdot 100$.

Чтобы вывести правило умножения десятичных дробей, следует вспомнить определение умножения на дробь, общее правило умножения обыкновенных дробей и применить это правило, записав десятичные дроби в виде обыкновенных, например:

$$2{,}3 \cdot 0{,}35 = \frac{23 \cdot 35}{10 \cdot 100} = \frac{805}{1000} = 0{,}805.$$

Отсюда можно установить упрощения в технике умножения при записи десятичных дробей без знаменателя, вспомнив, что в десятичной дроби столько десятичных знаков, сколько нулей в знаменателе после единицы.

Выше приведены устные упражнения, подводящие к выводу правила умножения десятичных дробей[1].

Правило можно дать в такой формулировке: чтобы умножить десятичную дробь на десятичную, достаточно перемножить их числители и в полученном произведении отделить запятой столько десятичных знаков, сколько их было во множимом и множителе вместе. В стабильном учебнике слова «перемножить их числители» заменены следующими словами «не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа». Эта замена доступна ученикам, так как они из предварительных упражнений знают, как прочитать числитель десятичной дроби; для этого достаточно прочитать целое число, которое получится, если в записи десятичной дроби не обращать внимания на запятую

В большей части учебников, в том числе и в стабильном, вывод правила умножения десятичных дробей основан на свойстве изменения произведения с изменением сомножителей. Этот вывод не имеет связи с общим правилом умножения обыкновенных дробей и нелегко воспринимается учащимися благодаря своей искусственности.

---

[1] См. § 8, стр. 190.

В систему примеров на умножение десятичных дробей должны быть включены примеры на умножение целого числа на дробь, среди них и примеры вида $400 \cdot 0{,}238$, решение которых подробно может быть записано так: $400 \cdot 0{,}238 = (4 \cdot 100) \cdot 0{,}238 = 4 \cdot (100 \cdot 0{,}238)$.

3. *Деление десятичных дробей*

При изучении деления десятичной дроби на целое число особо следует выделить деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. В этом случае можно умножить знаменатель десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д., а числитель оставить без изменения. Увеличение знаменателя в 10, 100 раз и т. д. производится перемещением в записи десятичной дроби запятой влево.

Рассмотрение *деления десятичной дроби на целое число* следует начать с повторения определения действия деления и приемов деления дроби на целое число на примерах с обыкновенными дробями. Далее ученики решают примеры вида $0{,}35 : 7$; $4{,}8 : 8$; $22{,}5 : 15$ и убеждаются, что при делении на целое число, не равное 10, 100 и т. д., в частном можно получить десятичную дробь тогда, когда числитель делится на целое число, а в некоторых случаях, чтобы числитель разделился на целое число, необходимо раздробить данную дробь в более мелкие десятичные доли, например:

$$0{,}6 : 4 = 0{,}60 : 4 = 0{,}15.$$

При решении более сложных примеров вида $81{,}42 : 69$ ставится вопрос перед учащимися, нельзя ли применить правило деления целых чисел. Вспоминается распределительный закон деления. Полезно вспомнить также деление смешанного числа на целое следующего вида:

$$27\frac{1}{2} : 11 = \left(22 + 5\frac{1}{2}\right) = 22 : 11 + \frac{11}{2} : 11 = 2\frac{1}{2},$$

подчеркнуть применение распределительного закона при делении, на примере рассмотреть деление целого числа на целое. После этого ученики самостоятельно сформулируют правило деления десятичной дроби на целое число: деление десятичной дроби на целое число выполняется так же, как деление целых чисел, причем получающиеся остатки обращаются в десятичные доли, более и более мелкие.

Сначала рассматривается деление в случае конечной десятичной дроби в частном. В число упражнений следует включить деление целого числа на целое, когда в частном получается дробь.

Методика изучения вопроса об отыскании приближенного значения частного при делении целого числа или десятичной дроби на целое число будет рассмотрена позднее.

При *изучении деления на десятичную дробь* тоже следует начать с повторения общего правила деления на дробь. Проводятся следующие рассуждения: пусть надо разделить 51 на 0,17. Применим правило деления на обыкновенную дробь.

$$51 \cdot 0{,}17 = 51 : \frac{17}{100} = (51 \cdot 100) : 17 = 5100 : 17 = 300,$$

то есть, чтобы число разделить на дробь, достаточно умножить это число на знаменатель дроби и полученное произведение разделить на числитель. Применим эти рассуждения при делении десятичной дроби на дробь. Пусть требуется разделить 8,51 на 3,7. Получим:

$$8{,}51 : 3{,}7 = 8{,}51 : \frac{37}{10} = (8{,}51 \cdot 10) : 37 = 85{,}1 : 37 = 2{,}3.$$

К такому же результату придем, если применим общее правило деления дроби на дробь:

$$8{,}51 : 3{,}7 = \frac{851}{100} : \frac{37}{10} = \frac{851 \cdot 10}{100 \cdot 37} = \frac{851}{10} : 37 = 85{,}1 : 37^{1}.$$

В дальнейшем промежуточные звенья записи пропускаются, остается запись: 8,51 : 3,7 = 85,1 : 37 = 2,3.

Отсюда получаются следующие упрощения при делении десятичных дробей: чтобы разделить число на десятичную дробь, достаточно запятую в делимом перенести вправо на столько цифр, сколько десятичных знаков в делителе, и полученное число разделить на числитель делителя. Таким образом деление числа на десятичную дробь сводится к делению на целое число. Можно получить с учащимися правило деления на десятичную дробь, аналогичное с правилом в учебнике, для этого провести следующую беседу. Сравните полученный делитель 37 с первоначальным. Как изменилась величина делителя? (Увеличилась в 10 раз.) А как изменилась величина делимого в этом случае? (Увеличилась в 10 раз.) После этого получают правило: чтобы разделить число на десятичную дробь, достаточно делитель сделать целым числом, при этом делимое увеличить во столько раз, во сколько увеличился делитель, и выполнить деление на целое число.

В стабильном учебнике и в большинстве других учебников за основу вывода правила берется свойство частного, состоящее в том, что величина частного не изменится при увеличении делимого и делителя в одно и то же число раз.

Первый способ рассуждений имеет то преимущество, что подчеркивает связь десятичных дробей с обыкновенными, не вводит новой теории для десятичных дробей.

---

[1] Такой вывод правила дается в методике арифметики Шохор-Троцкого.

§ 20. Обращение обыкновенных дробей в десятичные дроби

Целесообразность постановки вопроса об обращении обыкновенной дроби в десятичную следует показать путем решения задач, в которых данные выражены и в обыкновенных дробях, и в десятичных, например. «Рельс длиной в $8\frac{4}{5}$ *м* разрезан на 4 части. Длина первой части 2,52 *м*, длина второй части составляет $\frac{3}{4}$ первой, длина третьей части на $\frac{1}{2}$ *м* больше второй. Найти размеры каждой части».

При решении подобного рода задачи ученики приходят к выводу о необходимости или записать десятичную дробь в виде обыкновенной, или обратить обыкновенную дробь в десятичную, но так как вычисление с десятичными дробями в данной задаче проще, то следует сделать последнее преобразование

С простейшими примерами обращения обыкновенной дроби в десятичную пятиклассники встречались раньше, в начале темы «Десятичные дроби». При этом они пользовались следующим рассуждением. в единице десять десятых долей, а в половине пять десятых, отсюда $\frac{1}{2}=0{,}5$.

Рассматриваются два способа обращения обыкновенной дроби в десятичную. 1) посредством раздробления долей, входящих в данную дробь, в десятичные доли путем умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же число; 2) посредством деления числителя данной дроби на ее знаменатель

Целесообразнее начинать так, как это сделано в стабильном учебнике, с первого способа Его учащиеся уже применяли при приведении обыкновенных дробей к общему знаменателю Здесь приходится только внести добавления в связи с особенностями поставленной задачи: требуется определить те десятичные доли, в которые можно раздробить данную дробь Кроме того, этот способ помогает установить признак возможности обращения обыкновенной дроби в конечную десятичную

Второй же способ удобен для отыскания приближенного выражения обыкновенной дроби при помощи десятичной При изучении первого способа обращения обыкновенной дроби в десятичную необходимо на частных примерах напомнить ученикам состав простых множителей разложения чисел, записанных единицей с последующими нулями Устанавливается, что для того, чтобы заменить данную дробь дробью, знаменатель которой равен одному из чисел 10, 100, 1000 и т. д., знаменатель данной дроби должен иметь тот же состав простых множителей, что и указанные числа, в связи с этим необходимо

повторить основное свойство дроби. Наиболее часто встречающаяся у школьников ошибка при этом преобразовании состоит в том, что, записывая дополнительные множители к знаменателю, представляющему тоже произведение простых множителей, ученики теряют их и затрудняются приписать дополнительный множитель к числителю данной дроби.

В результате рассмотрения первого способа устанавливаются на частных примерах два положения:

1) Если знаменатель обыкновенной дроби, будучи разложен на простые множители, не содержит других множителей, кроме 2 и 5, то такая дробь обращается в десятичную.

2) Если знаменатель несократимой дроби содержит в себе хотя бы один простой множитель, отличающийся от 2 и 5, то такая дробь не обращается в десятичную.

Предварительно следует рассмотреть следующие примеры сократимых дробей: $\frac{6}{15}=\frac{6}{3\cdot 5}=0{,}4$; $\frac{21}{56}=\frac{21}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 7}=0{,}375$.

После этого полезно сформулировать признак обращения обыкновенной дроби в десятичную.

Несократимая обыкновенная дробь обращается в десятичную тогда и только тогда, когда знаменатель этой дроби не содержит простых множителей, кроме 2 и 5.

При рассмотрении второго способа обращения обыкновенной дроби в десятичную учащиеся знакомятся с новым понятием — *бесконечная периодическая десятичная дробь*, которое вызывает у них затруднение, так как раньше они получили представление о десятичной дроби с конечным числом десятичных знаков.

Например, при обращении $\frac{5}{11}$ в десятичную дробь учащиеся убеждаются, что процесс деления бесконечен, что можно получать все новые и новые десятичные знаки: $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots$

После этого можно сообщить, что условились называть полученный результат «бесконечной десятичной дробью». Понятия «бесконечная дробь» и «конечная» различны: бесконечная дробь не имеет ни числителя, ни знаменателя, но можно указать число десятичных долей любого разряда Ученики часто не пишут многоточия, то есть в данном случае они приравнивают $\frac{5}{11}$ дроби 0,45 или 0,4545. Хотя они уже знакомы с приближенным значением частного, все же следует рассмотреть разность

$$\frac{5}{11}-0{,}45=\frac{500-495}{1100}=\frac{1}{220};\quad \frac{5}{11}\text{ и }0{,}4545\text{ и т. д. и}$$

показать, что $\frac{5}{11}\approx 0{,}45$.

Ученики на основании признака обращения обыкновенной дроби в десятичную знают, что $\frac{5}{11}$ не обращается в конечную десятичную дробь, поэтому они легче воспринимают невозможность получения конечной десятичной дроби в некоторых случаях при делении, когда изучается обращение обыкновенной дроби в десятичную, чем тогда, когда они проходят деление десятичных дробей.

Совершенно правильно, что в большинстве учебников введено понятие о бесконечной периодической дроби при обращении обыкновенной дроби в десятичную.

На рассмотрении частных примеров показывается, что бесконечные десятичные дроби, получающиеся при обращении обыкновенных дробей, должны быть периодическими, так как остатки при делении числителя на знаменатель, будучи меньше делителя, должны повторяться, а следовательно, должны повторяться и цифры частного в прежнем порядке.

Полезно показать пример непериодической бесконечной дроби, закон составления которой ясен. Например: 0,232232223... Полезно также рассмотреть примеры периодических дробей с периодом, содержащим больше трех цифр. Например: $\frac{2}{7}$; $\frac{23}{101}$ и т. д. Рассмотренными вопросами и ограничивается содержание пункта программы «Периодические дроби».

Бесконечные десятичные периодические дроби не имеют практического применения, поэтому обратная задача обращения их в обыкновенные дроби не рассматривается; к тому же она не может получить в курсе арифметики V класса достаточного обоснования. Рассмотрение этих дробей имеет теоретическое значение главным образом для подготовки учащихся к восприятию понятия об иррациональном числе.

При решении примеров и задач на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями следует обратить внимание учащихся на рациональные приемы вычислений. Например, не обязательно производить все вычисления, приводя дроби к одному виду. Можно часть примера решить в обыкновенных дробях, часть в десятичных, можно в отдельных случаях вычисление выполнить устно, например:

$$1)\ \frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}\right)\cdot 30}{1\frac{1}{3}}-\frac{4{,}25\ 0{,}85+1.0{,}5}{(5{,}56-4{,}06)\ 3};$$

2) $0{,}288\cdot\frac{4}{9}$; (0,288 : 9 = 0,032; 0,032 · 4 = 0,128 — вычисляется устно).

Действия, указанные в записи первой дроби, выполняются в обыкновенных дробях, второй дроби — в десятичных.

§ 21. Проценты в школьном курсе

Процент есть частный случай десятичной дроби, это дробь $\frac{1}{100}$. Поэтому на проценты распространяется теория десятичных дробей. Проценты получили особое значение сначала при коммерческих расчетах, например при вычислении прибыли и убытка с капитала или капитала по принесенной им прибыли. В дальнейшем область применения процентов расширилась. Проценты стали применяться и в науке (физике, технике, химии, медицине и др), и в жизненной практике.

Основной вопрос темы «Проценты» — это приложение теории дробей к решению задач, никакие новые теоретические вопросы в эту тему не входят. Благодаря различному их применению проценты занимали неодинаковое положение в программах и учебниках школ; давались различные определения процента и в связи с этим разные способы решения задачи на проценты. В дореволюционных учебниках понятие процента связывалось с коммерческими расчетами, например: «Если кто-нибудь занимает деньги, то он платит за это лицу, которое дало эти деньги, определенное количество рублей с 100, эта плата и показывает количество или таксу процентов (pro centum — на сто)»[1]. Дальше. «Заметим, что слово «процент» употребляется не только при денежных расчетах, но и вообще для выражения прибыли или убыли на каждую сотню каких-нибудь предметов». «Из предыдущего следует, что один процент с какого-нибудь числа есть сотая часть числа» В связи с определением процента как прибыли или убыли со ста применялось тройное правило при решении задач на проценты, то есть эти задачи решались при помощи пропорций или приведения к единице. В том же учебнике даны три способа решения следующей задачи на проценты.

«Сколько следует получить в год процентных денег с 2750 руб., считая по 5%?

1) Искомая прибыль $= \frac{5}{100}$ от 2750 руб. $= 2750 \cdot 0{,}05 =$ $=137$ руб. 50 коп.

2) Решение с помощью пропорций:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ руб.} — 5 \text{ руб.} \\ 2750 \text{ руб.} — x \qquad x:5=2750:100. \end{array}$$

[1] См [159].

3) Приведением к единице:

$$100 \text{ руб.} — 5 \text{ руб.}$$

$$1 \text{ руб.} — \frac{5}{100} \text{ руб.}$$

$$2750 \text{ руб.} — \frac{5}{100} \cdot 2750 \text{ руб.}».$$

После Октябрьской революции ввиду расширения области применения процентов задачи на проценты начали рассматривать в учебной литературе как соответствующие задачи на дроби. Тема «Проценты» больше 20 лет назад была поставлена в программе по арифметике сразу после темы «Десятичные дроби», а не в конце курса арифметики, как это было раньше.

В 1938 г. проф. Хинчиным был переработан учебник арифметики А. П. Киселева (до 1956 г. он был стабильным). В этом учебнике задачи на нахождение процента от числа и числа по данным его процентам помещены в параграфы, посвященные нахождению дроби от числа и неизвестного числа по данной величине его дроби, и решаются так же, как соответственные задачи на дроби. Задачи же на нахождение процентного отношения помещены сразу после рассмотрения вопроса об отношении двух чисел.

Современная программа восьмилетней школы предлагает изучение процентов разбить на два этапа: первый этап — проценты, исключая процентное отношение, рассмотреть в курсе V класса в теме «Десятичные дроби», второй этап — изучение процентов в виде специальной темы провести в курс VI класса.

Остановимся на определении процента. В большинстве учебной литературы рассматривается понятие *процент от числа* и *процент* определяется как сотая часть этого числа; в стабильном учебнике сказано: «Сотая часть какого-нибудь числа называется процентом этого числа». Но имеется и такое определение. процент — сотая часть[1] или процент — дробь $\frac{1}{100}$[2] (без добавления «числа»). Последнее определение встречается в теоретических курсах арифметики. Добавление слова «числа» в первом определении подчеркивает, что проценты применяются только при решении задач; отвлеченные числа не принято выражать в процентах. Второе определение имеет то преимущество, что отождествляет понятие процента и дроби с знаменателем 100 и этим облегчает понимание учащимися вопросов,

[1] См [138], [223]

[2] См. А. Н Глаголев, Курс теоретической арифметики, 1914

связанных с процентами. Введя второе определение, можно указать, в каких случаях целесообразно применять проценты.

Первоначальное понятие о проценте и решение задач на проценты дается в курсе V класса. Приступая к изучению процентов, следует объяснить учащимся практическое значение дробей с знаменателем 100 и задачи, стоящие при изучении этого вопроса. В VI классе полезно начать с задачи, для решения которой требуется сравнить дроби с разными числителями и знаменателями, общий числитель и общий знаменатель которых большое число, например: «Пионерская дружина провела с 3 пятыми классами субботник по озеленению школьного участка, причем каждый ученик должен был посадить 1 дерево. В V_1 классе 42 ученика, они посадили 35 деревьев; в V_2 классе 40 человек, они посадили 34 дерева, в V_3 — 37 учащихся, они посадили 33 дерева. Какой из пятых классов лучше выполнил задание?»

Учащиеся, изучая отношения, узнали, что для того чтобы решить этот вопрос, достаточно найти, какую часть составляет число посаженных каждым классом деревьев от числа деревьев, равного числу учеников этого класса, и сравнить полученные дроби, то есть $\frac{35}{42}$, $\frac{37}{40}$ и $\frac{33}{37}$. Чтобы сравнить эти дроби, достаточно привести их к общему знаменателю или общему числителю, но эти преобразования требуют сложных вычислений. Преподаватель дает указание, что в этих случаях для сравнения дробей проще всего найти их приближенные значения в каких-нибудь десятичных долях:

$$35:42=0{,}857\ldots,$$

$$34:40=3{,}4:4=0{,}85,$$

$$33:37=0{,}891\ldots$$

Число десятых долей получается одинаковое. Для сравнения проще всего дроби выразить в сотых долях:

$$\frac{35}{42}\approx 0{,}86; \quad \frac{34}{40}=0{,}85; \quad \frac{33}{37}\approx 0{,}89.$$

V_3 класс лучше всех выполнил задание пионерской дружины.

Вообще в ряде задач, где требуется сравнить дроби, находят их приближенные выражения в сотых долях. Сотые доли получают особое значение. Напоминается, что наиболее употребительные доли единицы получили особые названия: одну вторую называют половиной, одну третью долю — третью, одну четвертую — четвертью. Поэтому и сотая доля получила особое название «процент» и особое обозначение %. Полезно рассказать о происхождении слова «процент». Следует сказать, что

в некоторых вопросах дроби выражают не в сотых, а в тысячных долях. Тысячные доли в этих случаях тоже получили особое название «промилле» и обозначаются ‰. Например, в тысячных долях выражают пробу[1] драгоценных металлов: в сплаве золота 825-й пробы содержится чистого золота по весу 0,825 всего сплава или 825‰. Так как числа, выраженные в процентах — это дроби с знаменателем сто, никаких новых правил действий над числами, выраженными в процентах, не вводится и задачи на проценты решаются так же, как задачи на дроби. Решение двух видов задач на проценты в V классе проводится после изучения всех действий над десятичными дробями и помогает закреплению умножения и деления на десятичную дробь. В курсе VI класса все сведения, полученные учениками о процентах, приводятся в систему, рассматриваются три вида задач на проценты, более сложные случаи применения процентов, например: а) задается дробное число процентов, б) находят проценты от процентов.

Задачи на проценты полезно использовать и для повторения соответствующих задач на дроби.

Прежде чем приступить к решению задач на проценты, следует провести упражнение на запись процентов в виде дробей. Перед решением задач на нахождение процентного отношения двух чисел следует дать упражнения на выражение различных чисел в процентах. В основу системы этих упражнений можно положить следующие случаи: 1) число процентов, получающееся в результате,— целое число процентов; 2) число процентов — конечная десятичная дробь; 3) число процентов — обыкновенная дробь, не выражающаяся конечной десятичной дробью; 4) приближенное выражение в процентах с заданной точностью.

При этом показываются различные способы выражения чисел в процентах:

1) при помощи обращения в десятичную дробь. Например, выразить $\frac{17}{40}$ в процентах.

$$17:40=1{,}7:4=0{,}425=42{,}5\%;$$

2) при помощи следующих рассуждений:

а) $1=100\%$; $\frac{17}{40}=100\%\cdot\frac{17}{40}=42{,}5\%$.

б) Так как искомое число процентов показывает, сколько сотых долей содержится в данном числе или сколько раз $\frac{1}{100}$

[1] Пробой называется число тысячных долей, показывающее, какую часть веса сплава составляет вес чистого золота, серебра или платины.

содержится в $\frac{17}{40}$, то, чтобы найти это число, достаточно $\frac{17}{40}$ разделить на $\frac{1}{100}$ или умножить на 100. Применяется следующая запись:

$$\frac{17}{40}=\frac{17\cdot 100\%}{40}=42{,}5\%.$$

Затем проводятся упражнения, подводящие к определению процентного отношения.

1. Найти отношение первого числа ко второму для чисел:

$$72 \text{ и } 12;\ 3 \text{ и } 8;\ 5 \text{ и } \frac{2}{3};\ 0{,}12 \text{ и } 0{,}3.$$

Что показывает отношение, когда оно равно целому числу? когда оно равно дробному числу?

2. Найти отношение первого числа ко второму и выразить в процентах для следующих чисел:

$$12:30;\ \frac{3}{5}:4;\ 2{,}07:6;\ 34:17.$$

Что показывают полученные отношения, выраженные в процентах?

После этого определяется процентное отношение одного числа к другому как отношение первого числа ко второму, выраженное в процентах. Устанавливается, что процентное отношение показывает, сколько процентов или какой процент составляет первое число от второго. Затем даются упражнения в различной формулировке на нахождение процентного отношения двух чисел, например:

1. Найти процентное отношение 3 к 4.

2. Какой процент 3 составляет от 4?

3. Сколько процентов 3 составляет от 4?

Рассмотрим примеры записи решения различных задач на проценты.

1. В 1955 г. в СССР было выплавлено 45,3 млн. *т* стали. В 1961 г. выплавка стали увеличилась по сравнению с 1955 г. на 56%. Сколько стали выплавлено в 1961 г.?

Решение. 1) $100\%+56\%=156\%$.

156% от количества стали, выплавленной в 1955 г., составляет количество стали 1961 г.

2) $156\%=1{,}56$; $45{,}3\cdot 1{,}56\approx 70{,}7$ (млн. *т*) — количество стали, выплавленной в 1961 г.

(Ответ. 70,7 млн. *т*.)

2. (Пример задачи, где приходится находить проценты от процентов.) Стоимость изделия удалось снизить сначала на 10%,

а через месяц еще на 15% от новой стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость изделия в результате двух снижений?

Решение. 1) Какой процент первоначальной стоимости составляла стоимость изделия после первого снижения?

$$100\% - 10\% = 90\%.$$

2) Какой процент от первоначальной стоимости составляет второе снижение?

$$90\% \cdot 0{,}15 = 13{,}5\%.$$

3) На сколько процентов снизилась стоимость изделия в результате двух снижений?

$$10\% + 13{,}5\% = 23{,}5\%.$$

(Ответ: 23,5%.)

При решении этой задачи некоторые ученики делают неправильное заключение об общем снижении стоимости, складывая 10% и 15%. Эта задача подчеркивает необходимость при решении каждый раз устанавливать, от какого числа берутся проценты.

3. Книга с переплетом стоит 62 коп. Стоимость переплета составляет 24% от стоимости книги без переплета. Сколько стоит переплет? Какой процент составляет стоимость переплета от стоимости книги с переплетом?

Решение. 1) $100\% + 24\% = 124\%$.

124% составляет стоимость книги с переплетом от стоимости книги без переплета.

2) $124\% = 1{,}24$; $62 : 1{,}24 = 50$ (коп.) — стоимость книги без переплета.

3) $62 - 50 = 12$ (коп.) — стоимость переплета.

4) $12 : 62 = \frac{12}{62} = \frac{6}{31} = \frac{6 \cdot 100\%}{31} \approx 19\%$.

19% составляет стоимость переплета от стоимости книги с переплетом.

(Ответ: 12 коп.; 19%.)

Эта же задача может быть решена и так:

1) То же, что и в первом случае.

2) $62 : 124 = 0{,}5$ (коп.); 0,5 коп. составляет 1% стоимости книги без переплета.

3) $0{,}5 \cdot 24 = 12$ (коп.) стоимость переплета.

4) $24 : 124 = \frac{24 \cdot 100}{124}\% \approx 19\%$.

Приведенные примеры решения задач на проценты подтверждают, что задачи на проценты тождественны соответственным задачам на дроби.

Получим следующие формулы решения задачи вторым способом:

$$1)\ \frac{62\cdot 24}{100+24}=12\ \text{(коп.)};\qquad 2)\ \frac{24\cdot 100}{100+24}\%\approx 19\%.$$

При решении этих задач проценты от числа и число по данным его процентам находятся одним действием, соответственно умножением и делением на дробь. Но при решении устных задач на нахождение процентов от числа и числа по данным его процентам и при письменном решении некоторых задач бывает проще пользоваться двумя действиями, как и при решении подобного рода задач на дроби.

При рассмотрении третьей задачи показывается второй способ ее решения. Вообще решение задач не должно быть трафаретно, необходимо применять рациональные приемы решения задач.

Рассмотренная задача включает также и третий вид задач на проценты: нахождение процентного отношения одного числа к другому.

Подводя итоги методики изучения темы «Проценты», следует отметить, что можно добиться прочного усвоения процентных вычислений и сознательного решения задач на проценты только при условии правильного понимания учащимися процента как частного случая дроби и решения ими задач на проценты, как задач на дроби со знаменателем 100.

В школьном учебнике предлагается в VI классе познакомить учащихся с записью в общем виде формул решения основных видов задач на проценты. Это посильно учащимся и служит хорошей подготовкой к курсу алгебры.

При прохождении процентного отношения учеников знакомят с понятием «относительная погрешность». К понятию относительной погрешности их подводят путем решения конкретной задачи, например: «При взвешивании 300 *г* масла, а затем 5 *кг* картофеля допущена абсолютная погрешность 10 *г*. Какое взвешивание точнее?» Чтобы решить этот вопрос, необходимо узнать, какую часть составляет абсолютная погрешность от веса продуктов в первом случае и во втором. Получаем $\frac{10}{300}=\frac{1}{30}\approx 3{,}4\%$ и $\frac{10}{5000}=\frac{1}{500}=0{,}2\%$. Второе взвешивание точнее. После этого вводится определение: «Отношение абсолютной погрешности к приближенному числу называется относительной погрешностью» [1].

[1] См. [182].

Виды упражнений:

1. Дробь $\frac{5}{7}$ запишите в виде десятичной дроби с двумя значащими цифрами и найдите относительную погрешность приближенного значения дроби.

2. Измерены длина улицы и расстояние от Москвы до Ленинграда и получены такие результаты: длина улицы 1,68 (0,005) *км* и расстояние от Москвы до Ленинграда 651 (0,1) *км* Какое из этих измерений точнее?

§ 22. Приближенные вычисления

Числа, с которыми приходится иметь дело в случаях приложения арифметики к практике, в большинстве случаев дают приближенные значения величин. Можно точно указать число учащихся в данном классе. Число жителей в городе точно определить невозможно, так как оно постоянно изменяется. Измерение длины, веса, времени и т. д. тоже дает приближенные значения этих величин, или, как говорят короче, приближенные числа.

При составлении плана развития народного хозяйства и при подведении итогов выполнения государственного плана развития народного хозяйства пользуются числами, округленными до единицы определенного разряда. Например, в итогах выполнения плана развития народного хозяйства в 1961 г. производство продукции характеризуется следующими данными: обувь кожаная — миллионов пар 442, велосипеды и мотовелосипеды — миллионов штук 2,9. Первое число есть результат округления чисел, полученных при подсчете, до 1 млн. пар, второе — до 0,1 млн. штук. Так как умение применять знания к решению задач, взятых из жизни, является одной из задач обучения арифметике в советской школе, то необходимо научить учащихся приближенным вычислениям.

Вопрос о необходимости включения приближенных вычислений в курс математики средней школы поднимался и до Октябрьской революции. Этот вопрос был поднят методистом Шохор-Троицким в статье[1] в 1891 г., затем на I Всероссийском съезде преподавателей математики в докладе В. А. Крогиуса на тему «Приближенные и сокращенные вычисления в средней школе»[2]. В ряде учебников были помещены дополнительные параграфы, посвященные приближенным вычислениям[3].

После Великой Октябрьской революции различные вопросы из арифметики приближенных вычислений начали вводить в

[1] См «Русская школа», 1898, № 2
[2] См [174]
[3] См [152], [160].

программы средней школы. Появились разработки этих вопросов в учебной литературе[1]. В программах 1932—1959 гг. сохранился лишь один вопрос — об округлении данных и результатов действий. Это было вызвано, очевидно, перегрузкой программы.

Однако вопрос о расширении объема сведений о приближенных вычислениях в курсе средней школы поднимался в учебной и методической литературе и в этот период времени. Этому вопросу посвящен ряд статей в журнале «Математика в школе», на эту же тему опубликованы методические разработки[2]. В задачнике по арифметике С. В. Филичева и Я. Ф. Чекмарева[3] для V и VI классов включены упражнения не только на округление чисел, но и на вычисление абсолютной и относительной погрешности при округлении чисел, на действия с приближенными числами с применением правила подсчета цифр, на вычисление выражений с наперед заданным числом цифр в результате.

В связи с осуществлением связи обучения с жизнью приближенные вычисления приобрели особое значение. Как указано раньше, в программу математики восьмилетней школы в курс VI класса введена тема «Приближенные вычисления», в которую включены вопросы: точные и приближенные значения величин; абсолютная погрешность; значащие цифры числа; сложение, вычитание, умножение и деление приближенных чисел; правила подсчета цифр. Вопрос об относительной погрешности включен в тему «Проценты». В программу V класса в тему «Десятичные дроби» включено округление целых чисел и десятичных дробей.

При изучении приближенных вычислений в V—VI классах следует поставить следующие задачи: 1) научить округлять числа с заданной точностью; 2) научить выражать результаты действий над приближенными числами надежными цифрами, сохраняя не более одной цифры не вполне надежной. Как указывает программа, округлением целых чисел и десятичных дробей ученики должны заниматься параллельно с изучением темы «Десятичные дроби» после изучения сравнения десятичных дробей по величине. В стабильном задачнике[4] в параграфах, посвященных действиям над десятичными дробями, приведены задачи, при решении которых требуется полученный результат округлить с заданной точностью.

Предварительно следует рассказать о практическом значении приближенных чисел, показать на конкретных примерах[5], что

[1] См. [39], [137], [156].
[2] См [40].
[3] См. [177].
[4] См. [164]
[5] См. § 22 в этой книге и [182].

в результате счета могут получиться приближенные числа, что числа, получаемые при измерении, всегда приближенные. Полезно дать задание учащимся измерить масштабной линейкой длину и ширину задачника, рулеткой длину и ширину доски и обсудить с ними точность полученных результатов. С учениками рассматриваются два вида округлений чисел: с недостатком и избытком, формулируется правило округления. Выполняются упражнения следующего вида:

1. Округлить с недостатком и с избытком числа с точностью до сотни, до тысячи.

2. Округлить с точностью до миллиона так, чтобы ошибка была наименьшая.

Аналогичные упражнения выполняются на округление чисел с точностью до десятичных долей, округляются с заданной точностью результаты решения ряда задач.

После подобного рода предварительных упражнений нахождение приближенного частного не затрудняет учащихся.

Полезно показать учащимся, что при решении задач с содержанием, взятым из жизненной практики, степень точности, с какой следует брать числа, часто определяется конкретными условиями задачи. Например, если в задаче требуется какую-нибудь сумму денег разделить на несколько равных частей и в частном получается бесконечная десятичная дробь, то приближенное частное следует брать с точностью не больше чем до 0,01 руб., так как тысячные доли рубля — это доли копейки, которые вычислять не имеет смысла.

Рассмотрим задачу:

«Построить отрезок на миллиметровой бумаге длиною в $\frac{2}{7}$ *дм*».

При решении получим $\frac{2}{7} = 0{,}2857... \approx 0{,}29$.

Отрезок получается длиной в 29 *мм*.

Приближенное значение дроби берется с точностью до 0,01, так как тысячные доли дециметра — это десятые доли миллиметра, которые построить трудно.

Если же 2 *кг* чаю требуется развесить на 7 порций, то дробь $\frac{2}{7}$ имеет смысл выразить в тысячных долях, то есть определить вес с точностью до одного грамма.

Полезно научить учеников давать приближенную оценку результата действия, предварительно округляя данные числа, и применять ее для самопроверки при вычислениях, например: требуется перемножить числа 3287 и 5612, округляя каждый из сомножителей до 1 тысячи, получаем $3 \cdot 6 = 18$ (миллионов). Истинное же произведение равно 18 446 644 [1].

[1] Подробнее см в § 5, ч. 1 данной книги.

В VI классе при прохождении темы «Приближенные вычисления» на первых уроках повторяются и систематизируются сведения, полученные о приближенных вычислениях в V классе. В беседе с учащимися рассматриваются примеры приближенных чисел, полученных в результате счета, измерения (число лет человека, вес, рост и др.).

Упражнения. Округлить: 1) до десятков 503, 817, 4305;
2) с точностью до единицы: 0,8; 15,5; 41,4; 0,379; 1,813;
3) до сотых долей: 9,647; 0,403; 1,054.

Вычислить погрешность, полученную при округлении.

После ряда упражнений формулируется определение абсолютной погрешности.

Запись решений: $503 \approx 500$; $503 - 500 = 3$; $817 \approx 820$; $820 - 817 = 3$ и т. д.

Рассматриваются примеры чисел, полученных при измерении. В этом случае неизвестно точное значение величины, нельзя вычислить погрешность, но можно указать так называемую границу погрешности, то есть ближайшее число, значение которого не превосходит погрешность. Полезно вывесить плакаты с изображением термометра, отрезка на шкале линейки; предложить ученикам назвать числа, соответствующие показанию термометра и длине отрезка, и указать границу погрешности [1] (рис. 34).

$AB \approx 6$ *см* (0,5).
Граница погрешности 0,5 *см*.

Рис. 34

Учитель может предложить учащимся начертить шкалу с делениями. На шкале отметить отрезки и записать числа, выражающие длины этих отрезков, с указанием границы погрешности.

В ряде средних школ Коломны проводились лабораторные работы, посвященные измерениям с оценкой границы погрешности на уроке математики Эти работы продолжались на уроке физики. На уроке математики ученики измеряли отрезки, углы, начерченные на бумаге, а также длину и ширину классной комнаты, а на уроке физики измеряли с помощью мензурки емкость сосуда и объем твердого тела [2].

---

[1] См.: К. И. Нешков, Приближенные вычисления в курсе VI класса, «Математика в школе», 1960, № 4.

[2] См.: В И Беляев, Об изучении раздела «Приближенные вычисления» в курсе арифметики VI класса, «Математика в школе», 1961, № 4.

Рассматривая числа, полученные после округления и в результате измерения, следует обратить внимание школьников на то, что все цифры полученных приближенных чисел надежные, кроме последней, которая может отличаться от соответствующей цифры точного числа не более чем на единицу и считается не вполне надежной. Полезно указать им, что такое правило записи приближенных чисел было предложено академиком А. Н. Крыловым. Следует обратить внимание на нули, записанные взамен отброшенных цифр при округлении целых чисел. Например, округляя число 36 565 до сотен, получим $36\,565 \approx 36\,600$. Так как эти нули стоят взамен отброшенных цифр, то они обозначают ненадежные цифры и их нужно выделить. Следует предложить это делать при помощи черты: $36\,\underline{600}$. Округляя число 4503 до десятков, мы должны подчеркнуть только последний нуль, так как предыдущий обозначает отсутствие числа десятков и является надежной цифрой $4503 \approx 450\underline{0}$. В практике приближенных вычислений употребляется и такая запись: $36 \cdot 10^2$; $450 \cdot 10$. Но такая запись преждевременна для учащихся VI класса, не знакомых с понятием степени

Обращается внимание учащихся и на значение записи нуля в конце приближенного числа, записанного десятичной дробью в случае отсутствия последних десятичных долей. Например:

1) $0{,}34026 \approx 0{,}340$ (до 0,001);

$0{,}34026 \approx 0{,}34$ (до 0,01);

2) $0{,}49732 \approx 0{,}50$ (до 0,01);

$0{,}49732 \approx 0{,}5$ (до 0,1).

Запись нуля в конце десятичной дроби показывает, что записанное число взято с точностью до той десятичной доли, на месте которой стоит нуль.

Прежде чем приступить к рассмотрению действий над приближенными числами, необходимо разъяснить учащимся термин *значащие цифры* числа[1].

Рассмотрим примеры:

24,07	имеет	4	значащих	цифры
0,058	»	2	»	»
$0{,}158037 \approx 0{,}1580$	»	4	»	»
$4875 \approx 490\underline{0}$	»	2	»	»

В результате дать определение: значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой

[1] При точных вычислениях значащими цифрами называют все цифры, кроме нуля.

отличной от нуля цифры, и нулей, стоящих в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.

Для усвоения термина «значащие цифры» полезно дать упражнения следующего вида.

Округлить числа:

2148,03 до двух, до четырех, до пяти значащих цифр;

0,02974 до трех, до двух, до одной значащей цифры.

Рассмотрим теперь методику изучения правила подсчета цифр при действиях с приближенными числами. Подробное изложение этого вопроса можно найти в ряде методических и учебных пособий [1].

Правило подсчета цифр при сложении и вычитании выводится на основании рассмотрения частных примеров.

Найти сумму чисел 0,3744; 0,4132; 0,2365 и округлить полученное число до двух десятичных знаков, до трех. Найти сумму тех же чисел, предварительно округлив каждое слагаемое до двух десятичных знаков, до трех знаков. Сравнить полученные суммы в первом и втором случае.

Можно дать соответствующее упражнение в следующей форме.

Найти приближенное значение суммы дробей

$$\frac{1}{11}+\frac{4}{13}+\frac{7}{15}+\frac{10}{17}+\frac{13}{19},$$

взяв приближенное значение каждого слагаемого с двумя десятичными знаками. Проверить полученный результат, взяв более точные приближенные значения данных дробей.

Ученики приходят к выводу, что при сложении чисел, взятых с одинаковой точностью, в сумме получаются, кроме последней, все цифры надежные, а последняя сомнительна, так как откинутые десятичные доли могут в сумме дать последние оставшиеся доли. На практике часто бывает, что одни слагаемые взяты с избытком, другие с недостатком. Поэтому погрешности отчасти исправляют друг друга и общая погрешность мало увеличивается, и вообще значение сомнительной цифры отличается от истинного не больше, как на одну или две единицы.

Если число десятичных знаков в слагаемых неодинаковое, то для выяснения числа надежных цифр суммы помогает обозначение неизвестных цифр последующих разрядов знаками вопроса. Например:

$$\begin{array}{r} 2{,}342 \\ +\ 3{,}84? \\ 15{,}2?? \\ \hline 21{,}382 \end{array}$$

[1] См. [38], [156].

Учащиеся устанавливают, что число сотых и тысячных в сумме ненадежно. Такие же наблюдения проводятся над вычитанием приближенных чисел. В результате выводится правило: при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков

Возникает вопрос, как поступать в случае сложения и вычитания приближенных целых чисел или когда один из компонентов целое приближенное число. В. М. Брадис рекомендует в этом случае переносить в компонентах запятую на несколько разрядов влево, а затем поступать согласно правилу. Но такие дополнительные преобразования усложняют вычисления Выделяя чертой нули, полученные при округлении целых чисел взамен отброшенных цифр, придем к следующему правилу сложения и вычитания приближенных чисел. При сложении и вычитании приближенных чисел полученные результаты нужно округлить с точностью менее точного слагаемого [1].

Примеры:

$$\begin{array}{r} 12\,800 \\ +\ 34\underline{2}0 \\ \hline 25\underline{6} \\ \hline 16\,476 \end{array} \approx 16\,500 \qquad \begin{array}{r} 23{,}51 \\ +\ 11{,}2 \\ \hline 120 \\ \hline 154{,}71 \end{array} \approx 150$$

Хотя последнее правило применимо при сложении и вычитании целых и дробных чисел, следует учащимся сообщить и первое правило, так как в VI классе большая часть вычислений проводится с дробными числами и первое правило усваивается легче.

Подобным же образом устанавливается правило для умножения и деления приближенных чисел. Например:

$$\begin{array}{r} 2{,}36? \\ \times\ 1{,}84? \\ \hline ???? \\ 944? \\ 18\,88? \\ 23\,6? \\ \hline 4{,}34\,24?? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}32? \\ \times\ 0{,}26? \\ \hline ????? \\ 3\,192? \\ 1\,064? \\ \hline 1{,}3\,832?? \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 74??? & 274,? \\ 54\,8? & \hline 2{,}7 \\ 19\,2?? & \\ 19\,18? & \\ \hline 02?? & \end{array}$$

$$7{,}4 : 2{,}74 \approx 2{,}7.$$

[1] См. [40].

Вертикальная черта отделяет надежные цифры от ненадежных При переносе запятой в данных при умножении и делении число надежных цифр в результате не меняется, меняется только положение запятой. Поэтому правило формулируется так: при умножении и делении гриближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр. Путем наблюдений на частных примерах устанавливается, что при выполнении нескольких действий, чтобы уменьшить ошибку, следует в промежуточных результатах сохранять одной цифрой больше, чем указано приведенными выше правилами, так как каждое действие обычно усиливает ошибку. В окончательном результате запасная цифра отбрасывается. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с определенным числом надежных цифр следует брать данные с числом цифр, на единицу большим Необходимо при прохождении всех тем возвращаться к этим правилам при решении конкретных задач.

Обращается внимание учащихся, что при выполнении действий, когда одни компоненты точные, а другие приближенные числа, учитывается только количество значащих цифр (или количество десятичных знаков) приближенных компонентов, так как у точного числа можно получить как угодно много значащих цифр, приписывая нули справа [1].

Не следует в начале прохождения темы «Приближенные вычисления» решать задачи на определение надежных цифр в результате измерения или счета на основании нескольких данных, путем вычисления уклонений от среднего арифметического полученных данных. Такого рода задачи вызывают затруднения, их можно решать в конце темы

Хороший материал для приближенных вычислений дают задачи на проценты и задачи с геометрическим содержанием. Примером может служить разобранная в предыдущем параграфе первая задача на проценты. К приближенным вычислениям необходимо возвращаться в последующих классах.

Примерный план урока на тему «Округление промежуточных результатов»

Устные упражнения:

1. Указать разницу в записях: длина стола 1,3 *м* и 1,30 *м*.

2. Подчеркнуть ненадежные цифры в следующих числах: а) 3542, если погрешность равна 6, б) 8,34, если погрешность 0,02.

3. Выполнить действия над приближенными числами: $9{,}2+0{,}45$; $12{,}3 \cdot 0{,}6$.

[1] См В И Беляев, Об изучении раздела «Приближенные вычисления» в курсе арифметики VI класса, «Математика в школе», 1961, № 4

Новый материал.

Решить задачу: «Ширина дома 6,3 *м*, длина 8,2 *м*. К дому прилегает прямоугольный земельный участок, ширина которого равна 24 *м* и длина 87 *м*. Найти всю площадь, занятую домом и земельным участком».

Провести вычисления тремя способами: 1) без запасной цифры в промежуточных результатах; 2) с одной запасной цифрой; 3) с двумя запасными цифрами.

Запись на доске и в тетрадях:

1) $\begin{array}{r} 6{,}3 \\ \times\ 8{,}2 \\ \hline 126 \\ 504 \\ \hline 51{,}66 \end{array} \approx 52$ (*кв. м*) $\quad \begin{array}{r} 87 \\ \times\ 24 \\ \hline 348 \\ 174 \\ \hline 2088 \end{array} \approx 2100$ (*кв. м*) $\quad \begin{array}{r} 2100 \\ +\ \overline{52} \\ \hline 2152 \end{array} \approx 2200$ *кв. м*

2) $6{,}3 \cdot 8{,}2 \approx 51{,}7$ (*кв. м*); $87 \cdot 24 \approx 2090$ (*кв. м*);

$$2090 + 51{,}7 = 2141{,}7 \approx 2100 \text{ (кв. м)}.$$

3) $6{,}3 \cdot 8{,}\dot{} = 51{,}66$; $87 \cdot 24 = 2088$; $2088 + 51{,}66 \approx 2139{,}66 \approx$

$$\approx 2100 \text{ (кв. м)}.$$

Формулируется вывод.

3) Самостоятельно решить пример, применяя полученный вывод.

$$54{,}23 : 1{,}1 + 32{,}130 : 10{,}5.$$

Домашнее задание: № 1034(2); № 1038(1, 2, 5), задачник С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева, 1963.

ГЛАВА VI

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 23. Отношения

Отношение будем рассматривать только кратное, арифметическое отношение в настоящее время не рассматривается. Вопрос об отношении в программах арифметики и в учебниках, изданных до 1938 г., стоял перед вопросом о пропорциях и пропорциональных величинах, большей частью даже объединялся в одной теме «Отношения и пропорции» и увязывался с вопросом о сравнении величин. В 1938 г. был издан для средней школы учебник по арифметике А. П. Киселева, переработанный проф. А. Я. Хинчиным. В нем понятие отношения одного числа к другому отождествляется с понятием частного от деления первого числа на второе, причем отношение поставлено в конце темы «Обыкновенные дроби». В связи с этим изменилось положение вопроса об отношении и в программе арифметики: отношения были внесены в тему «Обыкновенные дроби». В VI классе к нему возвращались в теме «Пропорции». В современной программе V класса вопрос об отношении включен в тему «Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями», а в программе VI класса занимает прежнее место.

Рассмотрим вопрос об определении отношения. Одни авторы определяли отношение как результат сравнения двух чисел[1], другие — как число, на которое надо умножить одно из данных чисел, чтобы получить другое данное число[2], третьи определяют как число, показывающее, во сколько раз одно число больше другого или какую часть другого числа состав-

[1] См. [159].
[2] См. [185].

ляет первое[1]. В ряде учебников, в том числе в учебнике А. П. Киселева, переработанном проф. А. Я. Хинчиным, отношение определяется как частное от деления одного числа на другое. В некоторых учебниках рассматривается отдельно отношение чисел и отношение величин. Например, в учебнике Н. И. Билибина[2] дается сначала такое определение: «Отношением двух однородных количеств называется число, измеряющее количество A, если количество B взято за единицу» (под количеством понимается величина). Дальше доказывается, что отношение двух однородных количеств, выраженных данными числами, равно частному от деления этих чисел, и дается определение: «Частное от деления двух чисел, целых или дробных, называется их отношением».

Почти все из приведенных определений подчеркивают, что не всякое частное называется отношением, только частное, полученное от деления по содержанию, от деления, при котором по произведению и множимому отыскивается неизвестный множитель. Поэтому появившееся в школьном учебнике арифметики определение, согласно которому всякое частное является отношением, взволновало преподавателей и вызвало большое количество возражений с их стороны. В ответ на эти возражения появилась статья проф. А. Я. Хинчина[3], где автор утверждает, что математика знает только одно деление: «Два вида деления — это просто два типа конкретных, практических задач, решаемых одним и тем же действием — делением. Поэтому разделение всевозможных частных на два типа — являющихся и не являющихся отношениями — ничего общего с математикой не имеет». «Арифметические операции мы производим только над отвлеченными числами, и с этим актом абстракции, уничтожающим много неясностей и недомолвок, мы знакомим наших детей очень рано»

Но если согласиться с определением отношения двух чисел как частного от деления одного числа на другое, то становится непонятным смысл введения термина «отношения» как особого названия частного от деления двух чисел Проф. М. К. Гребенча[4] напоминает в своей статье, что в школьном курсе дроби рассматриваются в связи с делением величин, сравнение дробей и действия над дробями устанавливаются на основании реального смысла дроби, что же касается натуральных чисел, то действия над ними устанавливаются исключительно на практическом материале, и с ним следует согласиться.

---

[1] См [137], [156]

[2] См [125]

[3] См А. Я Хинчин, О понятии отношения двух чисел, «Математика в школе», 1941, № 2.

[4] М К. Гребенча, К вопросу о понятии отношения в курсе арифметики, «Математика в школе», 1949, № 3.

«Современная математика приступила к научному изучению величин».

«Если стать на точку зрения скалярных величин как объектов, изучаемых математикой, то школьная арифметика является известного рода конгломератом из арифметики рациональных чисел и арифметики скалярных величин. Такой конгломерат уже имеет прецеденты: школьная алгебра есть конгломерат арифметики, алгебры и анализа. Этот конгломерат, имея под собой научную базу, является в то же время чрезвычайно полезным с педагогической точки зрения. Ученики знакомятся с величинами и действиями над ними, а затем переходят к изучению отвлеченных чисел и действий над ними, причем, как они увидят, действия над величинами сведутся к действию над числами» [1].

В теоретических курсах [2] арифметики понятие отношения получается из понятия измерения величин. Таким же образом возникло понятие отношения и исторически. Так как в практических задачах ученики встречаются с применением отношений для сравнения величин, числовые значения которых определены, то проще при образовании определения отношения исходить из этого сравнения. Отсюда к определению отношения следует подойти из упражнений на сравнение величин, например:

1) сравнить по величине высоту с основанием прямоугольника, если:

а) длина высоты 6 *см*, длина основания 2 *см*;
б) » » 10 *см*, » » 4 *см*;
в) » » 3 *см*, » » 9 *см*;
г) » » 4 *см*, » » 6 *см*.

2) В 1955 г. произведено газа 10,4 млрд. *куб. м*, электроэнергии 170 млрд. *квт·ч*. В 1961 г. произведено газа 60,9 млрд. *куб. м*, электроэнергии 327 млрд. *квт·ч*. Сравнить производство газа и электроэнергии в 1961 г. с производством указанной продукции в 1955 г.

При решении задач преподаватель обращает внимание на сравнение путем деления и устанавливает, что *сравнивать можно только однородные величины*, что *сравнение величин можно выполнить путем деления чисел*, выражающих эти величины в одной и той же мере. Целое число в частном показывает, во сколько раз одна величина больше другой, дробное число — какую дробь одна величина составляет от другой, например:

$$4\ см : 6\ см = \frac{2}{3};\quad 6\ см \cdot \frac{2}{3} = 4\ см.$$

---

[1] М К Гребенча, К вопросу о понятии отношения в курсе арифметики, «Математика в школе», 1949, № 3.

[2] См [142], [173].

Длина высоты в 4 *см* составляет $\frac{2}{3}$ от длины основания в 6 *см*. После этого можно дать следующее определение: отношением одной величины к другой называется частное от деления числа, измеряющего первую величину, на число, измеряющее вторую, в одной и той же мере. Введя термин «значение величины» вместо «числа, измеряющего величину в какой-нибудь мере», можно сформулировать короче: *отношением одной величины к другой называется частное от деления значения первой величины на значение второй, найденных в одной мере.*

Для отвлеченных чисел отношением одного числа к другому называется частное от деления первого числа на второе.

Эти определения подчеркивают, что отношение есть частное. Первое определение показывает, к каким конкретным задачам применяется этот термин.

Необходимо в определении указывать, какое из данных чисел надо взять делимым, какое делителем.

Примерный план работы.

1) Определение отношения. Названия членов отношения.

2) Зависимость между членами отношения. Нахождение неизвестного члена отношения.

3) Основное свойство отношения. Сокращение отношения.

В основу изучения намеченного плана берется то положение, что отношение есть частное, поэтому все свойства частного распространяются на отношение.

Большой материал для упражнений дают задачи на определение числового масштаба, то есть отношения длины на плане к соответствующей длине в действительности; на перевод линейного масштаба в числовой; на определение длины на плане, если даны длина в действительности и числовой масштаб; на определение длины в действительности, если даны длина на плане и числовой масштаб.

Решение последних двух задач сводится к нахождению неизвестного члена отношения.

В VI классе в теме «Пропорции» повторяются и углубляются полученные сведения. Изучается замена отношения дробных чисел отношением целых чисел.

Следует рассмотреть *отношение, обратное данному*, и установить, что отношение, обратное данному, равно отношению чисел, обратных данным. Ведутся следующие рассуждения.

Дано отношение $5:3=1\frac{2}{3}$.

Составьте отношение, обратное данному, поменяв местами предыдущий и последующий члены. Получим

$$3:5=\frac{3}{5}.$$

Составьте отношение чисел, обратных данным, и сравните с предыдущим отношением. Получим

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}=\frac{3}{5}=3:5.$$

Разобранное свойство имеет большое применение при решении задач на пропорциональное деление.

Пример задачи, связанной с понятием числовой масштаб. «Масштаб карты равен 1 : 10 000 000. Найти расстояние между двумя пунктами, если на карте это расстояние равно 5 *см*».

Решение. Обозначим искомое расстояние через x, получим:

$$5 : x=0{,}0000001;\ x=5 : 0{,}0000001=50\,000\,000\ (см);$$
$$50\,000\,000\ см=500\ км\ \text{(Ответ: 500 } км\text{)}$$

§ 24. Пропорции

Во всех курсах арифметики в настоящее время рассматривается пропорция только кратная или геометрическая.

Изучение пропорций имеет целью подготовку к изучению пропорциональной зависимости величин. По своему содержанию вопрос о пропорциях ближе к алгебре, чем к арифметике, так как имеет своим предметом свойство особого вида равенства — равенства двух дробей общего вида, числители и знаменатели которых могут быть дробные числа. Способ решения задач при помощи пропорций есть способ чисто алгебраический — это решение при помощи уравнений.

В связи с этим в методической литературе поднимался вопрос об исключении пропорций из курса арифметики и перенесении целиком в курс алгебры и были даны примеры решения задач на пропорциональные величины без применения свойств пропорции[1]. Были отдельные попытки исключить пропорции из курса арифметики и в советской школе. Например, в объяснительной записке к программе по математике на 1921/22 учебный год сказано: «Теорию числовых отношений и пропорций следует отнести к систематическому курсу алгебры». Но применение пропорций к решению задач дает удобный прием решения. Этим и объясняется сохранение пропорций в курсе арифметики средней школы.

В программе арифметики VI класса восьмилетней школы вопрос о пропорциях имеет следующее содержание: «Пропорции. Основное свойство пропорции. Нахождение неизвестного члена пропорции». Перестановка членов пропорции.

---

[1] См [189], [144].

Существует *два определения пропорций:*

1) пропорцией называется равенство двух отношений;

2) пропорцией называют два равных отношения, соединенных знаком равенства.

Первое определение наиболее распространенное в учебной литературе, включая и стабильный учебник 1963 г. Его следует придерживаться, так как оно кратко излагает то, что содержится во втором определении.

К понятию о пропорции следует подвести учащихся из рассмотрения конкретной задачи на пропорциональные величины.

Например: найти площади треугольников с основанием в 6 *см*, если длина высоты равна 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*, 5 *см*, 6 *см*. Вычислить отношение площадей любых двух треугольников и сравнить это отношение с отношением соответствующих высот треугольников. В результате решения задачи ученики получают два равных отношения.

Так, отношение площадей первого и третьего треугольника равно $6:12=\frac{1}{2}$, отношение высот $2:4=\frac{1}{2}$. Преподаватель предлагает записать равенство двух отношений $6:12=2:4$ и после этого дает определение пропорции.

Больше внимания следует уделить упражнениям в чтении пропорции различными способами. Эти упражнения помогают ученикам выяснить смысл пропорции и понять различные формулировки задач на пропорциональную зависимость.

Например, пропорцию $6:12=2:4$ можно прочитать так: а) отношение 6 к 12 равно отношению 2 к 4; б) 6 так относится к 12, как 2 к 4; в) 6 составляет такую часть от 12, какую 2 от 4.

Не следует спешить с выводом основного свойства пропорции. Первые уроки следует употребить на усвоение определения пропорции, смысла пропорции, то есть того соотношения между числами, которое определяется пропорцией. Упражнения могут быть следующие:

I. Составление пропорции по данной величине отношения, из данных отношений, например: 1) составить пропорцию, у которой величина отношений равна 3; 2) из данных отношений выбрать те, из которых можно составить пропорцию:

а) $20:5$; б) $\frac{1}{4}:5$; в) $0{,}6:0{,}15$; г) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$; д) $0{,}1:2$ и т. д.

II. Проверка правильности пропорции путем сравнения величины отношений.

III. Нахождение неизвестного члена пропорции. Решение упражнений последнего вида можно выполнять следующим образом:

$$x:12=35:5;\ x:12=7;\ x=7\cdot 12=84.$$

Рассуждения ведутся так: найдем величину отношения, для этого 35 : 5. Получили отношение, в котором неизвестен предыдущий член. Чтобы найти предыдущий член отношения, достаточно последующий член умножить на величину отношения.

Основное свойство пропорции можно установить следующим образом.

Путем рассмотрения конкретных примеров подмечается, что произведение крайних членов пропорции равно произведению средних. Каждому ученику предлагается записать в тетради пропорцию, вычислить произведение крайних членов и произведение средних членов и сравнить эти произведения. Дается обоснование на конкретных примерах, как $15:3=20:4$; $15\cdot4=60$; $3\cdot20=60$; $15\cdot4=3\cdot20$. Какими членами данных отношений служат множимые обоих произведений? множители? Что показывает отношение? Следовательно, множимое первого произведения во столько раз больше множимого второго произведения, во сколько раз множитель первого произведения меньше множителя второго. Отсюда следует равенство рассматриваемых произведений для любой пропорции.

В VI классе, ввиду того что ученики параллельно начали изучать геометрию, познакомились с доказательством, можно рассмотреть вывод основного свойства пропорции на основании более общих рассуждений.

В учебной литературе даются различные способы вывода основного свойства пропорции, так как это один из трудных вопросов для учащихся из-за связанного с ним формального преобразования. Рассмотрим некоторые из них и проведем соответствующие рассуждения. Например, пусть дана пропорция $6:9=8:12$.

Покажем путем рассуждений, а не вычислений, что и для этой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Способ 1-й. Вспомним, как найти предыдущий член, зная последующий член и отношение этих чисел. Для этого достаточно последующий член умножить на отношение. Получим

$$6=9\cdot\frac{2}{3};\quad 8=12\cdot\frac{2}{3}.$$

Тогда пропорция перепишется так:

$$\left(9\cdot\frac{2}{3}\right):9=\left(12\cdot\frac{2}{3}\right):12.$$

Произведение крайних членов равно $(9\cdot\frac{2}{3})\cdot12$.

Произведение средних членов равно $9\cdot(12\cdot\frac{2}{3})$.

На основании сочетательного и переместительного законов умножения

$$\left(9\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 12=9\cdot\left(12\cdot\frac{2}{3}\right),\ \text{или}\ 6\cdot 12=9\cdot 8.$$

Следовательно, произведение крайних членов равно произведению средних. На буквах этот вывод запишется так:

$$a:b=c:d.$$

Обозначим величину отношения $a:b$ через k, получим

$$a:b=k;\ a=b\cdot k;\ c=d\cdot k;\ a\cdot d=b\cdot k\cdot d;\ b\cdot c=b\cdot(d\cdot k);$$
$$b\cdot k\cdot d=b\cdot(d\cdot k);$$

следовательно,

$$a\cdot d=b\cdot c.$$

Способ 2-й (рассматривается в учебнике А П. Киселева). Предварительно вспоминаем, на какое число достаточно умножить частное, чтобы в произведении получить число, равное делимому.

Отсюда первое отношение достаточно умножить на последующий член, чтобы получить в произведении число, равное предыдущему члену. То же можно сказать про второе отношение. В этом случае полученные произведения не будут равны, так как мы равные числа умножаем на неравные. Чтобы получить равные произведения, достаточно умножить оба отношения на произведение последующих членов:

$$(6:9)\cdot 9\cdot 12=(8:12)\cdot 12\cdot 9;$$

отсюда

$$6\cdot 12=8\cdot 9,$$

что и требовалось установить, или

$$(a:b)\cdot b\cdot d=(c:d)\cdot d\cdot b;\ a\cdot d=b\cdot c.$$

В стабильном учебнике[1] не рассматриваются общие рассуждения при выводе основного свойства пропорции. Можно рассмотреть один из способов вывода на занятиях математического кружка. Очень часто в качестве упражнений на основное свойство пропорции предлагается учащимся проверить пропорцию, сравнив произведение крайних и произведение средних членов. Подобного рода упражнения преждевременны. Доказав, что «если четыре числа составляют пропорцию, то произведение двух данных чисел равно произведению двух других», нельзя утверждать обратное положение. Необходимо показать, что

[1] См. [182].

если произведение двух чисел равно произведению двух других чисел, то эти числа составляют пропорцию.

Учащимся предлагается записать в тетрадях два равных произведения и попробовать составить из чисел, входящих в произведения. пропорцию. Вопрос: если пропорция существует, какими ее членами будут числа первого произведения, второго произведения? После этого ученики составляют пропорции, проверяют правильность полученных пропорций при помощи равенств полученных отношений и убеждаются в справедливости обратного положения основному свойству пропорции.

Можно провести следующие рассуждения. Пусть даны такие четыре числа, что произведение двух из них равно произведению двух других, например:

$$8 \cdot 3 = 6 \cdot 4.$$

Докажем, что из данных чисел можно составить пропорцию.

Чтобы получить пропорцию из данных чисел, разделим каждое из данных произведений на одно и то же число, равное произведению двух чисел, одно из которых входит в первое произведение, второе — во второе. Полученные частные будут равны, так как равные числа делились на одно и то же число:

$$\frac{8 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 4};\ 8 : 4 = 6 : 3.$$

Получили пропорцию. При этих рассуждениях можно было бы сослаться на то, что при выводе основного свойства мы умножали оба отношения на одно и то же произведение. При обратной задаче мы делим каждое из произведений на одно и то же произведение (в случае применения 2-го способа вывода основного свойства). Таких пропорций можно получить четыре, так как можно составить 4 пары чисел, одно из которых входит в первое произведение, другое — во второе. Поменяв местами отношения, входящие в полученные 4 пропорции, можно получить еще 4 пропорции. Всего можно получить 8 пропорций.

Взяв одну из пропорций за основную и сравнивая с ней остальные пропорции, учащиеся приходят к следующему выводу о перестановке членов пропорции.

Пропорция не нарушается, если поменять местами: 1) средние члены, 2) крайние члены, 3) крайние сделать средними, а средние крайними.

Перестановку членов пропорции можно обосновать еще следующим образом.

Так как для того чтобы из четырех чисел можно было составить пропорцию, достаточно, чтобы произведение двух чисел равнялось произведению двух других, то во всякой пропорции можно переставлять члены, не нарушая равенство произведений крайних и средних членов.

После того как изучено основное свойство пропорции, следует снова вернуться к нахождению неизвестных членов пропорции, проверке пропорции. Но, используя основное свойство пропорции при решении этих задач, проверку полезно производить двумя способами.

Полезно ввести упражнения на *нахождение к трем данным числам четвертого числа, им пропорционального,* и показать, что эта задача имеет три решения [1].

Возможные преобразования пропорции путем увеличения или уменьшения членов ее в несколько раз следует рассмотреть на частных примерах, пользуясь для обоснования или основным свойством пропорции, или определением пропорции.

Примеры упражнений:

1. Останется ли верной пропорция, если: а) оба члена первого отношения умножить или разделить на 2 (покажите на примере); б) оба крайних члена увеличить или уменьшить в 3 раза; в) оба средних члена увеличить или уменьшить в 4 раза?

2. Сократить пропорцию $60 : 20 = 45 : 15$.

3. Заменить пропорцию с дробными членами пропорцией с целыми числами

$$2\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} : \frac{1}{8}.$$

Все приведенные преобразования имеют значение для усвоения учащимися смысла пропорции. При нахождении неизвестного члена пропорции в большинстве случаев проще написать формулу решения или преобразовать одно из отношений, входящих в данную пропорцию. Поэтому никаких специальных правил для этих преобразований не выводится.

§ 25. Прямая и обратная пропорциональность величин

Прямая и обратная пропорциональность являются простейшими видами функциональной зависимости. Основная задача этой темы — научить учащихся на ряде конкретных примеров не только подмечать определенную зависимость величин, но и различать виды этой зависимости (прямая и обратная пропорциональная зависимость, непропорциональная зависимость), составлять числовые формулы (пропорции), выражающие закон пропорциональной зависимости, и применять их к решению задач. Эта задача получила наибольшее развитие в учебной, методической литературе и в программах после Ок-

[1] Одно решение получится, если ввести дополнительное условие, например: найти к трем данным числам 4, 5 и 7 четвертое число, им пропорциональное, при условии, что 5 и 7 будут средними членами пропорции.

тябрьской революции, когда понятие функциональной зависимости было признано одним из важнейших понятий школьного курса математики.

В программе арифметики VI класса восьмилетней школы тема «Прямая и обратная пропорциональность величин» содержит следующие вопросы: «Прямая и обратная пропорциональность величин. Решение задач с пропорциональными величинами и задач на пропорциональное деление».

В объяснительной записке к программе имеется следующее указание: «Изучение зависимостей между величинами в курсе арифметики V класса проводится в связи с решением задач (зависимости между ценой, стоимостью и количеством; между скоростью, расстоянием и временем и др.). Знакомство с примерами конкретных зависимостей величин используется в VI классе при прохождении темы «Прямая и обратная пропорциональность величин». Изучение зависимости величин в курсе арифметики способствует лучшему пониманию идеи функциональной зависимости при изучении последующего курса математики. К пониманию графического изображения зависимости между величинами готовит учащихся систематически проводимое в курсе арифметики построение диаграмм» [1].

Зависимость величин

При изучении этого вопроса ученикам предлагаются задачи, решение которых они записывают в таблицы, например:

1. Поезд проходит в 1 час 40 *км*. Какое расстояние он пройдет за 2 часа? за $2\frac{1}{4}$ часа? за 3 часа? И т. д. Результат записать в таблицу.

2. Расстояние от колхоза до города 30 *км*. Записать в таблицу время, которое необходимо, чтобы проехать на велосипеде расстояние от колхоза до города, если скорость велосипедиста 8 *км/ч*; 9 *км/ч*; 10 *км/ч*; 12 *км/ч*.

3. Основание прямоугольника 8 *см*. Найти площадь прямоугольника, если длина высоты равна 1 *см*; 2 *см*; $2\frac{1}{4}$ *см*; 3 *см*; $3\frac{1}{2}$ *см*; 4 *см*; 5 *см*; 6 *см* и т. д.

4. Найти при тех же условиях периметр прямоугольника.

5. Площадь прямоугольника 6 *кв. см*. Найти длину высоты прямоугольника, если длина основания равняется 1 *см*; 2 *см*; 2,5 *см*; 3 *см*; $3\frac{1}{3}$ *см*; 4 *см* и т. д.

---

[1] См. [6], стр 9.

6. Найти объем куба, если длина ребра его равна 1 *см*; 2 *см*; 3 *см*; 4 *см* и т. д.

Затем в классе вывешиваются готовые таблицы, на которых записаны соответственные значения двух величин. Пример более сложной зависимости.

Возраст в годах	Средний рост в *см*
1	71
5	99
10	128
15	152
20	168
25	168

При рассмотрении таблиц ведется с учащимися беседа. Какие величины рассматриваются в первой таблице? Назовите значения первой величины, второй. Назовите для значения времени в 5 *ч* соответствующее значение длины пути. Как изменяется время? (Возрастает.) Как изменяется длина пути? (Тоже возрастает.) Как будет изменяться длина пути, если время движения будет убывать? (Убывать.)

Что можно сказать о длине пути, если время движения останется постоянным? (Тоже будет постоянным.) Найдите длину пути, соответствующую 10 *ч* времени движения. Что можно сказать о скорости движения? (Скорость не меняется.)

Преподаватель подытоживает результаты беседы в таком виде.

Каждому значению времени соответствует определенная длина пути при постоянной скорости. Длина пути зависит от времени при постоянной скорости движения.

Каждому значению длины пути соответствует определенное значение времени.

Время зависит от длины пути при постоянной скорости.

Подобную беседу можно провести при рассмотрении других таблиц. Ученики наблюдают, что характер изменения одной величины с изменением другой может быть разный; в одном случае с возрастанием одной величины вторая будет убывать, в другом случае сначала возрастать, а потом оставаться постоянной, как например в случае зависимости роста от возраста.

Прямая пропорциональная зависимость

Останавливается внимание учеников на примерах прямой пропорциональной зависимости (1-й и 3-й примеры из приведенных раньше)

Предлагаем им изучить характер изменения одной величины с изменением другой. Шестиклассники устанавливают, что с возрастанием значений одной величины соответствующие значения другой возрастают во столько же раз, и приходят к вы-

воду, что из отношений двух значений одной величины и соответствующих значений другой можно составить пропорции.

Получается следующая запись на доске (см. табл. 15).

Таблица 15

Длина основания прямоугольника (в *см*)	Длина высоты прямоугольника (в *см*)	Площадь прямоугольника (в *кв. см*)
8	1	8
8	2	16
8	3	24
8	4	32
8	5	40
8	6	48

5 *см*:2 *см*=2,5;

40 *кв. см*:16 *кв. см*=2,5;

5:2=40:16.

После этого преподаватель сообщает учащимся, что рассмотренная зависимость величин называется прямой пропорциональной зависимостью, а величины, находящиеся в этой зависимости одна по отношению к другой, называются прямо пропорциональными.

Получается определение, которое шестиклассникам можно давать в следующей формулировке.

Если отношение любых двух значений одной величины равно отношению соответствующих значений другой, то такие величины называются прямо пропорциональными.

В стабильном учебнике арифметики дается следующее определение.

«Если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значения одной из них в несколько раз значение другой увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие величины называются прямо пропорциональными».

Дальше рассматривается свойство прямо пропорциональных величин, которое выражает то соотношение между значениями величин, которое взято в основу первого определения.

В учебно-методической литературе имеются оба вида определений.

Некоторые преподаватели считают, что первое определение трудно для учащихся, что оно дает формальный признак. С этим можно было бы частично согласиться, когда вопрос о пропорциональной зависимости изучался в V классе. При изучении этого вопроса в VI классе первое определение вполне доступно для учеников. Шестиклассники и в курсе арифметики, и в параллельно изучаемом курсе геометрии встречались и с записью зависимостей формулами, и с чтением формул.

Первое определение, более общее, имеющее смысл в области вещественных чисел (второе только в области положительных чисел), годится и при изучении пропорциональной зависимости в VII классе.

Для того чтобы учащиеся отчетливо представляли, что не всякие две величины, для которых значение одной из них

возрастает при возрастании значений другой, будут пропорциональны, необходимо рассмотреть примеры возрастающих непропорциональных величин.

Вывод. Периметр прямоугольника с постоянным основанием непропорционален его высоте.

Таблица 16

Длина основания прямоугольника (в *см*)	Длина высоты (в *см*)	Периметр (в *см*)
8	1	18
8	2	20
8	3	22
8	4	24
8	5	26
8	6	28

После этого предлагается учащимся самостоятельно привести примеры прямо пропорциональных величин и непропорциональных величин.

Полезен такой вид упражнений: продолжить ряд значений пропорциональных величин.

При заполнении таблиц значений двух прямо пропорциональных величин полезно

$5\ см : 2\ см = 2{,}5;$
$26\ см : 20\ см = 1{,}3;$
$5 : 2 \neq 26 : 20.$

рассмотреть два способа нахождения значения одной величины, соответствующего данному значению другой.

Длина на плане (в *см*)	1	2	2,5	3	3,5	...	35
Длина в действительности (в *м*)	5						

1) На основании определения прямо пропорциональных величин составляется пропорция, в которой искомое значение является неизвестным членом, а известными членами служат найденные значения величин, и находится неизвестный член пропорции.

2) Для отыскания неизвестного значения одной величины находится произведение постоянного числа и соответствующего значения другой величины. В данном упражнении длину в действительности можно получить так: $5 \cdot 2 = 10$ (*м*); $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ (*м*) и т. д. Постоянное число 5 *м* — длина в действительности, соответствующая 1 *см* на плане.

Следует показать ученикам, что таким же способом можно получить значения одной величины, зная значения другой, в первом и во втором примерах прямо пропорциональных величин. В первом примере: $40 \cdot 2 = 80$ (*км*); $40 \cdot 2\frac{1}{4} = 90$ (*км*) и т. д., где 40 *км/ч* — скорость поезда. Во втором примере: $8 \cdot 2 =$

=16 (*кв. см*); 8·3=24 (*кв. см*) и т. д., где 8 *см* — постоянная длина основания прямоугольника. Постоянное число выражает значение третьей величины, постоянной при процессе изменения первых двух.

Это постоянное число равно значению одной из величин, когда значение другой равно единице.

Для того чтобы убедить учащихся, что второй способ справедлив для любой пары прямо пропорциональных величин, на примере прямоугольника с постоянным основанием покажем пропорциональность его площади длине высоты.

Выразим значение одной величины единицей и найдем отношение единицы к другому значению этой же величины. Полученное отношение равно отношению соответствующих значений другой величины.

Получим 1 : 3 = 8 : 24, отсюда 24 = 8 · 3; 1 : 6 = 8 : 48; 48 = 8 · 6.

Пришли к тому же результату.

Второй способ отыскания значения одной из двух прямо пропорциональных величин есть способ приведения к единице. В ряде учебников и методических пособий предлагается изучать с учениками упомянутое свойство прямо пропорциональных величин и ввести для постоянного числа термин коэффициента пропорциональности [1].

В стабильном учебнике [2] в отдельном параграфе рассматривается и запись формулой прямо пропорциональной зависимости.

В VI классе следует рассмотреть и построение графика прямой пропорциональной зависимости. Ученики уже познакомились при построении диаграмм с тем, как можно сравнивать различные величины при помощи чертежа. Это поможет им при построении графика.

В программе восьмилетней школы знакомство с графиками отнесено в курс алгебры VI класса. В этом курсе можно рассмотреть и построение графиков пропорциональной зависимости [3].

Обратная пропорциональная зависимость

План изучения обратной пропорциональной зависимости тот же, что и прямой зависимости. Рассматриваются примеры обратно пропорциональных величин (2-й и 5-й из приведенных на стр. 290). Устанавливается, что отношение значений од-

---

[1] См [137], [156] и В А. Крогиус, Изучение пропорциональных величин, Сборник «Математика в школе», Л., Госиздат, 1926.

[2] См. [182].

[3] См. ч III данной методики.

ной величины равно обратному отношению двух соответствующих значений другой. Возможны также два вида определений. Можно дать следующее определение обратно пропорциональных величин.

Если отношение любых двух значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой, то такие величины называются обратно пропорциональными.

Тогда рассматривается как свойство: если при увеличении (уменьшении) значения одной из двух величин в несколько раз значение другой величины уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то эти величины обратно пропорциональны (условие достаточное, но не необходимое). Приведенное соотношение взято в основу другого определения.

Следует привести пример двух величин, которые зависят друг от друга так, что с увеличением значений одной величины соответствующие значения другой уменьшаются, но не находятся в обратной пропорциональной зависимости. Например, изменение разности с возрастанием вычитаемого при постоянном уменьшаемом (см. табл. 17).

Таблица 17

Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
30	1	29
30	2	28
30	3	27
30	4	26
30	5	25
30	6	24

Так же следует рассмотреть два способа отыскания значения одной из двух обратно пропорциональных величин, соответствующего данному значению другой. Второй способ основан на следующем свойстве обратно пропорциональных величин.

Если две величины обратно пропорциональны, то произведение значения одной из них и соответствующего значения другой равно постоянному числу. Это третье число выражает значение величины, постоянной в процессе изменения первых двух. В рассмотренных нами примерах обратно пропорциональных величин в первом — постоянное число равно расстоянию от колхоза до города, во втором — равно площади прямоугольника. Постоянное число и в случае обратно пропорциональных величин равно значению одной из величин, если оно соответствует значению другой величины, равному единице, и называется *коэффициентом обратной пропорциональности*. Поэтому, чтобы вторым способом найти неизвестное значение одной из величин, достаточно найти значение любой из величин, когда значение другой равно единице, и разделить полученное число на значение другой величины, соответствующее искомому значению. Второй способ есть способ при-

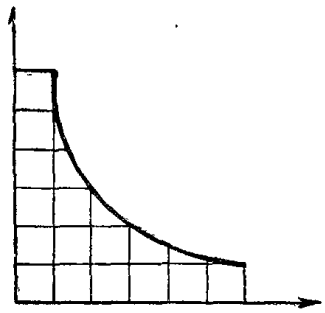


Рис. 35

ведения к единице. Отсюда получается следующая формула обратной пропорциональной зависимости $y \cdot x = a$ или $y = \frac{a}{x}$, где a — коэффициент пропорциональности. Полезно построить и график этой зависимости, хотя бы на внеклассных занятиях. График зависимости высоты от основания при постоянной площади прямоугольника будет иметь вид, указанный на рис. 35.

§ 26. Задачи на пропорциональные величины

Решение задач на пропорциональные величины является практическим применением свойств этих величин. Указанные задачи решаются еще в начальной школе способом приведения к единице. Это решение основывается только на данной конкретной зависимости. В VI классе в основу решения берутся небольшие общие рассуждения, как-то: определение вида зависимости, применение свойств пропорциональных величин; рассматриваются два способа решения; составляется формула решения.

Рассмотрим задачу.

«14 $см^3$ железа весят 109,2 $Г$. Сколько граммов весит кусок железа, объем которого равен 42 $см^3$?»

Следует начать с решения задачи привычным для учеников способом, то есть приведением к единице, увязав его со свойством пропорциональных величин и записав решение формулой. Условие записывается схематически так, чтобы числовые значения одной величины расположились в одном столбце и числовые значения другой — в другом столбце, а именно:

$$14\ см^3 — 109{,}2\ Г,$$
$$42\ см^3 — x\ Г.$$

Решение способом приведения к единице с объяснением

Так как вес железа прямо пропорционален его объему, то 1 $см^3$ будет весить в 14 раз меньше, чем 14 $см^3$.

$$1\ см^3 \text{ весит } \frac{109{,}2}{14}\ Г,$$

42 $см^3$ будут весить в 42 раза больше, чем 1 $см^3$:

$$42\ см^3 \text{ весят } \frac{109{,}2 \cdot 42}{14}\ Г,$$

$$x = \frac{109{,}2 \cdot 42}{14} = 327{,}6\ (Г).$$ (Ответ: 327,6 $Г$).

Решение при помощи пропорции

Так как вес железа прямо пропорционален его объему, то отношение значений веса равно отношению соответствующих значений объема:

$$\frac{14}{42}=\frac{109,2}{x};\quad x=\frac{42\cdot 109,2}{14}=327,6\ (Г).$$

Следует привести примеры задач, решение которых методом приведения к единице не имеет конкретного смысла. Например:

Зубчатое колесо с 8 зубцами делает 95 оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту сделает колесо, сцепленное с первым и имеющее 20 зубцов?

Вопрос, сколько оборотов в минуту сделает колесо, сцепленное с первым и имеющее один зубец, не имеет конкретного смысла.

Решение: 8 зубцов — 95 оборотов;
20 » — x » .

Так как число оборотов в минуту двух колес, сцепленных друг с другом, обратно пропорционально числу их зубцов, то отношение числа оборотов этих колес равно обратному отношению соответствующего числа зубцов одного и другого колеса.

$$x:95=8:20;$$
$$x=\frac{8\cdot 95}{20}=38\ (\text{оборотов}).$$

Рассмотренные задачи в учебной литературе обычно называют задачами на *тройное правило*. Термин *«тройное правило»* введен в употребление в курсах арифметики во всех европейских странах с XVI в., когда широкое развитие получила торговля и промышленность, а решение задач на пропорциональную зависимость приобрело большое практическое значение. В то время были составлены правила для решения подобного рода задач, которые служили готовыми рецептами для нахождения по трем данным числам четвертого. Отсюда эти правила и получили название тройное правило. Эти правила применялись механически. (Тройное правило применялось в Индии уже в VI в.)

Сложная пропорциональная зависимость

Рассмотрим задачи, в которых искомая величина изменяется пропорционально нескольким величинам, то есть задачи на *сложное тройное правило.*

Предварительно необходимо рассмотреть примеры сложной пропорциональной зависимости. Одним из простейших

примеров такой зависимости может служить изменение площади прямоугольника с изменением длины его основания и высоты (см. табл. 18).

В результате рассмотрения таблицы ученики замечают, что площадь прямоугольника изменяется при одновременном изменении длины основания и длины высоты, причем так, что при постоянной длине основания площадь изменяется пропорционально высоте, при постоянной длине высоты — пропорционально основанию. В этом случае говорят, что площадь прямоугольника изменяется пропорционально двум величинам: основанию и высоте прямоугольника.

Таблица 18

Длина основания (в *см*)	Длина высоты (в *см*)	Площадь прямоугольника (в $см^2$)
3	5	15
6	15	90
9	10	90
3	10	30
6	5	30
9	15	135

Отсюда выражение «величина изменяется пропорционально двум другим величинам» означает, что эта величина пропорциональна одной из двух других величин, если вторая из этих величин принимает постоянные значения.

Рассмотрим три способа решения задачи на сложную пропорциональную зависимость.

Задача. 29 каменщиков выложат стену, работая по 6 часов в день, за 8,4 дня. Сколько дней должны работать 24 каменщика с такой же производительностью труда, чтобы при 7-часовой ежедневной работе выложить такую же стену?

29 каменщ., 6 *ч*, 8,4 дня;
24 » 7 » *x* дней.

I. Способ пропорций

Число дней работы по условию задачи зависит от двух величин: числа каменщиков и продолжительности рабочего дня. Искомое число дней обратно пропорционально числу каменщиков при постоянной продолжительности рабочего дня и обратно пропорционально продолжительности рабочего дня при постоянном числе каменщиков.

Оставляя продолжительность рабочего дня постоянной, равной 6 часам, получим следующую задачу на простую пропорциональную зависимость:

29 каменщ., 6 *ч*, 8,4 дня;
24 » 6 » *y* дней

(искомое число обозначаем через *y*, так как оно не совпадает с искомым числом в задаче).

Решая полученную задачу, будем иметь:

$$\frac{29}{24}=\frac{y}{8,4};\quad y=\frac{29\cdot 8,4}{24}.$$

Запишем полученные результаты:

24 каменщ., 6 *ч*, $\frac{29\cdot 8,4}{24}$ дня;

24 » 7 » x дней.

Получилась задача опять на простую пропорциональную зависимость:

$$6:7=x:\frac{29\cdot 8,4}{24}.$$

Отсюда:

$$x=\frac{29\cdot 8,4\cdot 6}{24\cdot 7}=8,7 \text{ (дня)}.$$

Приведенная запись решения задачи при большом числе данных становится громоздкой. Можно ее упростить следующим образом.

Так как число дней работы обратно пропорционально числу каменщиков, то 24 каменщика выложат стену при прочих равных условиях в число дней, которое составляет $\frac{29}{24}$ от числа дней, в которое выполнят эту же работу 29 каменщиков, то есть в

$$8,4\cdot\frac{29}{24} \text{ (дня)}.$$

Так как число дней работы обратно пропорционально продолжительности рабочего дня, то 24 каменщика при 7 часах ежедневной работы выложат стену в число дней, которое составляет $\frac{6}{7}$ от числа дней, в которое выполнят работу 24 каменщика при 6 часах ежедневной работы, то есть в

$$8,4\cdot\frac{29}{24}\cdot\frac{6}{7} \text{ (дня)}.$$

Отсюда

$$x=\frac{8,4\cdot 29\cdot 6}{24\cdot 7}=8,7 \text{ (дня)}.$$

II. Способ приведения к единице

29 каменщ. при 6-часовом рабочем дне выложат стену в 8,4 дня;
1 » » 6-часовом » » выложит » в $(8,4\cdot 29)$ » ;
24 » » 6-часовом » » выложат » в $\frac{8,4\cdot 29}{24}$ » ;

24 каменщ. при 1 часе работы в день выложат стену в $\frac{8,4 \cdot 29 \cdot 6}{24}$ дня;

24 » » 7-часовом рабочем дне выложат » в $\frac{8,4 \cdot 29 \cdot 6}{24 \cdot 7}$ » .

$$x = \frac{8,4 \cdot 29 \cdot 6}{24 \cdot 7}.$$

III. Способ образования сложных единиц

Эту же задачу можно решить при помощи следующих рассуждений. Примем за единицу работу, выполняемую одним каменщиком в 1 час (назовем ее человеко-час), тогда

29	каменщ.	в 1 *ч*	выполнят	29	новых единиц
29	»	в 6 *ч*	»	29·6	» »
24	»	в 7 *ч*	»	24·7	» »

при той же производительности труда.

29·6	человеко-часов	— 8,4	дня;
24·7	»	— x	дней.

Число дней, необходимых для того чтобы выложить стену, обратно пропорционально работе, выполняемой в день.

Отсюда $$\frac{29 \cdot 6}{24 \cdot 7} = \frac{x}{8,4};$$

$$x = \frac{8,4 \cdot 29 \cdot 6}{24 \cdot 7} = 8,7 \text{ (дня)}.$$

Введение особого рода величин, измеряемых сложными единицами, упрощает решение задач на пропорциональные величины. В жизненной практике приходится встречаться со сложными единицами, например трудодень, то есть работа, выполняемая одним человеком в день.

Необходимо предостеречь от часто встречающейся ошибки распространять свойства пропорциональных величин на непропорциональные величины. Для этого полезно рассмотреть ряд задач на непропорциональные величины.

Возьмем в качестве примера задачу, рассмотренную в книге Брадиса и др. [1], следующего содержания:

«Победитель на состязании в беге пробежал 100 *м* за 10,2 *сек*. Какой путь он пробежит за 1 час?»

Если считать при решении этой задачи длину пути пропорциональной времени, то получится, что человек пробежит за

[1] См. [15].

час больше 35 *км*. Получился неверный результат, так как при рассуждениях не учтено, что соотношение между длиной пути и временем задано в промежутке 10,2 *сек* от начала движения, в следующие 10,2 *сек* спортсмен пробежит меньшее расстояние. Как показывает опыт, силы человека при таком беге быстро истощаются и скорость убывает.

Полезно привести примеры задач-шуток. Одна из таких задач:

«Человек в час проходит 4 *км*. Какой путь пройдут 3 человека в 2 часа, идя с той же скоростью?» Очень часто учащиеся дают неверный ответ: 24 *км*.

Подобного рода задачи приучат школьников, прежде чем применять свойства пропорциональных величин к решению, проверять, существует ли пропорциональная зависимость между данными в условии задачи величинами.

§ 27. Задачи на деление прямо и обратно пропорционально данным числам

Задачи на пропорциональное деление решаются и в начальной школе. В VI классе рассматриваются более сложные случаи: соотношение между частями задано при помощи отношений, деление на части обратно пропорционально данным числам.

Решение задач на пропорциональное деление основывается на свойствах пропорциональных величин.

При делении на части, прямо пропорциональные данным числам, удобнее всего использовать следующее свойство: каждое значение одной величины равно произведению постоянного числа на соответствующее значение другой. Рассмотрим решение следующей задачи.

«Длины сторон треугольной клумбы равны 10 *м*, 11 *м* и 13 *м*. Найти длины сторон этой клумбы на плане, если известно, что периметр треугольника на плане равен 17 *см*».

Решение. Обозначим длины сторон треугольника на плане через x_1, x_2, x_3. Так как длины сторон прямо пропорциональны числам 10, 11 и 13, то $x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 11 : 13$. Отсюда x_1 равно 10 единицам, $x_2 = 11$ единицам, $x_3 = 13$ единицам.

$$10+11+13=34; \quad 17:34=\frac{1}{2}\ (см).$$

$$\frac{1}{2}\cdot 10=5\ (см); \quad \frac{1}{2}\cdot 11=5{,}5\ (см); \quad \frac{1}{2}\cdot 13=6{,}5\ (см).$$

(Ответ: длины сторон клумбы на плане 5 *см*; 5,5 *см*; 6,5 *см*.)

Следует показать ученикам и другую запись:

$$10a+11a+13a=34a;\ 34a=17;\ a=\frac{1}{2},$$

где a длина на плане, соответствующая единице длины в действительности, или, в общем случае, a — значение одной величины, соответствующее значению другой, равному единице (коэффициент пропорциональности).

Запись

$$x_1:x_2:x_3=10:11:13$$

носит название пропорционального ряда и заменяет следующую:

$$x_1:x_2=10:11;\ x_2:x_3=11:13,$$

но не показывает порядка выполнения действий над числами. Последнее можно иллюстрировать на следующем примере.

Пусть дано

$$x_1:x_2:x_3=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}.$$

Заменим отношения дробных чисел отношением целых чисел, получим

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=40:45:48.$$

Если же произвести действия, то в левой части будем иметь

$$\frac{2\cdot4\cdot5}{3\cdot3\cdot4}=\frac{10}{9},$$

в правой

$$\frac{40}{45\cdot48}=\frac{1}{54}.$$

Левая часть не равна правой. Это можно объяснить тем, что, преобразовывая левую часть, мы делимое увеличиваем в 60 раз, а делитель в $(60\cdot60)$ раз, поэтому частное уменьшается в 60 раз.

$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$ можно заменить $\frac{2}{3}:\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)$.

В методической литературе имеются высказывания против приведенной записи пропорционального ряда. Предлагается сохранить запись вида $x:y=3:5;\ y:z=5:7$, так как запись $x:y:z=3:5:7$ не соответствует буквальному смыслу задачи[1].

---

[1] См.: В. Г. Прочухаев, Об учебнике по арифметике И. Н. Шевченко, «Математика в школе», 1957, № 4.

Рекомендуется[1] запись из учебника А. П. Киселева: $\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{5}=\frac{x_3}{7}$. Автор считает эту запись, как и первую, наглядной, но не содержащей ничего ложного. В заключение указывает: «Следует требовать от авторов учебников избегать введения условных записей, противоречащих общепринятому их смыслу».

Преимущество прежней записи в том, что записывается отношение значений одной и той же величины. После разъяснения условности прежней записи можно ее сохранить.

Решение задач на деление числа на части обратно пропорционально данным числам можно свести к делению данного числа на части пропорционально числам, обратным данным, причем взять в основу ранее установленное положение, что отношение, обратное данному, равно отношению чисел, обратных данным[2]

Рассмотрим решение задачи:

«Один рабочий выполняет норму за 6 часов, другой — за 5 часов и третий — за 4,5 часа. Работая вместе, они изготовили 795 деталей. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?»

Количество деталей, изготовляемое каждым рабочим за одно и то же время, обратно пропорционально времени, затраченному им на выполнение нормы, но прямо пропорционально производительности труда каждого рабочего. Производительность труда каждого рабочего выразится соответственно числами $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4,5}=\frac{2}{9}$, так как первый рабочий выполняет в час $\frac{1}{6}$ часть нормы, второй $\frac{1}{5}$ нормы, третий $\frac{2}{9}$ нормы. Для решения задачи достаточно 795 разделить на части обратно пропорционально числам 6, 5 и 4,5 или прямо пропорционально числам $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4,5}$.

Если обозначить число деталей, изготовленных каждым рабочим, через x_1, x_2 и x_3, то получим

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4,5} = 15 : 18 : 20;$$

$$15+18+20=53;\ 795:53=15 \text{ (деталей)};$$

$$x_1 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ (деталей)};$$

$$x_2 = 15 \cdot 18 = 270 \text{ (деталей)};$$

$$x_3 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ (деталей)}.$$

---

[1] См. Ф. Гутковский (Варшава), Об одной условной форме записи, «Математика в школе», 1958, № 4.

[2] См. ч. II, гл. VI, § 23.

В этой задаче замена отношения, обратного данному, отношением чисел, обратных данным, имеет конкретный смысл. После решения подобной задачи ученики могут сделать самостоятельно вывод о способе решения задачи на деление числа на части обратно пропорционально данным числам.

Полезно решить с учащимися данную задачу вторым способом.

Проводятся следующие рассуждения: так как количество деталей, изготовляемое каждым рабочим за одно и то же время, обратно пропорционально времени, затрачиваемому им на выполнение нормы, то $x_1 : x_2 = 5 : 6$; $x_2 : x_3 = 4{,}5 : 5 = 9 : 10$.

Преобразуем первое и второе отношения так, чтобы в обоих отношениях x_2 соответствовало одно и то же число. Для этого найдем наименьшее общее кратное чисел 6 и 9, равное 18, члены первого отношения умножим на дополнительный множитель 3, а члены второго на 2, получим

$$x_1 : x_2 = 15 : 18;\ x_2 : x_3 = 18 : 20;$$

отсюда получим

$$x_1 : x_2 : x_3 = 15 : 18 : 20.$$

Пришли к тому же пропорциональному ряду. Дальнейшее решение совпадает с решением задачи первым способом.

Обращается внимание учащихся, что решение первым способом короче. Второй способ решения данной задачи рассматривается после того, как учащимися были выполнены упражнения следующего вида:

Разделить число 310 на три части: x, y и z так, чтобы $x : y = 3 : 5$; $y : z = 8 : 11$.

При решении учитель ставит вопросы: какое число соответствует неизвестному числу y в первом отношении, во втором отношении? Как преобразовать первое и второе отношения, не меняя их величины, чтобы в обоих отношениях y соответствовало одно и то же число? Каким числом по отношению к числам 5 и 8 будет искомое число, соответствующее y в обоих отношениях?

Сложное пропорциональное деление — деление числа на части, пропорциональные двум или нескольким рядам чисел, то есть на такие части, которые пропорциональны значениям одной величины, если значения другой величины остаются постоянными. Задачи на сложное пропорциональное деление — один из видов задач на сложную пропорциональную зависимость. Они сводятся к задачам на простое пропорциональное деление или путем сложных единиц, или приведением значений одной из пропорциональных величин к единице или к другому постоянному числу.

Рассмотрим решение следующих задач.

1. Три бригады рабочих получили за совместную работу 99 руб. Первая бригада состояла из 5 человек и работала 4 дня; вторая бригада состояла из 8 человек и работала 3 дня, а третья состояла из 7 человек и работала 4 дня. Сколько денег заработала каждая бригада?

Путем введения сложной единицы решение задачи сводится к задаче на деление числа на части пропорционально заданным числам.

Примем за единицу работу, выполняемую одним рабочим в один день, тогда первая бригада выполнит работу, равную $5 \cdot 4$ (человеко-дней), вторая — $8 \cdot 3$ (человеко-дней), а третья — $7 \cdot 4$ (человеко-дней). 99 рублей нужно будет разделить на три части пропорционально полученным числам, т. е.

$$x_1 : x_2 : x_3 = 5 \cdot 4 : 8 \cdot 3 : 7 \cdot 4 = 5 : 6 : 7.$$

2. Турист прошел за 14 дней 196 *км*. Сначала он прошел 48 *км*, находясь в пути по 4 часа в день; затем он прошел 70 *км*, находясь в пути по $3\frac{1}{2}$ часа в день и, наконец, остальную часть пути проходил по $3\frac{1}{4}$ часа в день. Сколько дней он истратил на каждую часть пути, если все время шел с одной и той же скоростью?

Найдем длину пути, пройденного в третий раз, и составим таблицу значений величин, входящих в условие задачи, обозначив значения искомой величины через x_1, x_2 и x_3.

Число дней движения прямо пропорционально длине пути при постоянном числе часов движения в день и постоянной скорости и обратно пропорционально числу часов движения при постоянных длине пути и скорости.

Чтобы свести эту задачу к задаче на деление на части прямо пропорционально данным числам, положим, что турист находился в пути только 1 час в день в течение всего времени движения. Тогда он за то же число дней пройдет путь во столько раз меньший, во сколько раз уменьшится число часов, то есть в первый раз $\frac{48}{4}$ *км*, во второй раз $\frac{70}{3\frac{1}{2}}$ *км*, в третий раз $\frac{78}{3\frac{1}{4}}$ *км*.

Таблица 19

Длина пути (в *км*)	Число часов движения в день	Число дней движения
48	4	x_1
70	$3\frac{1}{2}$	x_2
78	$3\frac{1}{4}$	x_3

Так как число дней движения

при прочих равных условиях пропорционально длине пути, то получим

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{48}{4} : \frac{70}{3\frac{1}{2}} : \frac{78}{3\frac{1}{4}} = 12 : 20 : 24 = 3 : 5 : 6.$$

Пришли к задаче на простое пропорциональное деление.

В этой задаче требовалось 14 дней разделить на три части пропорционально ряду чисел: 48, 70, 78 и обратно пропорционально ряду чисел: 4; $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$ или пропорционально двум рядам чисел: 48; 70; 78 и $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{3\frac{1}{4}}$.

Из приведенных рассуждений следует: для того чтобы найти ряд чисел, которым пропорциональны искомые числа, достаточно числа предыдущих двух рядов перемножить.

Так как решение задач имеет цель научить учащихся применять полученные знания к разрешению различных вопросов, не следует давать механического правила решения, необходимо требовать проведения соответствующих рассуждений.

Задачи на сложное пропорциональное деление не приведены в стабильном задачнике. Это задачи повышенной трудности, они могут быть решены на внеклассных занятиях с учащимися.

Часть третья
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

ГЛАВА I
АЛГЕБРА КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

§ 1. Из истории возникновения алгебры

Определения алгебры, которые давали этому предмету различные авторы, обычно неполны и неудовлетворительны. Одни определяли алгебру как науку, занимающуюся составлением общих решений различных задач и вообще решением вопросов относительно чисел в общем виде (А. Малинин и К. Буренин, Руководство алгебры, 1903), другие — как науку о тождественных преобразованиях выражений (А. Киселев, Элементарная алгебра, 1916), третьи видели в алгебре науку, которая «учит рассуждать о величинах, изображая их буквами и обозначая особыми знаками зависимости между ними». Как видно, все эти определения, помещаемые обычно в начале книги, не только не охватывают содержания алгебры, но и вообще либо ничего не говорят ученикам, начинающим ее изучение, либо создают у них неверное представление о предмете. Поэтому не следует приводить какого-либо определения алгебры в начале изучения курса, достаточно сказать, что в новом предмете будут изучаться новые числа, действия над ними и приложения их к решению различного рода задач, новые зависимости между величинами.

Самому же учителю следует знать историю тех основных понятий и идей, которые изучаются в школьном курсе алгебры. Эти сведения позволят ему связать все изучаемое в школе в единую систему знаний, правильно осветить источники возникновения новых понятий, как-то: отрицательные числа, функции, уравнения и т. д.

Зачатки тех сведений, которые относятся в настоящее время к алгебре, имеются в материалах отдаленных времен[1].

[1] См [71].

Наиболее обширным по количеству материала является египетский папирус Райнда (хранится в Лондоне). Второй папирус расшифрован акад. Б. А. Тураевым в 1917 г. и В. В. Струве в 1927 г. (хранится в Москве). Написание этих папирусов относят приблизительно к XVIII—XX вв. до н. э.

В папирусах помещены по преимуществу образцы арифметических расчетов и решение разнообразных задач не только конкретного, но и отвлеченного характера.

В этих задачах встречаются, конечно, в своеобразной форме, решение уравнений, возведение чисел в квадрат и извлечение корня, арифметическая и геометрическая прогрессии.

Для решения задач, которые в современном изложении приводят к системе линейных уравнений, впервые применяется правило ложного положения (иногда применяется метод проб).

Особенностью указанных математических материалов является то, что в них не отделяются вопросы алгебры (в современном делении предметов) от вопросов арифметики и геометрии.

Греческие ученые в более поздние времена (Пифагор — VI в. до н. э., Евклид IV—III в. до н. э.) достигли значительных результатов в области алгебры, хотя занимались преимущественно геометрией. Так, книги VII—IX «Начал» Евклида содержат учение о пропорциях, степени, о геометрических прогрессиях, несколько теорем из теории чисел [1].

Во второй книге развито учение об алгебраических количествах и о действиях над ними, но изложено это учение в геометрической форме. Так, геометрически доказываются тождества:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\ (a+b)\cdot c=ac+bc.$$

В IV в. н. э. у греческого математика Диофанта имеются уже зачатки учения об отрицательных числах, попытка ввести буквенную символику и обозначения действий особыми знаками, решение уравнений определенных и в особенности неопределенных как первой, так и более высоких степеней.

Решение задач методом проб в более сложных случаях требовало большого числа попыток и, естественно, толкало на поиски более совершенных методов. Постепенно возникало стремление сократить число делаемых попыток подобрать неизвестное в задаче число. Было обращено внимание на характер изменения результата подстановки в уравнения различных чисел и подмечена возможность изменять испытываемые значения неизвестного определенным образом. Получили начало

[1] См [238].

методы решения задач при помощи предположения. Так, в папирусе Райнда для решения задачи: «Найти кучу, которая вместе со своей четвертой частью составляет 15», что в современном изложении выражается уравнением $x+\frac{x}{4}=15$, рекомендуется испробовать $x=4$. При подстановке получается $4+1=5$, а нужно получить 15 Следовательно, испытываемое число 4 надо увеличить в отношении 15 : 5, получается

$$x=\frac{4\cdot 15}{5}=12.$$

Позже было замечено, что проще всего начинать пробу с 1, а дальнейшие наблюдения привели к выработке метода определения неизвестного числа только через данные в условии числа.

Около 820 г. н. э. ученый Мухаммед-ибн-Муса ал-Хорезми (Мухаммед сын Мусы из Хорезмы — ныне Узбекской ССР) написал книгу «Ал-джебр ва-л-мукабала», которую посвятил составлению и решению уравнений первой и второй степени. В этой книге нет еще буквенной символики, все рассуждения записываются словами (риторическая алгебра), но впервые идет речь о перенесении отрицательных членов уравнения из одной части в другую (что и означает ал-джебр) и о приведении подобных членов уравнения, имеющих противоположные знаки (что и означает «мукабала»). От слова ал-джебр и получила свое название наука алгебра; от слова ал-Хорезми произошел термин «алгоригм», то есть некоторый порядок какого-либо вычисления (например. алгоритм вычисления наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя, алгоритм нахождения общей меры отрезков и т. д.).

Таким образом, в этой книге завершены поиски наиболее рациональных приемов решения уравнений и впервые выделена алгебра как самостоятельный раздел математики.

В дальнейшем алгебра получила свое самостоятельное развитие Прежде всего это выразилось во многих исследованиях решений уравнений (XV—XVIII вв), во введении новых областей чисел признания огрицательных чисел в XVII в., иррациональных в XVIII в , мнимых в XIX в Известно, что введение новых областей чисел было подсказано решением уравнений и требованиями геометрии.

Буквенная символика была окончательно введена только в конце XVI в. Позднее других основных математических понятий, которые изучаются в курсе математики восьмилетней школы, было введено и развито понятие функции. Первое научное определение функции было дано в 1718 г. учителем Л Эйлера Иоганном Бернулли. В 1755 г. член Петербургской академии

наук Л. Эйлер дал иное определение функции; это определение было уточнено в 1834 г. Н. И. Лобачевским: «Функция от x есть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа».

В 1837 г. П. Дирихле дал определение функции, которым пользуются в школьных курсах математики: «y есть функция от x, если всякому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие».

Л. Эйлеру принадлежит завершение разработки элементарной алгебры в 1770 г. в виде учебника «Алгебра»; этот учебник явился образцом позднейших учебников алгебры как у нас, так и за границей.

Прообразом современных учебников алгебры является «Алгебра» Н. И. Лобачевского, изданная в 1834 г.

§ 2. О преподавании алгебры в восьмилетней школе

Программы алгебры восьмилетней школы содержат следующие темы:

VI класс

1. Алгебраические выражения.
2. Рациональные числа. Уравнения.
3. Действия над целыми алгебраическими выражениями.

VII класс

1. Уравнения первой степени с одним неизвестным.
2. Разложение многочленов на множители.
3. Алгебраические дроби.
4. Координаты и простейшие графики.
5. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными.
6. Повторение

VIII класс

1. Счетная (логарифмическая) линейка.
2. Квадратный корень и квадратные уравнения.
3. Функции и графики.
4. Повторение.

Задачи преподавания алгебры в восьмилетней школе можно сформулировать так: расширить у учеников представление о числе, научить сознательно, быстро и наиболее рационально производить вычисления и тождественные преобразования алгебраических выражений, развить идею функциональной зависи-

мости и ее графического представления, научить приемам составления уравнений и методам их решений, научить применять знания по алгебре к решению простейших задач из смежных дисциплин — физики, химии, астрономии, техники, сельского хозяйства.

Соответственно перечисленным задачам в программе по алгебре выделяются такие основные темы:

а) «Тождественные преобразования алгебраических выражений»;

б) «Учение об уравнениях»;

в) «Расширение понятия числа»;

г) «Учение о функциях».

Современные программы восьмилетней школы по алгебре в сравнении с предшествующими значительно упрощены. В них особенно подчеркнута задача развития у учащихся вычислительных навыков с помощью устных упражнений, с помощью таблиц, графических методов и счетной линейки; программы особо подчеркивают необходимость обучать учащихся приближенным вычислениям.

Общие принципы обучения математике изложены в первом разделе, но мы все же кратко остановимся на тех из них, которыми следует руководствоваться в преподавании алгебры, исходя из задач, указанных в программе.

1. Принцип научности в изложении учебного материала. Развитие логического мышления учеников. В начальной алгебре значительно труднее, чем в геометрии, осуществить логическую последовательность в изложении учебного материала. Многие алгебраические понятия в дальнейшем курсе расширяются, требуют иных определений. В курсе восьмилетней школы это должно учитываться: определения понятий, вводимых, например, в VI—VII классах, не должны противоречить более общим определениям, которые будут даны понятиям в более старших классах. В курсе алгебры должна осуществляться постепенность в ознакомлении с понятиями.

В начале изучения алгебры в некоторых случаях можно не требовать от учеников точных определений, заменив их описаниями. Однако «описание» не должно быть расплывчатым, ученик должен отдавать себе ясный отчет, о чем идет речь в описании.

В алгебре дается много формул, выводы их строятся на основе тождественных преобразований и не имеют вида теорем. У школьников иногда создается впечатление, что они изучают в алгебре некое собрание формул и что в алгебре нет той логической строгости, которую они видят в геометрии. Не случайно учащиеся всегда говорят, что в геометрии «мы доказываем теоремы», а в алгебре «решаем примеры».

Чтобы воспитать правильное отношение учеников к предмету, надо следить за логической стройностью в изложении учебного материала. Поэтому надо ввести доказательство некоторых, хотя бы немногих, теорем, а положения, доказательство которых недоступно для учеников из-за их возраста, должны приниматься без доказательства, но об этом школьники должны знать.

В процессе обучения алгебре учеников необходимо знакомить с элементами формальной логики. Надо научить их самостоятельно доказывать несложные математические положения, формулировать прямые и обратные теоремы, получать формулы для частных случаев из общих выражений и т. д. Весьма существенное значение для развития логического мышления имеют задачи на доказательство.

2. Активизация процесса обучения. Самостоятельная работа учеников. Для активизации процесса обучения и познавательной деятельности учащихся желательно изложение каждой темы начинать с рассмотрения каких-нибудь конкретных задач: выяснить цель темы, те проблемы, которые предстоит разрешить.

Надо вести обучение так, чтобы усилить мыслительную деятельность учащихся. Для этого надо чаще практиковать самостоятельные выводы формул (например: в теме «Тождественные преобразования»), выводы общих законов в результате изучения конкретных примеров (например: общий вывод из рассмотрения зависимостей между коэффициентами квадратного уравнения и корнями уравнения — теорема Виета). Надо, чтобы ученики пользовались готовыми таблицами, а кроме того, самостоятельно составляли таблицы для вычислений, обзорные таблицы (например, графиков какой-либо функции) и др.

Для развития самостоятельности учащихся следует подбирать упражнения так, чтобы каждая следующая задача не была буквальным повторением предыдущей, а содержала хотя бы небольшой элемент нового. Даже в упражнениях для тренировки этот принцип можно осуществить.

Большое значение в развитии самостоятельности школьников имеют задачи, допускающие несколько вариантов решения, когда ученики имеют возможность сравнивать способы решения задачи, оценивать их и избирать наиболее рациональное решение.

Значительно активизирует мысль учеников самостоятельное составление ими задач и упражнений, самостоятельная работа их с учебником, самостоятельное чтение доступной математической литературы, внеклассная работа по выполнению специальных заданий, по решению задач и особенно задач на сообразительность.

§ 3. О системе упражнений по алгебре

Перестройка преподавания математики требует от учителя большего внимания к системе и подбору упражнений. Упражнения должны быть направлены не только на механическое применение различных формул и не только на запоминание приемов решения различных типов задач. В системе упражнений большое место должны занять такие, которые направлены на развитие мышления, на обоснование совершаемых операций, на самостоятельное составление задач (параллельно с решением готовых задач), на повышение культуры вычислений.

1. Программы требуют повышения вычислительных навыков: эти навыки «готовят учащихся к повседневной практической деятельности, дальнейшему изучению математики и смежных дисциплин». Первоначальные вычислительные навыки вырабатываются у школьников в курсе арифметики, но в дальнейшем эти навыки нередко постепенно утрачиваются.

Специальная проверка показала, что ученики VII—VIII классов делают ошибки в делении чисел, когда в середине частного получается нуль, не всегда умеют определить число по заданным процентам его, особенно если число процентов дробное, плохо знают правила приближенных вычислений. Естественно, чтобы полученные навыки вычислений сохранить и еще больше развить, в алгебраических задачах необходимо значительно чаще, чем это делается обычно, обращаться к вычислениям, совершать числовые подстановки. Эти подстановки могут служить приемом для «проверки» правильности тождественных преобразований, для того чтобы показать роль алгебры и значение различного рода преобразований. Такие упражнения, как, например, нахождение численного значения многочлена, который может быть предварительно упрощен, убеждают учащихся в необходимости тождественных преобразований.

Пример Найти численное значение многочлена $37a+24a+43a-13$ при $a=5{,}3$. При нахождении числового значения этого выражения можно подставить в многочлен вместо буквы a заданное значение и получить $37\cdot 5{,}3+24\cdot 5{,}3+49\cdot 5{,}3-13$, что после достаточно громоздких вычислений даст результат 570. Используя распределительный закон умножения, ученики получат совсем простое выражение:

$$(37+24+49)\cdot a-13=110a-13=110\cdot 5{,}3-13=583-13=570.$$

Заметим, что такого вида преобразования можно рассматривать и до приведения подобных членов.

В задачниках обычно предлагается много однообразных упражнений, связанных с введением понятий коэффициента и степени, например: упростить выражение $cp+cp+cp+cp+cp$ или упростить $xxx+ab+xxx+ab+ab+xxx$ и др. Преобразования «оживают», если практиковать нахождение числового значения подобных выражений; в этом случае будет видна не только формальная сторона преобразований, но и значение коэффициента для практических расчетов.

По мере усложнения тождественных преобразований увеличивается возможность показать практическое значение их. Нам приходилось наблюдать, когда ученики находили числовое значение выражения $(3x^2-4xy-2y^2)-(-2x^2-5xy+3y^2)+5y^2$ при $x=\frac{1}{4}$, $y=-2$, не преобразовав предварительно сумму, и, как выяснилось, они делали это так потому, что в задании не было сказано: «сначала упростить, а затем вычислить». Это говорит о том, что в мыслительной деятельности многих учеников преобладают формальные моменты: принимаясь за вычисления, они редко думают о их рациональности.

По разделам и темам «Умножение и деление по формулам», «Разложение многочленов на множители», «Алгебраические дроби» в задачниках много упражнений. Большинство их направлено на тренировку в применении выведенных формул ко все более усложняющимся выражениям, но вместе с этим весьма важно, чтобы ученики видели возможность применения этих формул для наиболее рациональных вычислений. Нужны упражнения не только на преобразования выражений, например разложить на множители многочлен $36a^5-12a^3b+ab^2$, но и такие, в которых надо найти числовое значение заданного выражения, например, при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$; пусть ученик сам увидит необходимость и возможность предварительного преобразования заданного выражения.

В теме «Дроби» надо давать упражнения не только на формальные преобразования, но и в таком виде:

Примеры: **1.** Найти числовое значение выражения при $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$:

$$\frac{2a^3b+8a^2b^2}{8a^3b+12a^2b^2}.$$

2. Найти числовое значение выражения при $a=13$:

$$\frac{9}{4a^2+16a}-\frac{1}{4a^2+8a}-\frac{a^2+4a+7}{a(2a+4)(a+4)}+\frac{1}{a+4}.$$

3. Выделить целую часть дроби и вычислить при $a=3$:

$$\text{а)}\ \frac{2a^4+3a^3+2a+3}{2a+3};\quad \text{б)}\ \frac{2a^4-a^2+2a-1}{2a^2-1}.$$

2. Программы требуют «проводить систематическую и целенаправленную работу по развитию логического мышления учащихся». В целях развития мышления следует широко практиковать самостоятельные выводы различных формул (см. § 9), надо чаще возвращать учащихся к сделанным обобщениям, к основным положениям для получения того или иного вывода.

На практике, например, однажды выведенные формулы умножения используются в дальнейшем механически, на основе заученных схем, на основе памяти. Но чтобы ученики лучше усвоили, что в формуле $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ под символами a и b можно понимать любые выражения, надо, чтобы ученики проделали преобразования и более сложных выражений, но таким же путем, как они это делали для $(a+b)^2$; например, найти произведение $(3a^2+2c^3)\cdot(3a^2+2c^3)$ непосредственно умножением, а затем по формуле.

К такого вида упражнениям можно отнести и следующие:

1. Прибавить к трехчлену $25x^2-5x+1$ такой член, чтобы получить квадрат двучлена.

2. К двучлену $9a^2-12ax^3$ приписать такой третий член, чтобы получить квадрат двучлена.

3. Какие одночлены можно подставить вместо x и y в выражение $x-12ab^3+y$, чтобы получить полный квадрат суммы двух чисел?

4. Какие одночлены можно подставить вместо x и y, чтобы получить равенство $x^2-y^2=9a^4b^2-\frac{1}{16}a^2b^4$?

5. Заменить неизвестные члены в равенствах:

$$\text{а)}\ (x-5)^2=\frac{36}{25}-y+p;\quad \text{б)}\ (2-x)(2+x)=y-64.$$

6. В кубе некоторого двучлена второй член равен $-6c^4$. Найти этот двучлен.

7. В кубе некоторого двучлена третий член равен $48a^2$. Найти двучлен.

Некоторые из приведенных упражнений требуют от учащихся поразмыслить, испробовать различные вариации и остановиться на таких, которые удовлетворяют условию, иногда обнаружить неоднозначные ответы [1]. Аналогичные упражнения можно подбирать и из других разделов программы. Приведем примеры по теме «Дроби».

[1] См статьи П М. Эрдниева и Е. С. Канина, «Математика в школе», 1960, № 1.

1. Написать несколько дробей, которые после сокращения были бы равны одной и той же дроби $\frac{2a-5}{4}$.

2. Придумать такую дробь, чтобы ее можно было сократить, используя формулы умножения.

3. Подобрать такие целые численные значения для a и b, чтобы дробь $\frac{2a+3b}{3a-2b}$ оказалась: а) положительной, б) отрицательной, в) правильной, г) неправильной.

Примечание. Для решения этой задачи вовсе не надо знать неравенства.

В подборе упражнений необходимо соблюдать не только постепенное усложнение, но и подчеркивать принципиальное разнообразие вариантов. Примеры такого подбора можно увидеть в изложении темы «Разложение на множители», в теме «Сложение дробей».

3. Программы требуют решения задач практического характера. Надо и на уроках алгебры давать такие задачи, решение которых основано на знаниях учащимися физики, химии, геометрии, техники. Следует, например, использовать упражнения на расчеты по чертежам. При этих расчетах учащиеся упражняются в составлении формул, в преобразовании их, в нахождении числового значения полученного выражения при заданных числовых данных.

Пример. Найти различные выражения площадей каждой из указанных фигур и сравнить найденные выражения в каждом случае.

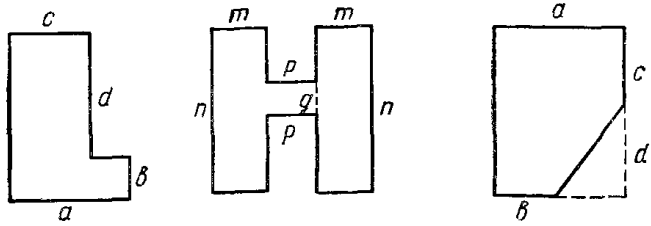


Рис. 1

Следует подбирать и соответствующие задачи на составление уравнений.

Задача. К раствору, содержащему 40 *г* соли, добавили 200 *г* воды, после чего концентрация раствора уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал первоначальный раствор и какова была его концентрация?

Решение задачи приводит к уравнению $x^2+280-70\,400=0$.

4. Программы требуют систематического решения задач, в частности на составление уравнений. При решении текстовых

задач особенно важно, чтобы ученик ясно представлял реальную ситуацию, описанную в условии задачи. В задачах на движение обычно рассматривается встречное движение и движение в одну сторону, очень редко движение в противоположные стороны. В результате школьники затрудняются в решении такой простой задачи: «Два мотоциклиста, находившиеся друг от друга на расстоянии 10 *км*, одновременно выехали в противоположных направлениях, и через 4 часа расстояние между ними стало равным 466 *км*, при этом известно, что скорость движения одного из них была на 6 *км/ч* больше скорости другого. Найти скорость каждого мотоциклиста». Поэтому мы полагаем, что, решая задачи на движение, следует рассмотреть по возможности все варианты, причем можно наверное сказать, что учащиеся сами подскажут некоторые из них. Важно, чтобы ученики понимали, что каждое явление характеризуется некоторыми величинами и для решения задачи надо, выделив эти величины, определить зависимость между ними; эту связь и нужно выразить уравнением.

В тех случаях, когда условие может быть «записано» графически, надо это делать. Такая «запись» часто помогает установить и связи между данными и искомыми. В частности, такие «записи» весьма полезны при решении задач на движение.

Приведем две примерные записи условия задачи:

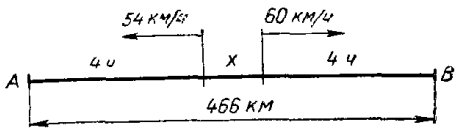


Рис. 2

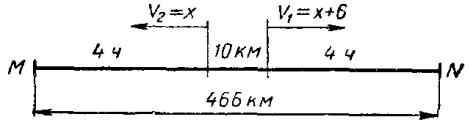


Рис. 2а

З а д а ч а. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на 35 *мин* скорее, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

Изобразим условие на чертеже (см. рис. 3).

Обозначим скорости велосипедистов v_1 и v_2, а время движения на участках AC и CB II велосипедиста T *ч* и I велосипедиста $\left(T-\frac{7}{12}\right)$ *ч*.

По условию имеем:

$$v_1+v_2=28;\ v_2T=v_1;\ T=\frac{v_1}{v_2}=\frac{v_1}{28-v_1};$$

$$v_1\left(T-\frac{7}{12}\right)=v_2; \qquad v_1\left(T-\frac{7}{12}\right)=28-v_1;$$

$$v_1\left(\frac{v_1}{28-v_1}-\frac{7}{12}\right)=28-v_1;$$

отсюда $v_1^2+68v_1-1344=0$; $v_1=16$; $v_1^1=84$ (не удовлетворяет условию).

(Ответ: $v_1=16\frac{км}{ч}$; $v_2=12\frac{км}{ч}$.)

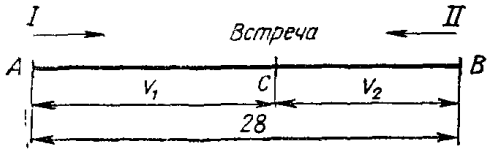


Рис 3

При решении задач на составление уравнений следует особое внимание уделить вопросу выражения однородных величин в одной и той же мере. Ученики особенно часто делают ошибки, когда в одном случае время выражают в часах, а в другом — в минутах.

Задача. Водитель машины рассчитал, что если на протяжении 209 *км* он уменьшит скорость на 2 *км/ч*, то время переезда увеличится на 8 *мин*. Какая скорость считалась первоначальной? Решение задачи приводит к уравнению:

$$\frac{209}{x-2}=\frac{209}{x}+\frac{8}{60}.$$

Ученик должен понимать, что если он выражает скорость движения в часах, то и разность во времени должна быть выражена в часах, то есть вместо 8 *мин* надо взять $\frac{8}{60}$ *ч*.

Полезно предлагать учащимся самостоятельно составлять задачи по некоторым заданным величинам. В этих условиях ученик вынужден подумать, выбрать некоторый сюжет для условия, выбрать числовые данные, достаточные для решения задачи, правильно уметь сформулировать словами условие и решить придуманную им самим задачу. Такая работа повышает развитие учащихся и вызывает у них интерес.

5. Иногда изучение функций сводится к построению графиков и к установлению некоторых свойств изучаемой функции. Однако не меньшее образовательное и практическое значение имеет и обратная задача — составление уравнения функции по известным координатам некоторых точек ее графика или по заданному графику.

Программы требуют, чтобы ученики не только умели строить графики функций, но и читать графики.

В применении к линейной функции могут быть предложены задачи такого характера: «Написать уравнение прямой по координатам ее точек $A(3;\ -2)$, $B(-1;\ 4)$».

В применении к квадратичной функции могут быть предложены задачи такого характера: «Координаты вершины параболы $A(4;\ 0)$, кривая проходит через точку $B(5,\ 3)$. Написать уравнение параболы». Решение этой задачи такое точка A лежит на оси абсцисс, а потому уравнение параболы имеет вид $y=a(x+n)^2$, где $n=-4$. Так как точка B принадлежит графику $y=a(x-4)^2$, то можно определить постоянную a из уравнения $y=a(5-4)^2$, $a=3$; отсюда уравнение кривой (параболы) такое: $y=3(x-4)^2$.

Относительно графического решения уравнений надо сказать следующее: самый прием графического решения уравнений усваивается учащимися обычно без особых затруднений, но воспринимается этот прием все же формально. Чтобы избежать этого, полезно сопровождать графическое решение уравнения практическими примерами и выяснением смысла ответа; некоторые учителя удачно проводят после аналитического решения уравнения графическое решение того же уравнения.

6. Устные упражнения по алгебре

Устные упражнения по алгебре, как и по другим разделам школьного курса, должны быть направлены на лучшее и наиболее сознательное усвоение учениками изучаемого материала. Поэтому эти упражнения должны быть подобраны так, чтобы развивать мысль учащихся, их инициативу и изобретательность.

За последнее время появились специальные сборники устных упражнений, в частности по алгебре, но это, конечно, не освобождает учителя от творческой работы; учителю при подготовке к уроку приходится самому отбирать упражнения, сообразуясь с условиями своей работы.

Устные упражнения способствуют:

а) усвоению основных понятий, терминов, символов или основных законов, выведенных в текущей теме;

б) развитию логической мысли учащихся и навыков элементарных исследований;

в) созданию и развитию вычислительных навыков, навыков в рациональных тождественных преобразованиях.

г) систематическому повторению пройденного материала.

Учитель не должен обращать эти упражнения в самоцель· не следует в качестве устных упражнений предлагать излишне сложные преобразования, громоздкие выражения. Надо требовать от школьников устных преобразований и устных доказательств в процессе любой работы по алгебре при решении задач, при выводе формул и т. д.

Приведем некоторые примеры устных упражнений.

1. Примеры чтения буквенных выражений и перевода словесного выражения в символическое:

а) $\frac{a+b}{2}$ (полусумма двух чисел);

$(a+b)(a-b)$ (произведение суммы двух чисел на их разность);

$3a^2b$ (утроенное произведение квадрата одного числа на другое).

б) Выразить символически полупроизведение чисел a и b; произведение трех последовательных натуральных чисел.

(Ответ: $n(n+1)\cdot(n+2)$ или $n(n-1)\cdot(n-2)$[1].

в) Найти общее выражение четного числа.

г) Указать порядок действий и прочесть выражения:

$$a+\frac{b+c}{2};\quad a+\frac{b^2}{c};\qquad \frac{m+n+p}{m^2+n^2+p^2};\qquad \frac{m^2-n^2}{m^3+n^3}.$$

2. Упражнения, направленные на осмысливание новой области чисел — рациональных (VI кл.):

а) назвать несколько числовых значений

для c, если $c<0$,
» a, если $a>0$,
» n, если $n>-3$,
» k, если $k<-5$.

б) Какой знак оставить в выражении $a-b\leqq 0$ при $|a|>|b|$,

если $a<0$; $b>0$;
» $a>0$; $b<0$;
» $a\geqslant 0$; $b>0$;
» $a\leqslant 0$; $b<0$?

в) Как изменится произведение $-3x$ при уменьшении x?

г) Каково значение c, если $5c<c$?

д) Найти числовую величину выражения $y=x^3-2x^2+1$ при x, равном -2; -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2.

е) Назвать такое значение b, чтобы $b^2>b$ и в то же время $2b<b$.

ж) Каково наименьшее возможное значение $(-a)^2$; $(a-1)^2$; $(a+3)^2$; $(2a-4)^4$; $(3a-5)^2$ и при каких значениях a оно получается?

Определить допустимые значения x в выражениях:

$$\frac{5}{3-x};\quad \frac{4}{2-3x};\quad \frac{-2}{x^2-9};\quad \frac{3}{(x+1)\cdot(x-1)}.$$

---

[1] n любое натуральное число, большее 2, или $(n-1)\cdot n(n+1)$, где n любое натуральное число, большее 1.

Может ли быть $\frac{m}{3}$ $\left(\text{или } \frac{b}{4}\right)$ больше, равно и меньше 1? Если да, то при каких условиях?

Может ли быть $4a$ равно нулю; больше нуля; меньше нуля?

3. Упражнения, направленные: а) на развитие вычислительных навыков с использованием выведенных формул сокращенных преобразований; б) на использование наиболее рациональных приемов тождественных преобразований; в) на закрепление знаний новых формул.

а) Дополнить недостающий член выражения, чтобы получить квадрат суммы или разности двух чисел (неполный квадрат их):

$$a^2+?+b^2;\ 100x^2+?+9y^2;\ 100m^2+30mn+?;$$

$$1-?+16a^2;\ 1-10x+?;\ ?-40x+16x^2 \text{ и т. п.}$$

б) Вычислить:

$$\left(4-\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(10-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$\left(99-\frac{1}{2}\right)^2$, используя тождество $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a(a+1)+\frac{1}{4}$;

$$47\cdot 53,\ 98\cdot 102;\ 5\tfrac{1}{2}\cdot 4\tfrac{1}{2};\ 10\tfrac{1}{4}\cdot 9\tfrac{3}{4};$$

75^2, 115^2; $85\cdot 86$, используя тождество $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$;

$$a^2-b^2 \text{ при } a=65;\ b=35.$$

в) Найти численное значение выражения:

$$(a^2+b^2)-(a^2-b^2) \text{ при } a=\frac{17}{32};\ b=\frac{16}{51};$$

$$a^2+2ab+b^2 \text{ при } a=24,\ b=16,$$

$$(a^2+2ab+b^2)-(a+b) \text{ при } a=26;\ b=4.$$

г) Упростить:

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{1-a};\ \frac{2}{a-5}-\frac{3}{5-a};$$

$$a+\frac{a-ab}{b};\ \frac{4a}{a^2-1}+\frac{3}{1-a};\ \frac{2}{a-2}+\frac{3a}{4-a^2}.$$

д) Равносильны ли два уравнения

$$x+5=7 \text{ и } 2x-1=3;$$

$$(x-2)(x+3)=0 \text{ и } 2x-2=x-5?$$

Решить уравнение:

$$x(x-4)-2(x-4)=0.$$

Не решая уравнений, сказать, равносильны ли они:

$$\frac{x+3}{x-2}=\frac{1-x}{x-2} \text{ и } x-3=1-x;$$

$$\frac{x+6}{x-3}=\frac{2-x}{x-3} \text{ и } (x+6)(x-3)=(2-x)(x-3).$$

е) Почему система

$$\begin{cases} x+y=5; \\ 2x+2y=12 \end{cases}$$

не имеет решения?

ж) Определить, между какими числами, состоящими из круглых десятков, заключены следующие корни:

$$\sqrt{841};\ \sqrt{1849};\ \sqrt{7225}.$$

Найти приближенное значение корня с точностью до 1, наиболее близкое к истинному:

$$\sqrt{60};\ \sqrt{94};\ \sqrt{150};\ \sqrt{185}.$$

В каком случае при извлечении квадратного корня из дробного числа арифметическое значение корня получится больше подкоренного числа; меньше подкоренного числа?

Не производя вычисления корней, определить, какое из чисел больше:

$$2\sqrt{3} \text{ или } \sqrt{8};\quad 5\sqrt{3} \text{ или } 3\sqrt{5} \text{ и т. п.}$$

Упростить сумму корней $\sqrt{50}+\sqrt{18};\ \sqrt{27}-\sqrt{48}+2\sqrt{3}$.

з) Верно ли разложены многочлены на неразложимые множители?

1) $x^3+x^2=x(x^2+x)$;
2) $x^3-x=x(x^2-1)$;
3) $x^2-1=(-x+1)(-x-1)$.

7. Задачи на доказательство по алгебре

В большинстве задачников по алгебре приводятся упражнения на тождественные преобразования алгебраических выражений и на решение уравнений. Обычно эти упражнения, основанные на применении ранее выведенных формул или свойств уравнений, не требуют от учеников ни особой сообразительности, ни творческих комбинаций. Исключением являются некоторые упражнения на разложение выражений на множители. При хорошем развитии навыков в решении арифметических задач и систематическом решении с учениками уравнений решение задач на составление уравнений не вызывает особых трудностей.

Значительно бо́льшие затруднения возникают у учащихся при решении задач на доказательство и при исследовании некоторых теоретических вопросов. Вместе с тем эти задачи являются весьма ценными для развития логического мышления школьников.

Задачи на доказательство требуют довольно тонких логических рассуждений, сообразительности, умения мобилизовать весь запас теоретических знаний. Они развивают навык в самостоятельном исследовании. Задачи эти можно разбить на два вида:

а) задачи, в которых дается некоторое положение и требуется доказать его справедливость (аналогично заранее сформулированной геометрической теореме);

б) задачи, в которых предлагается некоторая проблема и требуется исследовать ее.

Таблица 1

a	a^3	Знак	a^5
$a<0$			
$\|a\|<1$	a^3	$<$	a^5
$\|a\|=1$	a^3	$=$	a^5
$\|a\|>1$	a^3	$>$	a^5
$a>0$			
$\|a\|<1$	a^3	$>$	a^5
$\|a\|=1$	a^3	$=$	a^5
$\|a\|>1$	a^3	$<$	a^5
$\|a\|=0$	a^3	$=$	a^5

Примерами первого вида задач могут служить следующие:

1. Разность квадратов последовательных натуральных чисел есть число нечетное.

Решение. $(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1-a^2=2a+1$, где $2a+1$ является общим выражением нечетного числа.

2. Разность квадратов двух последовательных нечетных чисел кратна 8.

Решение. $(2a+1)^2-(2a-1)^2=8a$, то есть кратно 8.

3. Произведение трех последовательных целых чисел кратно 6.

Решение. Запишем предложенное произведение и исследуем выражение $a(a+1)\cdot(a+2)$. Если a число четное и кратно 3, то произведение явно кратно 6; если a четное, но не кратное 3, то либо $(a+2)$, либо $(a+1)$ кратно 3 и все произведение кратно 6.

Рассуждая подобным образом, докажем, что и при нечетных значениях a произведение кратно 6.

Примерами задач второго вида могут быть следующие:

1. Выяснить, что больше: a^3 или a^5. Задача сводится к исследованию, то есть рассмотрению всех возможных значений a. Для этого полезно построить таблицу 1.

2. Определить условие, при котором возможно равенство $ac+bd=ad+bc$, если a, b, c, d отличны от 0.

Решение. $ac+bd-ad-bc=0$; $c(a-b)-d(a-b)=0$; $(a-b)(c-d)=0$, что приводит к следующему: либо $a=b$, либо $c=d$.

3. Найти общий вид чисел, квадраты которых оканчиваются цифрой 9.

Решение. Искомые числа должны оканчиваться 3 или 7. Общий вид первых: $5(2n+1)-2$; общий вид вторых. $5(2n+1)+2$; общий вид всех искомых чисел $5(2n+1)\pm 2$.

4. Какие числа можно прибавить к числителю и знаменателю дроби, не изменяя ее величины?

Решение.

$$\frac{a+p}{b+k}=\frac{a}{b};\ ab+bp=ab+ak;\ ak=bp;$$

$$\frac{p}{k}=\frac{a}{b}=n,\ \text{или}\ p=an,\ k=bn.$$

5. Сравнить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{p}{c}$, если известно, что $\frac{a}{b}=\frac{a+p}{b+c}$.

Как видно, задачи второго вида несколько сложнее задач первого вида, так как в задачах первого вида заранее указано свойство заданных выражений, заранее определена и конечная цель. В задачах же второго вида свойства выражений заранее неизвестны, они должны быть открыты самими учащимися в результате самостоятельного исследования.

Решение задач на доказательство не следует приурочивать к какому-нибудь определенному периоду, тем более не следует выделять для них часть урока, а целесообразнее решать их наряду с другими задачами параллельно изучению соответствующего раздела или темы курса VI—VIII классов. Эти задачи на доказательство в алгебре, так же как задачи на доказательство в геометрии, не завоевали еще в нашей школе должного положения и места в работе, но в последние годы уже заметна общая тенденция к усилению их роли в общей системе решения задач.

§ 4. Введение буквенной символики

Трудность, с которой шестиклассникам приходится столкнуться на первых же уроках алгебры, — это введение буквенной символики.

От учителя требуется создать психологические предпосылки для понимания целесообразности и необходимости введения букв. Следует использовать возможно полнее известный ученикам материал из курса арифметики.

В курсе арифметики было установлено, что арифметические действия можно совершать только над двумя числами, и этот принцип сохраняется во всех областях чисел, изучаемых в школе. В курсе арифметики рассматривались законы арифметических действий; на первых уроках алгебры естественно повторить некоторые из них. После рассмотрения конкретных примеров из области целых и дробных чисел эти законы обобщаются, формулируются и словесная формулировка выражается с помощью символов, то есть переводится на язык алгебры.

Так, например, в результате анализа процессов прибавления к числу суммы и числа к сумме устанавливаются законы и следствия из них, которые выражаются формулами:

$$a+(b+c)=\begin{cases}(a+b)+c\\(a+c)+b\end{cases};\qquad (a+b)+c=\begin{cases}a+(b+c)\\(a+c)+b\end{cases}$$

таким же образом устанавливается для умножения:

$$a\ (b+c)=a\ b+a\cdot c;\ a\ (b\cdot c)=\begin{cases}(a\cdot b)\cdot c\\(a\cdot c)\cdot b\end{cases};$$ и др.

На основе этих законов рассматриваются свойства суммы, произведения и т. д.

Например:

$$43+29+57+31=(43+57)+(29+31),$$

что выразится обобщенной формулой

$$a+b+c+d=(a+b)+(c+d).$$

В курсе арифметики V класса законы арифметических действий сформулированы не только словами, но и приведена запись их при помощи букв.

Рассмотрение этих записей и приводит к тому, что ученики начинают понимать, как при помощи букв можно обобщить математический закон или свойство, подразумевая под буквами любые числа, записи эти позволяют заменить длинные словесные формулировки коротким выражением.

Затем целесообразно рассмотреть решение задачи с введением букв.

В V классе учащиеся, как правило, уже знакомятся с употреблением буквы для обозначения неизвестной величины при решении простейших задач, приводящих к уравнениям.

Рассмотрим такую задачу:

«В трех кусках веревки 56 *м*, второй кусок на 2 *м* более первого, а третий на 4 *м* более второго. Определить длину каждого куска».

По условию задачи можно составить такую графическую запись условия.

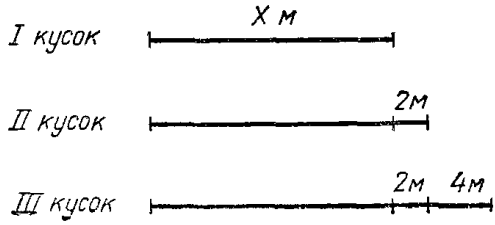


Рис. 4

Из этой записи видно, что

длина I куска x м;
» II » $(x+2)$ м;
» III » $[(x+2)+4]$ м.

Длина I куска+длина II куска+длина III куска=56, то есть

$$x+(x+2)+(x+2)+4=56;\ 3x+8=56.$$

Выясняется смысл выражения $3x$ — это утроенная длина I куска. Нетрудно понять, что эта длина равна $56-8=48$ (м), а длина одного I куска (x) равна $48:3=16$ (м), длина II куска $(x+2)$ равна $16+2=18$ (м) и третьего $(x+6)$ равна

$$16+6=22\ (м).$$

Решение задач с введением буквы вместо неизвестной величины рекомендуется практиковать даже с IV класса, соблюдая при этом необходимый педагогический такт, постоянно вскрывая реальный смысл выражения, содержащего букву, и ни в коем случае не заменяя рассуждения формальными преобразованиями. Следует использовать и решение задач, связанных с нахождением неизвестного числа или с вычислением числа по заданной его части, что приводило в V классе к таким записям:

а) Найти $\frac{3}{4}$ от 20.

Решение. $x=20\cdot\frac{3}{4}=\frac{20\cdot3}{4}=15.$

б) Найти неизвестное число, если $\frac{4}{7}$ его равны 16.

Решение. $\frac{4}{7}\cdot x=16;\quad x=16:\frac{4}{7}=\frac{16\cdot7}{4}=28.$

Введение буквы вместо неизвестного (искомого) числа при решении простейших задач покажет ученикам, что пользоваться буквами в этом случае удобно.

Дальше следует решить ряд аналогичных по условию задач, которые приводят к одной и той же формуле решения задачи

Задача. Определить площадь поверхности куба (сумму площадей всех граней куба) с ребром длиной в 2 *дм*, в 5 *дм*.

Решение. 1. Площадь одной грани равна $2\cdot2=4$ (*кв. дм*);

» всех граней » $4\cdot6=24$ (*кв. дм*).

2. » одной грани » $5\cdot5=25$ (*кв. дм*);

» всех граней » $25\ 6=150$ (*кв. дм*).

Замечаем, что для определения площади поверхности куба каждый раз определяется площадь одной грани — квадрата — и полученное число множится на 6 (число граней). Выясняем, что эту

мысль можно и удобно записать короче, если длину ребра куба обозначить буквой a. Тогда площадь каждой грани выражается так: $a \cdot a = a^2$, а площадь всей поверхности куба $aa \cdot 6 = a^2 \cdot 6$, или, коротко обозначая эту площадь буквой S, можем записать: $S = 6a^2$.

Подобным образом можно разобрать задачу определения площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Учащиеся в V классе решали подобные задачи, в VI классе нетрудно разобрать общее выражение для площади:

$$S = 2aH + 2bH + 2ab,$$

где a, b, H — ребра параллелепипеда.

Следует решить несколько задач, приводящих и к более сложной формуле решения, например:

1. Смешано 5 *кг* конфет по 7,6 руб. и 3 *кг* по 6 руб. Найти цену 1 *кг* смеси.

Решение. $(7{,}6 \cdot 5 + 6 \cdot 3) : (5 + 3) = (38 + 18) : 8 = 56 : 8 = 7$ (руб.).

2. Смешано 18 *кг* печенья по 1,5 руб. и 10 *кг* по 1,78 руб. Найти цену 1 *кг* смеси.

Решение. $(1{,}5 \cdot 18 + 1{,}78 \cdot 10) : (18 + 10) = (27 + 17{,}8) : 28 = 44{,}8 : 28 = 1{,}6$ (руб.).

Разбирая с учениками план решения такого вида задач, подмечаем общее, что для определения цены 1 *кг* смеси (будь то конфеты, печенье или другой продукт) следует поступать так:

1. Определить стоимость продукта I сорта;
2. » » » II » ;
3. » » всей смеси;
4. » общий вес смеси;
5. » цену 1 *кг* смеси.

Таким образом, если обозначить количество продукта I сорта буквой a, количество продукта II сорта буквой b, цену единицы количества продукта I сорта буквой c, цену единицы количества продукта II сорта буквой d и цену единицы количества смеси буквой x, то

$$x = (a \cdot c + d \cdot b) : (a + b) = \frac{ac + bd}{a + b}.$$

Пользуясь этой формулой, легко решить любую задачу с аналогичным условием, каковы бы ни были числа, которые будут подставлены вместо букв.

Полезно познакомить учеников с некоторыми простейшими эмпирическими формулами (формулами, составленными по опытным данным).

Примеры: а) Врачи установили, что для человека в возрасте до 18 лет продолжительность сна зависит от возраста, нормальное

число часов ежедневного сна подсчитывается формулой $t=8+\frac{18-c}{2}$, где c — возраст в годах, а t — число часов сна.

б) Для определения нормального веса (в килограммах) взрослого человека врачи пользуются формулой $P=H-100$, где H — рост человека в сантиметрах.

Живой вес коровы определяется по формуле $P=\frac{lk}{50}$, где l — длина спины коровы от холки до хвоста в сантиметрах, k — обхват около лопаток в сантиметрах.

В качестве упражнений можно предложить учащимся, пользуясь формулами, произвести вычисления одной из величин при различных значениях другой.

Рассмотренные примеры приводят к следующему выводу: известные числа обычно обозначаются цифрами, а числа, которые во время рассуждений остаются неопределенными, обозначаются в алгебре буквами.

Ознакомление учащихся с буквенной символикой следует сопровождать рядом упражнений.

Примеры.

1. Записать периметр квадрата со стороной a; запись может быть такова: $a+a+a+a$ или $4a$; выясняется, что в этом случае буква a может быть заменена любым целым или дробным числом.

2. Рассматривая числа 10, 20, ... 60, 70, 80, 90, обратить внимание учащихся на возможность записать эти числа так: $10=1\cdot 10$, $20=2\cdot 10$, ... $60=6\cdot 10$, $70=7\cdot 10$ ...; число, состоящее только из десятков, может быть записано в виде произведения числа десятков на число 10, в общем виде $10\cdot a$ (где a — число десятков). Сразу же следует выяснить, какое значение может принимать буква a: $a=1\,(2, 3, \ldots 8, 9)$, то есть a — целое и $0<a<10$.

3. Так же как и в предыдущем случае, изучается структура двузначного числа (например: $37=30+7=3\cdot 10+7$; $59=5\cdot 10-9$), в общем виде $10a+b$, при этом a и b могут быть только числами натуральными, от 1 до 9, а b может быть равно и 0.

4. Рассматривается ряд четных чисел 6, 14, 30, 48 и др., повторяется определение четного числа (кратно числу 2, то есть содержит множитель 2), выясняется возможность записать числа так: $6=2\cdot 3$, $14=2\cdot 7$, $30=2\cdot 15$, $48=2\cdot 24$; делается вывод: четное число может быть записано в общем виде так: $2p$, где p — любое целое число.

Ученики V класса уже знают, что разность $a-b$ имеет смысл только при условии $a\geqslant b$.

На основании разобранных примеров следует разъяснить учащимся, что буквой можно обозначить любое число и что буквы в алгебре выражают числа, но в отдельных случаях смысл выражения налагает известные ограничения на числовое значение буквы. Рассуждения, связанные с введением ограничений на значения букв

в выражении, представляют собой элементы исследования. Подобные элементы исследования должны применяться на протяжении всего последующего курса.

Метод рассуждений знакомит учащихся с индукцией, приемами обобщений. В процессе разбора приведенного материала надо добиться от учащихся умения прочитать словами символическую запись и, наоборот, перевести словесное выражение в символическую запись. Однако не рекомендуем проводить очень много специальных упражнений в таких «переводах», так как они излишне утомляют школьников. В результате изучения темы ученики должны усвоить, что буквенная символика была создана в стремлении найти способ краткой записи математических рассуждений и законов.

В учебниках обычно приводится определение алгебраического выражения. Так, в «Алгебре» Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского дается такое определение: «Выражение, в котором указано, какие действия и в каком порядке надо произвести над данными числами, называется алгебраическим выражением. Числа эти могут быть обозначены буквами или при помощи цифр». Похожее на это определение встречается в учебнике алгебры П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, в учебнике И. А. Гибша. Несколько иной подход встречается в алгебре В. Л. Гончарова: «Записи, составленные из математических знаков, чисел, букв и знаков действий, а также знаков равенств или неравенств, носят названия формул»— и далее: «формулы, которые составлены из чисел, букв и знаков действий и не содержат знаков равенств или неравенств, называются также алгебраическими (буквенными) выражениями».

Мы согласны с В. В. Репьевым, что нет необходимости давать исчерпывающие определения алгебраического выражения и формулы; постепенно ученики привыкают к этим терминам и правильно ими пользуются.

§ 5. Степень числа и коэффициент

Во многих учебниках алгебры предусмотрено введение понятия о степени числа и коэффициенте в начале изучения алгебраических выражений. Современные программы относят понятие о степени ко второй теме (рациональные числа), понятие о коэффициенте — к третьей теме (в связи с приведением подобных членов). Мы считаем, что оба эти понятия целесообразно ввести раньше. Ученики встречаются с этими понятиями еще в V классе при изучении в курсе арифметики геометрических фигур: приходится находить периметр ($4a$) и площадь (a^2) квадрата, объем куба (a^3), площадь поверхности куба ($6a^2$) и другие величины.

Многие учителя знакомят пятиклассников с более удобной записью произведения одинаковых множителей в виде степени, при этом они не вводят понятия о степени и не дают определения. Знакомство учеников с понятиями степени и коэффициента в нача-

ле изучения алгебры позволяет расширить круг упражнений на вычисление числовых значений алгебраических выражений (материал первой темы программы).

Подводя учеников к понятию «степень числа», следует использовать знания учащихся из V класса, восстановить в их памяти выражения: a^2, b^3, сокращенные «удобные» записи: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $3 \cdot 3 = 3^2$ и др. Остается объяснить, что во всех рассмотренных примерах имеют место частные случаи — произведения одинаковых множителей; в этих случаях произведение получает новое название — степени числа, сомножитель называется основанием степени, а число множителей — показателем степени. В случае, когда основание и показатель степени являются определенными числами, степень может быть вычислена Так, например, 3^4 (четвертая степень числа 3) равно 81. В случае буквенного основания степени результат может быть только обозначен — x^4. И при начальном введении понятия о степени, и в дальнейшем в курсе VI класса следует обращать внимание учащихся на то, что основанием степени может быть любое число, а показателем степени только натуральное число. Особо надо заметить, что первой степенью числа называется само число: $4^1 = 4$, $a^1 = a$.

Понятие о степени надо закрепить упражнениями.

1. Вычислить: 2^5; 3^4; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $(0{,}2)^3$.

2. Вычислить объем куба, если ребро его равняется 4 *см*, 0,5 *см*.

3. Записать общей формулой, а затем вычислить общую площадь двух комнат, имеющих форму квадратов, если длина одной из них 3,5 *см*, а другой 4,2 *м*.

4. Записать в виде степени числа 10 следующие числа: 1000, 100 000, 400.

5. Записать в виде степени произведения: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; $x \cdot x \cdot x \cdot x$; $c \cdot c \cdot c \cdot y \cdot y$.

6. Среднее расстояние Земли от Солнца 150 000 000 *км*, записать это число в виде степени числа 10.

7. Среднее расстояние Луны от Земли равняется $3{,}6 \cdot 10^5$ *км*; записать это число без степени.

Подобных упражнений много в задачнике А. Н. Барсукова (I часть).

На первом этапе знакомства с понятием коэффициента достаточно сказать, что в выражениях, уже знакомых учащимся, например $4a$, $6a^2$, $2(a+b)$, $2p$ и других, числовой множитель, стоящий перед буквенной частью выражения, называется числовым коэффициентом. Надо на примерах показать, что числовой коэффициент может быть и дробным числом ($0{,}5a^2$), и равным единице (ab), причем в последнем случае единица не пишется

Понятие о коэффициенте надо тоже закрепить несколькими упражнениями.

Примеры: 1. Записать, чему равен периметр заштрихованной части квадрата, площадь этой же части (рис. 5).

2. Чему равен периметр фигуры (рис. 6)?

3. Упростить выражения: $x+x+x$; $ab+ab+ab+ab$; $x\cdot x\cdot x+y\cdot y\cdot y\cdot y$; $a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a+b\cdot b\cdot b+b\ b\cdot b$.

4. Написать подробно, не употребляя коэффициента, отличного от единицы, следующие выражения: $4xy$; $2ab+3c$; $3x^2+2y^3$.

Мы полагаем, что много однообразных упражнений, какие приведены в последних двух пунктах, давать не следует, но несколько упражнений следует выполнить.

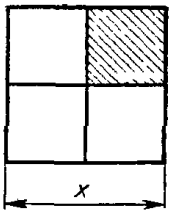


Рис. 5

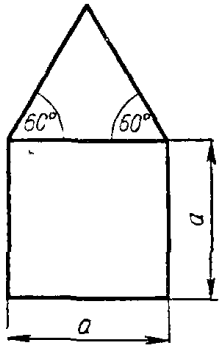


Рис. 6

На первых порах учащиеся часто путают значение коэффициента и показателя степени, часто находят не степень, а произведение основания на показатель степени. Для предупреждения такого рода ошибок полезно проделать несколько упражнений следующего вида:

1. Найти: 3^2 и $3\cdot 2$; 2^4 и $2\cdot 4$, сравнить полученные результаты в каждом случае.

2. Найти значения выражений a^2 и $2a$, если $a=1$; $a=3$; $a=0{,}5$.

3. При каком значении a выражения a^3 и $3a$ имеют равные значения?

§ 6. Числовое значение буквенного выражения

К нахождению числового значения буквенного выражения следует обращаться на протяжении всего курса алгебры в восьмилетней школе, в частности после изучения каждого вида тождественных преобразований. Следует обращать внимание учеников на функциональную зависимость значения выражения от значений букв, входящих в выражение, и на необходимость в каждом случае учитывать область допустимых значений букв: или по смыслу конкретной задачи, или по формально-логическим признакам, осо-

бенно это надо иметь в виду после ознакомления учащихся с отрицательными числами.

При определении числового значения знакомых учащимся несложных выражений: $4a$; $2a+2b$; ab; $6a^2$ и других при различных значениях букв устанавливается, что значение выражения изменяется (является переменной величиной); при изменении значения одной буквы числовое значение всего выражения зависит от значения только этой буквы, при изменении значений двух букв — от значений обеих букв. Таким образом, у учащихся будут складываться самые начальные представления о функции от одной переменной, от двух переменных.

В упражнениях на нахождение числового значения буквенного выражения, конечно, не надо вводить функциональную терминологию, следует только фиксировать внимание учащихся на функциональной стороне операции. Упражнения с вычислением значения выражений следует начинать с несложных, знакомых учащимся выражений, сначала содержащих одну букву, а затем уже и незнакомых: $3b$, $2a^3$, $x+3{,}4x^2+5$; через некоторое время следует усложнить выражения введением в них нескольких букв: $2x^2+y$; $3x^2+2y^2$; $9x^2-6xy+y^2$ и т. д.

Полезно оформлять вычисления при различных значениях букв в таблицы. Так, например, поучительно составить таблицу изменения периметра и площади прямоугольника с основанием 3 *дм* при изменении высоты прямоугольника на 0,5 *дм*, начиная с 1 *дм*. Сначала находим выражение для периметра $2a+2b$, затем для площади ab, получим таблицу 2. Пример более сложных вычислений дан в таблице 3.

Таблица 2

a	b	$2a+2b$ (линейных единиц)	ab (кв единиц)
3	1	8	3
3	1,5	9	4,5
3	2	10	6
3	2,5	11	7,5
...	...	...	...

Таблица 3

x	y	$3x^2+2y^3$	x	y	$3x^2+2y^3$
—2	0	12	3	1	29
—1	1	5	8	—2	176
0	2	16	3	—1	25
1	3	57	5	2	91
...	...	...	...	...	...

В дальнейшем надо обращать внимание учащихся на то, что при нахождении числового значения алгебраического выражения следует предварительно упрощать его, чтобы не производить громоздких вычислений. Эти преобразования будут совершаться на основании математических законов. Так, например, при нахождении числового значения выражения $ax+ay$ при $a=97$, $x=49$, $y=51$ рациональнее преобразовать заданное выражение в такое: $a(x+y)$. Рациональность такого преобразования на первых порах надо показывать подсчетом операций в первом и во втором случаях.

ГЛАВА II

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 7. Понятие о рациональном числе

Раздел о положительных и отрицательных числах является одним из самых трудных в курсе алгебры средней школы.

До введения отрицательных чисел ученики были знакомы с целыми и дробными положительными числами и с нулем, поэтому никакой надобности в термине «положительные числа» не ощущалось. После того как школьники познакомятся с числами другого вида (отрицательными), приходится вводить новое название «положительные и отрицательные числа».

Для обозначения совокупности всех этих чисел в методической литературе встречаются два названия: «рациональные числа» и «относительные числа». Второе название встречалось в учебнике алгебры А. П. Киселева: «Числа положительные, отрицательные и нуль называются вообще относительными числами в отличие от чисел обыкновенных, или арифметических, которые не имеют перед собой никакого знака» (стр. 15, издание 1949 г.). Некоторые методисты и до сих пор употребляют это название[1]. В настоящее время термин «относительные числа» встречается все реже и реже. В учебнике алгебры А. Н. Барсукова введено название «рациональные числа».

Введение отрицательных чисел можно рассматривать как присоединение новых чисел к уже известным числам (натуральным и дробным), которые при этом получают название положительных чисел.

---

[1] В Германии, Франции и некоторых других зарубежных странах сохранилось название «относительные числа».

Преподаватель должен помнить, что при расширении понятия числа мы вводим новые условия (правила) для действий, которые не могут быть доказаны.

Изложение главы о положительных и отрицательных числах в шестом классе может быть построено различными способами.

I. Предварительно необходимо напомнить шестиклассникам некоторые свойства чисел, ранее встречавшихся в арифметике, то есть целых и дробных чисел. Следует указать, что целые числа употреблялись для счета предметов, при измерении величин (расстояний, площадей, объемов, промежутков времени и т. д.). Однако оказалось, что одних целых чисел недостаточно, и пришлось ввести дробные числа.

Далее следует напомнить учащимся, как изображаются целые числа на луче. Для этого возьмем луч (полупрямую), направленный от начала (0) вправо. Приняв некоторый отрезок за единицу длины, отложим его на луче от 0 один, два, три и т. д. раз. Полученным точкам будут соответствовать числа 1, 2, 3 и т. д. Числу нуль соответствует сама начальная точка 0 (начало). Таким образом, всякому целому числу будет соответствовать некоторая вполне определенная точка на луче. Чтобы отметить на луче точку, соответствующую данной дроби, например $\frac{3}{4}$, необходимо разделить единицу длины (единицу масштаба) на 4 равные части и таких частей отложить от начальной точки три. Такой луч с нанесенными числами называют числовым лучом.

Полезно с учениками проделать упражнения следующего рода.

1. Найти точку, находящуюся на 2, 3, 5 масштабных единиц от точки 0 (начала).

2. Найти точку, находящуюся на 2, 3 единицы вправо (влево) от точки A, которой соответствует число 5.

После нескольких таких примеров ученикам следует указать, что если точка на числовом луче находится вправо от данной точки, то ей будет соответствовать большее число, а если влево — то меньшее число.

II. Как мы уже сказали, существует несколько методических приемов изложения раздела о положительных и отрицательных числах.

П. С. Александров и А. Н. Колмогоров в своем курсе алгебры (Учпедгиз, 1940) исходят из изменения величин. Так как данный учебник является библиографической редкостью, то мы на этом изложении остановимся более подробно.

«Величины могут изменяться. Изменения величин могут быть двух сортов: величины могут увеличиваться и могут уменьшаться.

Первый пример. Будем высоту, на которую поднялся стратостат, вылетевший в 6 часов, измерять в метрах. Допустим, что эта высота изменялась так:

Момент времени	Высота в метрах
6 часов	0
9 »	12 000
12 »	20 000
13 »	22 000
14 »	22 000
15 »	20 000
18 »	0

При этом высота в 0 *м*, указанная для 6 часов, обозначает, что в момент вылета стратостат еще совсем не успел подняться. Будем теперь подсчитывать изменения высоты за разные промежутки времени.

Момент времени	Изменения высоты в метрах
с 6 часов до 9 часов	увеличение на 12 000
с 9 часов до 12 часов	увеличение на 8000
с 12 часов до 13 часов	увеличение на 2000
с 13 часов до 14 часов	высота не изменилась
с 14 часов до 15 часов	уменьшилась на 2000
с 15 часов до 18 часов	уменьшилась на 20 000

Мы видим, что с 12 часов до 13 часов высота изменилась на 2000 *м*, с 14 часов до 15 часов высота изменилась тоже на 2000 *м*. Но в первом случае изменение состояло в увеличении на 2000 *м*, а во втором случае в уменьшении на 2000 *м*. Для обозначения этих двух различных изменений у нас имеется одно единственное число 2000. Это различие приходится выражать словами, говоря в одном случае «увеличение на 2000 *м*», а в другом случае «уменьшение на 2000 *м*». Мы видим, что известных из арифметики положительных чисел недостаточно, чтобы выражать изменения величин без дополнительных приписок: «увеличение», «уменьшение».

Существует другой, гораздо более удобный, способ выражения изменения величины. По этому способу обычные положительные числа употребляются только для выражения увеличений. Для выражения же уменьшений употребляются особые новые числа, называемые отрицательными. Например, увеличение высоты на 2000 *м* выражается просто числом 2000 без приписки «увеличение». Уменьшение же высоты на 2000 *м* выражается новым числом, которое называется минус две тысячи и пишется —2000.

Точно так же уменьшение на 1, $1\frac{1}{2}$ или на 1000 единиц измерения выражается числами: —1; $-1\frac{1}{2}$; —1000.

Все эти числа, как уже сказано, называются отрицательными. Число нуль будет употребляться для выражения отсутствия как увеличения, так и уменьшения».

Затем предлагается изменения высоты стратостата записать при помощи новых чисел, а именно:

12 000; 8 000; 2 000; 0; —2 000; —20 000.

У П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова приводится и другой пример. Пусть в сберегательной книжке сделаны записи.

Указывается, что приход обозначает увеличение вклада, расход — уменьшение вклада. Увеличение вклада будем обозначать положительным числом, уменьшение вклада — отрицательным числом. После этого предлагается записать результаты операций при помощи положительных и отрицательных чисел.

Таблица 4

Номер операции	Дата	Приход	Расход
1	2 октября	28,5	
2	5 октября		20
3	18 октября	45	
4	20 октября		35

Затем делается следующее заключение: «Положительные числа служат для выражения увеличений величин. Для выражения уменьшения величин вводятся новые отрицательные числа. При этом каждому положительному числу a соответствует свое особое отрицательное число $-a$, выражающее уменьшение на a единиц измерения».

Несколько позднее дается следующее определение:

1) целое число нуль,

2) положительные целые и дробные числа,

3) отрицательные целые и дробные числа —

все вместе называются *рациональными числами.*

Такой же подход к рациональным числам мы встречаем и у В. В. Репьева («Очерки по методике преподавания алгебры», Горьковское книжное издательство, 1958).

III. Некоторые методисты предлагают несколько иной подход к положительным и отрицательным числам, исходя из общей формулы для решения задачи. Например, составить формулу для задачи:

1. Пароход прошел a *км* вверх по реке (против течения), а затем b *км* вниз. На каком расстоянии от первоначального места и в какую сторону от него он находится?

$$a=80,\ b=25;\ a=50,\ b=90.$$

2. Два велосипедиста прибыли на станцию в один и тот же день. Один прибыл в a часов, другой в b часов. На сколько часов первый из них прибыл позднее второго?

$$a=9,\ b=7;\ a=8,\ b=11.$$

3. Термометр показывал утром m градусов, а в полдень n градусов. На сколько градусов изменилось показание термометра за это время?

$$m=6,\ n=13;\ m=10,\ n=8;\ m=7,\ n=7.$$

4. В школу поступило m учеников, а выбыло из нее n учеников. На сколько человек изменилось число учеников?

$$m=90,\ n=25;\ m=45,\ n=52.$$

После решения нескольких подобного рода задач учащиеся убеждаются в том, что решение одной и той же задачи не может быть выражено одной формулой, если пользоваться только положительными числами. Поэтому возникает необходимость в создании новых чисел и т. д.

На наш взгляд, такой подход не совсем удачен. Целесообразнее доказать справедливость формулы для всех случаев, после того как понятие о положительных и отрицательных числах и действий над ними уже дано.

Некоторые методисты рекомендуют начать изучение положительных и отрицательных чисел с знакомства с величинами, которые могут иметь противоположный смысл, и с величинами, не обладающими этим свойством. Например, когда говорится, что вес тела равен 12 *кГ*, число учеников в школе равняется 45, площадь фигуры равна 10 *см*^{2}, объем тела равен 15 *см*^{3}, то никаких недоразумений не возникает. Далее следует остановиться на направленных величинах. Учащимся предлагается решить следующую задачу.

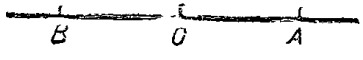


Рис. 7

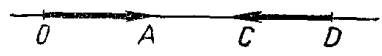


Рис. 8

«Некоторая точка M движется от точки O. Через некоторое время точка M находится на расстоянии 5 *см* от точки O. Где будет находиться точка M?» Ученики укажут, что точка M может находиться в точке A, если она движется вправо, и в точке B, если она движется влево. Возникает вопрос, как выразить каждое из этих перемещений числом.

Будем к числу, указывающему размер (длину) перемещения, присоединять значок $п$ или $л$, указывающий направление этого перемещения:

$$OA=п\ 5\ см;$$
$$OB=л\ 5\ см.$$

В арифметике при решении задач на движение мы имели

дело с величиной, которая называлась расстоянием, пройденным точкой (движущимся телом) при ее (его) движении; расстояние было величиной, которая имела только размер и выражалась «арифметическим числом». Когда же рассматривается движение не только вправо, но и влево, то перемещение имеет не только размер (длину), но и направление и уже выражается некоторым новым числом со знаком *п* или *л*.

Каждое перемещение точки M удобно изображать стрелкой, началом которой служит та точка, с которой совпадала точка M в начале своего перемещения, а концом — та точка, с которой совпадала точка M в конце своего движения (рис. 8). Если точка M вначале находилась в точке D, а в конце перемещения в точке C, то перемещение будет изображаться стрелкой DC.

После того как с учениками разобраны примеры величин, допускающих противоположные смыслы, как-то: тепло и холод, наличие и долг, расстояние от данной точки вправо и влево и т. д., следует перейти к записи таких величин. Сперва можно разрешить записи такого рода· 3° тепла, 5° холода, 10 рублей наличными, 8 рублей долга и т. п.

Затем предложить ученикам сокращенную запись таких выражений без слов при помощи знаков. Следует установить условие, что если значениям одной величины, допускающей два противоположных толкования, будут соответствовать положительные числа, то противоположные им значения будут выражены отрицательными числами. Так, например, показания термометра выше нуля будем обозначать числом со знаком «+», а показания термометра ниже нуля — числом со знаком «—» (отрицательные числа). Наличие обыкновенно принято обозначать положительными числами, а недостачу, долг — отрицательными числами. Заметим, что в каждом частном случае условливаются, какие значения величины, допускающей два противоположных смысла, считать положительными и какие значения отрицательными. Здесь необходимо обратить внимание на 0. При изучении величины, допускающей только один смысл, 0 указывает на отсутствие величины, например: если рассматривать площадь квадрата со стороной a, то при $a=0$ в сущности не имеется квадрата. Если же рассматривать величину, допускающую противоположные значения, то 0 есть начало отсчета, причем начало отсчета можно принимать произвольно.

Возникает вопрос, как записывать положительные и отрицательные числа. Для учеников трудность заключается в том, что знак числа и знак действия совпадают. Чтобы избежать этого затруднения, некоторые методисты предлагают применять вначале следующую запись положительных и отрицательных чисел: $\overset{+}{3}$, $\overset{-}{3}$, или $5_{п}$

и 3_0, или (+5) и (—3). Последняя запись является наиболее удобной. Через короткий срок скобки можно не писать и ввести обычный способ записи рациональных чисел.

После этого следует снова вернуться к числовой оси. Изложение может быть примерно следующим.

Представим себе, что на числовом луче с началом в точке 0 вправо, как обычно, отложены точки, соответствующие числам натурального ряда. Продолжим луч в противоположную сторону влево, тогда получим прямую линию. От точки 0 влево отложим отрезки, равные 1; 2; 3 и т. д. единицам масштаба, и отметим концы отрезков числами —1; —2; —3 и т. д. Таким же образом можно поступить и с дробными числами, например, отложив отрезок длиной $\frac{3}{4}$ влево от точки 0, мы получим точку (конец отрезка), которой соответствует число $-\frac{3}{4}$.

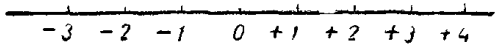


Рис. 9

После нескольких упражнений ученикам станет ясным следующее положение: всякому рациональному числу соответствует на числовой оси вполне определенная точка. В VI классе преждевременно говорить о том, что не всякой точке на числовой оси соответствует рациональное число.

Желательно ввести понятие о координатах возможно раньше, тем более что это вполне доступно шестиклассникам. Понятие о координатах и координатной сетке дается в учебнике алгебры проф. В. Л. Гончарова («Начальная алгебра», изд. АПН РСФСР, 1955, стр. 77 и 80) и в учебнике Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского («Алгебра», Физматгиз, 1960, стр. 73). Мы думаем, что ученики должны знать, что всякое рациональное число, выражающее расстояние какой-либо точки M на числовой оси от начала координат, то есть число, изображенное отрезком OM вместе со знаком направления, называется абсциссой точки M. Далее, если дана какая-нибудь точка M на числовой оси, то это значит, что задана абсцисса, и найти точку M на числовой оси — значит найти ее абсциссу (мы здесь говорим только о точках, которым соответствуют рациональные числа).

Следует остановиться на точках, симметричных друг другу. С учащимися надо проделать следующие упражнения.

Найти точку, симметричную относительно начала координат

точке $+3$; -5; $+1\frac{1}{2}$; $-0{,}2$ и т. д., и построить эту точку на числовой оси.

Необходимо указать, что само начало симметрично самому себе, то есть точка 0 совпадает с точкой 0.

Затем следует дать определение: если две точки симметричны относительно начала 0, то соответствующие им числа (абсциссы) называются взаимно противоположными числами. Необходимо следить, чтобы ученики не говорили «обратные числа» вместо противоположные. Полезны упражнения следующего рода:

1. Если a положительное число, то положительным или отрицательным будет число $-a$?

2. Положительное или отрицательное число $-a$?

3. Если a равно 0, то чему равняется $-a$?

Следует сказать, что число 0 не считается ни положительным, ни отрицательным числом: число 0 есть число особого рода.

Далее необходимо перейти к выяснению понятия об абсолютной величине рационального числа. Неудачным является определение абсолютной величины как числа без знака. Поэтому можно рекомендовать определение, встречающееся в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова (стр. 37): «Абсолютной величиной положительного числа называется само это число, абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему положительное число, абсолютной величиной числа 0 называется само число 0».

Ученикам нужно показать, как обозначают абсолютную величину, то есть знак $|a|$, и решить следующие задачи:

1. Найти абсолютную величину чисел $(+5)$; (-3); $(-0{,}1)$ и т. д.

2. Найти точки, которым соответствуют числа, имеющие абсолютную величину 5; 3 и т. д. (Учащиеся должны отметить две точки для каждого числа.)

Ученики должны знать, что взаимно противоположные числа имеют одинаковую абсолютную величину, то есть $|a|=|-a|$, и, наоборот, если абсолютные величины двух чисел равны, то эти числа либо равны, либо противоположны.

Надо указать, что абсолютная величина числа, отличающегося от нуля, равняется длине отрезка, образованного началом 0 и точкой, соответствующей данному числу. Абсолютная величина числа, очевидно, не может быть отрицательной: она равна 0 лишь в том единственном случае, когда само число равно 0.

Затем учитель остановится на понятиях «больше» и «меньше» для рациональных чисел, что у школьников не вызывает больших затруднений.

Из предыдущего известно, что относительно двух неравных положительных чисел a и b можно сказать: если $a>b$ ($a<b$), то точка, соответствующая числу a, на числовом луче расположена правее (левее), чем точка, соответствующая числу b. Это же правило можно распространить (по определению) и на всю числовую ось в применении к положительным и отрицательным числам и нулю.

Таким образом устанавливается, что всякое отрицательное число меньше всякого положительного числа, всякое положительное число больше нуля, всякое отрицательное число меньше нуля. Из двух положительных чисел то больше, которое имеет бо́льшую абсолютную величину, а из двух отрицательных чисел то больше, которое имеет меньшую абсолютную величину.

В последнее время все чаще и чаще в учебниках дается понятие о направленных величинах и о векторах: «Отрезок на прямой линии, для которого задана не только длина, но и направление, называется направленным отрезком или вектором» (Д. К. Фаддеев и И. С Соминский, Алгебра, Физматгиз, 1961, стр 61).

Хотя понятие о векторе воспринимается учениками VI класса с большим трудом, однако если бы удалось преодолеть все затруднения, связанные с введением этого понятия, то многие вопросы элементарной алгебры, геометрии и тригонометрии, не говоря уже о физике, можно было бы изложить значительно проще

Нам кажется, что понятие о векторе следует связать с учением о силах. Под воздействием силы тело перемещается по прямой OX в том или ином направлении в зависимости от направления силы (рис. 10).

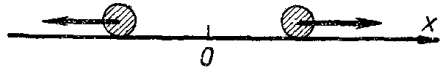


Рис 10

Сказанное следует пояснить рядом примеров из физики и техники. Учащимся необходимо указать, что:

1) у вектора следует различать начало и конец, так что две точки, ограничивающие вектор, не равноправны;

2) вектор обозначают двумя буквами, соответствующими его началу и концу, при этом буква, обозначающая начало, ставится впереди

Обозначение вектора одной буквой со стрелкой $\vec{a}$, или буквой **a**, напечатанной жирным шрифтом, в VI классе преждевременно.

Каждый вектор, расположенный на направленной прямой, характеризуется длиной и направлением. Длиной вектора называется длина отрезка, соединяющего начало и конец вектора, а направление зависит от того, совпадает ли направление вектора с направлением оси или противоположно ее направлению. В первом случае перед длиной вектора ставится знак «+», а во втором случае знак «—». Заметим, что это равносильно умножению длины вектора в первом случае на +1, во втором случае на —1. На этом не следует фиксировать внимание школьников.

Ученики должны уметь находить длину и направление вектора, например вектора AB, CD и т. д. (рис. 12).

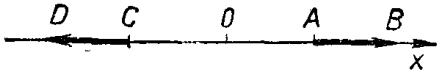


Рис 11

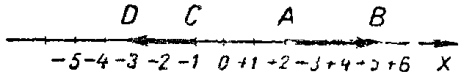


Рис. 12

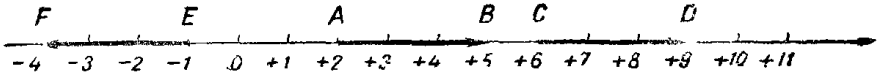


Рис. 13

Полезно предложить учащимся следующие упражнения:

1. Вектор, имеющий длину 3, приложен в точке A (+2) и направлен по оси. Построить вектор.

2. Вектор, длина которого равна 4, приложен в точке C (—1), направление вектора противоположно направлению оси. Построить вектор (рис. 12).

Необходимо дать определение равенства двух векторов: два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление, например (рис. 13): $AB=CD$, но $EF\neq AB$, так как векторы AB и EF имеют одинаковую длину, но направления их различны. После этого следует указать, что вектор можно передвигать вдоль прямой, не меняя его направления. Отсюда следует, что всякий вектор можно переместить так, чтобы его начало совпадало с началом координат (с точкой 0).

Мы видим, что концу каждого вектора, у которого начало совпадает с началом координат, соответствует некоторое вполне определенное рациональное число, абсолютная величина которого равна длине вектора, а знак «+» или «—» зависит от того, направлен ли вектор по оси OX или в противоположную сторону.

Обратное утверждение также справедливо: каждому рациональному числу соответствует некоторый вполне определенный вектор, начало которого совпадает с началом координат, длина вектора равна абсолютной величине числа, знак «+» или «—» показывает, совпадает ли направление вектора с направлением оси OX или противоположно направлению оси OX.

§ 8. Действия над рациональными числами

1. Сложение и вычитание рациональных чисел.

Нельзя рекомендовать формальный подход к правилам сложения и вычитания рациональных чисел. Объяснение правил сложения и вычитания следует начать с решения нескольких содержательных задач, используя числовую ось.

Сложение рациональных чисел обычно начинают со сложения двух положительных чисел. Можно предложить ученикам решить следующие задачи:

1. В кассе наличными было 30 руб., поступило еще 10 руб. Сколько денег в кассе?

2. Термометр утром показывал 5° тепла; днем температура повысилась на 6°. Каково показание термометра?

3. Тело движется вправо. В начале движения тело находилось на расстоянии 6 *км* от точки 0 (начало отсчета), а потом тело передвинулось еще на 9 *см* вправо. На каком расстоянии от точки 0 будет находиться тело?

Затем дается правило сложения двух положительных чисел. Если пользоваться числовой осью, то сложение двух положительных чисел может быть сформулировано так: на числовой оси от рассматриваемой точки, которой соответствует число a, следует отложить отрезок длины b и число, соответствующее концу отрезка, будет суммой данных чисел $a+b$. А после этого переходят к сложению положительного и отрицательного чисел. Можно предложить учащимся решить следующие простые задачи:

1. Показание термометра утром было a градусов, а в полдень показание термометра изменилось еще на b градусов. Каково показание термометра в полдень?

$$a=+11,\ b=8;\ a=+11,\ b=-8.$$

2. Показание уровня воды в реке было вчера на a *м* выше ординара (среднего уровня), а сегодня изменилось на b *м*. На сколько метров сегодня уровень воды выше ординара?

$$a=1{,}4,\ b=0{,}3;\ a=1{,}4,\ b=-0{,}3.$$

После этого устанавливается правило сложения положительного и отрицательного чисел.

Сложение двух отрицательных чисел можно также начать с решения задач подобного рода. В задаче 1 можно положить $a=-3$ и $b=-2$ и т. д.; в задаче 2 взять $a=-1{,}4$ и $b=-0{,}3$ и т. д. Затем уже можно дать правило сложения двух рациональных чисел: при сложении двух чисел с одинаковыми знаками их абсолютные величины складываются и сохраняется общий знак; при сложении двух чисел с разными знаками из большей абсолютной величины числа следует вычесть меньшую абсолютную величину числа и поставить тот знак, который стоит при числе с большей абсолютной величиной.

Необходимо указать, что сумма двух противоположных чисел равна 0, а также обратить внимание учеников на случай, когда одно из слагаемых равно 0, и подчеркнуть, что в этом случае сумма равна другому слагаемому.

Законы сложения (переместительный и сочетательный), конечно, доказывать не следует: достаточно, если ученики из ряда примеров увидят, что эти законы справедливы также и для рациональных чисел. Необходимо указать, что, пользуясь законами, можно менять местами слагаемые и объединять их в любые группы. Нужно показать на примерах следующий способ группировки: соединить все положительные слагаемые и отдельно все отрицательные слагаемые, найти эти суммы, затем разность абсолютных величин сумм и поставить знак «+» при этой разности, если абсолютная величина суммы положительных слагаемых больше абсолютной величины суммы отрицательных слагаемых; в противном случае следует поставить знак «—».

Действие вычитания для рациональных чисел можно рассматривать как действие, обратное сложению, то есть вычесть из числа a число b — значит найти такое число c, сумма которого с числом b равняется числу a.

Легко показать, что

$$(+5)-(+3)=(+2),\ \text{ибо}\ (+3)+(+2)=(+5);$$
$$(+5)-(-3)=(+8),\ \text{ибо}\ (-3)+(+8)=(+5);$$
$$(-5)-(+3)=(-8),\ \text{ибо}\ (-8)+(+3)=(-5);$$
$$(-5)-(-3)=(-2),\ \text{ибо}\ (-2)+(-3)=(-5).$$

Но написанные выше равенства равносильны следующим:

$$(+5)+(-3)=(+2),$$
$$(+5)+(+3)=(+8),$$
$$(-5)+(-3)=(-8),$$
$$(-5)+(+3)=(-2).$$

Отсюда следует правило: чтобы вычесть из числа a число b, достаточно прибавить к числу a число, противоположное числу b. На нескольких конкретных примерах и задачах иллюстрируется применение данного правила.

Необходимо установить, что действие вычитания, если ввести отрицательные числа, всегда выполнимо.

Положительные и отрицательные числа дают возможность всякую разность представить в виде суммы и, наоборот, всякую сумму изобразить в виде разности, например:

$7-3=(+7)+(-3)$; и $5+3=5-(-3)$.

Поэтому в учебниках дается следующее определение: сумму, в которой слагаемые могут быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, принято называть алгебраической суммой, например, $-0{,}01+0{,}13-0{,}02+0{,}07$.

С учениками следует проделать упражнения такого рода: выражение $(+3)+(-4)-(+2)-(-1)+(+7)$ написать в виде алгебраической суммы: $3-4-2+1+7$.

Знак «+» перед первым слагаемым можно не писать.

Необходимо указать, что для алгебраической суммы справедлив закон переместительности и сочетательности.

Сложение и вычитание рациональных чисел полезно иллюстрировать при помощи числовой оси.

Полезно изготовить следующее наглядное пособие (прообраз логарифмической линейки). Даны две линейки с одинаковыми равномерными шкалами, причем одна линейка может передвигаться вдоль другой (рис. 14). Пусть требуется найти сумму $+3$ и $+2$. Передвинем верхнюю линейку так, чтобы начало 0 верхней шкалы совпало с делением $+3$ нижней шкалы (линейки).

На нижней шкале находим отметку, соответствующую $+2$ на верхней шкале. Соответствующее деление на нижней шкале, то есть $+5$, и будет равняться сумме $+3$ и $+2$ (рис. 15).

Если требуется найти сумму -3 и $+5$, то совместим точку 0 верхней шкалы с точкой -3 нижней шкалы; на нижней шкале найдем отметку, соответствующую отметке $+5$ на верхней шкале (рис. 16). Тогда $-3+5=2$.

Аналогично находим сумму -5 и $+2$ (рис. 17) и сумму -3 и -4 (рис. 18).

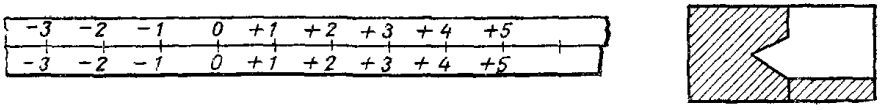


Рис. 14

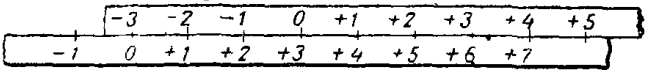


Рис. 15

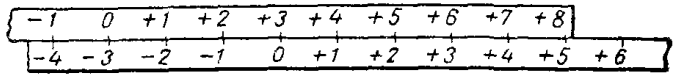


Рис 16

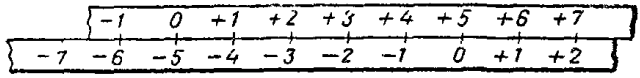


Рис. 17

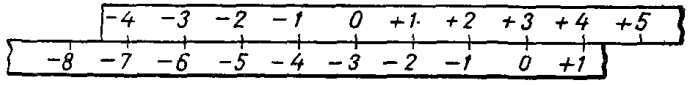


Рис. 18

Для нахождения разности двух чисел совмещаем отметку на верхней шкале с отметкой на нижней шкале; отметка, соответствующая отметке 0 на нижней шкале, и будет разностью данных чисел.

Покажем на примерах, как найти разность двух рациональных чисел. Пусть требуется найти разность $+5$ и $+2$, то есть $+5-(+2)$. Совмещаем пометку (в математике часто говорят вместо слова «отметка» слово «пометка») $+2$ на верхней шкале с пометкой $+5$ на нижней шкале. Пометка на нижней шкале, соответствующая пометке 0 на верхней шкале, и будет равняться разности данных чисел $+5-(+2)=+3$ (рис. 19, *а*).

Аналогично находится разность чисел и в остальных случаях (рис. 19, *б*, *в* и *г*).

При помощи такой двойной передвижной линейки можно найти сумму или разность нескольких чисел, находя сперва сумму

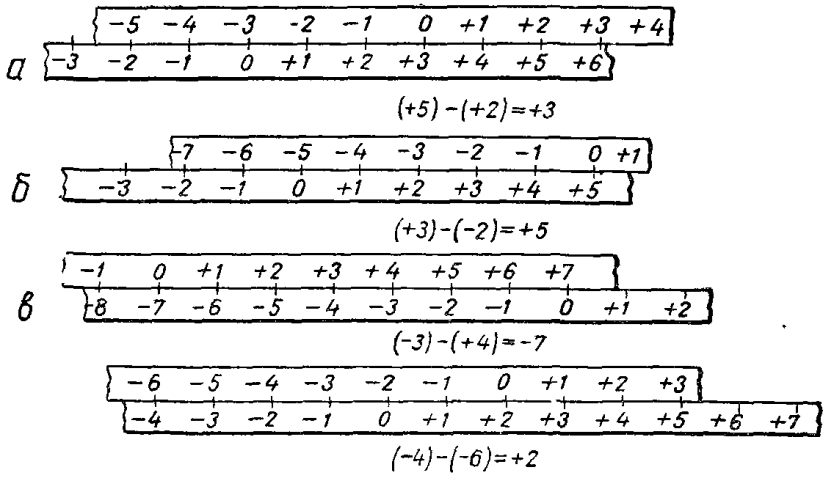


Рис 19

двух чисел, потом прибавляя к данной сумме третье число, и т. д. Аналогично поступают и при нахождении разности.

При векторном изложении суммы и разности двух векторов вводятся следующие правила:

1) Для нахождения суммы двух векторов следует к концу первого вектора приложить начало второго вектора. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, будет суммой данных векторов, причем у суммы будет знак «+» или «—» в зависимости от того, совпадает ли направление суммы векторов с направлением оси или противоположно направлению оси.

2) Для нахождения разности двух векторов следует совместить конец второго вектора с концом первого вектора; вектор, соединяющий начало первого вектора с началом второго вектора, и будет разностью данных векторов. Разность векторов будет иметь знак «+» или «—» в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление разности векторов с направлением оси.

Последнее правило можно заменить следующим: чтобы найти разность двух векторов, достаточно прибавить к первому вектору вектор, противоположный второму.

2. Умножение и деление рациональных чисел.

Наиболее трудным является вопрос об умножении рациональных чисел. Существуют различные объяснения умножения положительных и отрицательных чисел.

Некоторые авторы рассматривают умножение всякого рационального числа на положительное целое число как сокращенное сложение, например:

$$(+5)\cdot(+3)=(+5)+(5)+(+5)=(+15),$$
$$(-5)\cdot(+3)=(-5)+(-5)+(-5)=(-15).$$

При умножении положительного числа на отрицательное они допускают справедливость закона коммутативности для произведения, то есть $(+3)\cdot(-2)=(-2)\cdot(+3)=(-6)$.

Умножение отрицательного числа на отрицательное эти авторы объясняют так.

Пусть требуется найти $(-3)\cdot(-2)$. Произведение должно быть положительным или отрицательным числом. Отрицательным оно не может быть, так как произведение имеет знак «—» тогда, когда множимое и множитель противоположных знаков. Следовательно, $(-3)\cdot(-2)$ может равняться только $+6$. Данные объяснения не выдерживают никакой критики, ибо сперва необходимо принять или доказать существование произведения, а затем говорить об его свойствах.

Второй прием объяснения умножения состоит в том, что сперва рассматривается ряд конкретных задач, а затем дается

правило умножения рациональных чисел. Например, температура воздуха возрастает каждый час на c градусов. В настоящий момент термометр показывает 0°. Каково будет показание термометра через t часов?

$$c=2,\ t=4;\ c=-2,\ t=4;\ c=2,\ t=-4;\ c=-2,\ t=-4.$$

Такой пример встречается в учебнике алгебры А. Н. Барсукова под редакцией С. И. Новоселова (1964, стр. 33). А. П. Киселев рассматривал следующую задачу: «По Октябрьской железной дороге идет поезд со средней скоростью v *км/ч*. В полдень поезд находится на станции Бологое. Где будет находиться поезд через t часов?» Затем рассматриваются все возможные случаи (А. П. Киселев, Алгебра, 1946, стр. 26). Существенным недостатком данного способа изложения является не только его громоздкость, но и то, что у школьников создается убеждение, что они «доказывают» правило умножения рациональных чисел. Заметим, что правило умножения двух рациональных чисел есть условие и никаким способом доказано быть не может.

Иной точки зрения придерживаются следующие авторы учебников алгебры: П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, В. Л. Гончаров и др. Сперва дается правило: произведение двух неравных нулю рациональных чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком «+», если оба множителя положительны или оба отрицательны, и взятому со знаком «—», если один из множителей положителен, а другой отрицателен. Произведение равняется нулю, если хоть один из множителей равен нулю.

После установления правила для умножения рациональных чисел ученики решают конкретные задачи на движение, изменение температуры и т. д.

Рассматривая умножение рациональных чисел с векторной точки зрения, придется ввести следующее положение: произведение двух векторов, расположенных вдоль оси OX, равняется произведению длин векторов, направление вектора произведения будет совпадать с направлением вектора множимого, если направление вектора множителя совпадает с направлением оси OX (короче, у множителя стоит знак «+»), и, обратно, направлению вектора множимого, если направление вектора множителя противоположно направлению оси OX (короче, у вектора множителя знак «—»).

Таким образом, умножение векторов следует производить последовательно: сперва найти длину вектора, а затем направление произведения.

Заметим, что умножение на —1 соответствует изменению направления вектора множимого на противоположное.

Пояснение этого правила следует сделать на чертеже.

Нам кажется, что от учащихся не следует требовать «отчеканенного» правила умножения векторов, достаточно, если они будут понимать сущность принятого условия.

Примеры.

1. Пусть требуется найти произведение $(+3)\cdot(-2)$. Числу $(+3)$ будет соответствовать вектор, длина которого равна 3, а направление совпадает с положительным направлением оси OX. Числу (-2) соответствует вектор, длина которого равна 2, а направление противоположно положительному направлению оси OX. Длина вектора произведения будет равна $3\cdot 2=6$, а направление противоположно направлению вектора $+3$. Следовательно, произведению будет соответствовать вектор -6. Точка, соответствующая концу этого вектора, будет иметь пометку -6, тогда $(+3)\cdot(-2)=-6$.

2. *Найти произведение* $(-3)\cdot(-4)$. Величина (длина) вектора произведения будет $3\cdot 4=12$. Направление вектора произведения будет противоположно направлению вектора множимого. Произведение данных векторов равняется вектору $+12$. Конец этого вектора определяет точку $+12$, следовательно, $(-3)\cdot(-4)=+12$.

Заметим, что данное правило выводится при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме.

Действительно,

$$\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Если оба вектора расположены по направлению оси OX, то мы имеем:

$$\rho_1(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)\cdot\rho_2(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=\rho_1\rho_2,$$

и если противоположно направлению оси OX, то

$$\rho_1(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot\rho_2(\cos\pi+i\sin\pi)=$$

$$=\rho_1\rho_2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\rho_1\rho_2.$$

Если направление одного вектора совпадает с направлением оси OX, а другого противоположно направлению оси OX, то

$$\rho_1(\cos 0+i\sin 0)\cdot\rho_2(\cos\pi+i\sin\pi)=$$

$$=\rho_1\rho_2(\cos\pi+i\sin\pi)=-\rho_1\rho_2.$$

Если множитель равен $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, то при умножении на него приходится вектор множимого повернуть на 180°, то есть изменить его направление на противоположное.

Нельзя недооценивать трудности изложения действий с рациональными числами, рассматриваемых с векторной точки зрения, но экономия во времени, которая получится в дальнейшем, заставляет задуматься над тем, не стоит ли вводить понятие о векторе в VI классе. Учителю, если он решит излагать действия с рациональными числами с помощью векторов, придется тщательно продумать методику изложения. Независимо от того, какой способ изложения выберет учитель, следует подчеркнуть, что абсолютная величина произведения двух или нескольких чисел равняется произведению абсолютных величин этих чисел. Надо особо выделить случай $a \cdot (-1) = -a$, то есть переменить знак числа — все равно, что умножить число на -1.

Необходимо также остановиться на том, что произведение нескольких рациональных чисел равняется произведению их абсолютных величин, взятому со знаком «+», если число отрицательных сомножителей четное, и со знаком «—», если число отрицательных сомножителей нечетное. Полезно предложить ученикам задачи-вопросы следующего вида:

1. Положительным или отрицательным числом будет произведение $a \cdot (-a)$ или $a \cdot a$.

2. Если произведение трех или четырех чисел имеет знак «+» («—»), то сколько из них могут быть положительными (отрицательными) числами?

Деление рациональных чисел обычно рассматривают как действие, обратное умножению. Необходимо еще раз обратить внимание на то, что деление на нуль невозможно.

П. С. Александров и А. Н. Колмогоров вводят понятие об обратном числе и заменяют деление умножением на обратное число. Следует также затронуть вопрос о возвышении в степень положительных и отрицательных чисел, когда показатель степени есть целое положительное число.

Учащиеся сами должны вывести правила, что:

а) степень положительного числа есть положительное число;

б) если показатель степени есть целое четное положительное число, то степень всегда число положительное;

в) если показатель степени есть нечетное целое положительное число, а основание степени отрицательное число, то степень есть отрицательное число.

После установления законов действий для рациональных чисел необходимо перейти к решению примеров и уравнений, а также к задачам на составление уравнений, пока навыки действий с рациональными числами не будут твердо усвоены шестиклассниками.

ГЛАВА III

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 9. Методика изучения тождественных преобразований алгебраических выражений

1. Понятие о тождественных преобразованиях можно связать с выражением одного и того же числа в различных формах. Так,

$42=40+2=4\cdot 10+2=27+15=5\cdot 8+2=21\cdot 2;$

$69=23\cdot 3=60+9=30\cdot 2+9=7^2+5\cdot 4;$

$124=100+24=25\cdot 4+6\cdot 4=(25+6)\cdot 4.$

Преобразуя эти выражения, мы пользовались законами арифметических действий.

При этом на двух-трех примерах полезно показать, что выбор выражения одного и того же числа в различных формах часто зависит от тех действий, которые надо почему-либо совершить над числами.

Так, например, в случае, когда 42 является сомножителем произведения, стоящего в числителе дроби, для сокращения дроби это число удобно рассматривать как $6\cdot 7$:

$$\frac{42\cdot 5}{91}=\frac{6\ 7\cdot 5}{7\cdot 13}=2\frac{4}{13}.$$

При умножении 42 на 9 удобно представить 42 как сумму $40+2$; $(40+2)\cdot 9=40\cdot 9+2\cdot 9=360+18=378$.

В алгебре над алгебраическими выражениями приходится тоже производить различные операции, а потому надо уметь представлять выражение в различном виде, но так, чтобы сохранялось числовое значение его при любых определенных значениях букв, входящих в него.

Преобразование выражения из одного вида в другой при указанном условии и называется *тождественным преобразованием.*

Принципиальное значение темы «Тождественные преобразования» состоит в следующем: 1) ученики должны понять, что в алгебре все «действия» над алгебраическими выражениями только обозначаются, а затем полученные выражения (например, сумма, произведение) преобразуются в более простые тождественные выражения; 2) выполняя тождественные преобразования, ученики должны осознать, что эти преобразования не являются самоцелью, а служат для удобства нахождения числовых значений выражений, для решения уравнений, для вычисления и изучения некоторых свойств различных выражений, например функций, и т. д.

Смысл и целесообразность тождественных преобразований надо показать на нескольких примерах, близких пониманию учащихся. Например, надо вычислить периметр прямоугольника со сторонами a и b при a=69; 46 *см*; b=30; 54 *см*. Учащиеся V класса по программе знакомятся с понятием периметра прямоугольника, в VI классе выясняется тождественность выражений $2a+2b$ и $2(a+b)$ и показывается смысл и целесообразность преобразования; хорошим примером может служить выражение суммы площадей трех прямоугольников с равными основаниями a и различными высотами H_1, H_2, H_3; $a \cdot H_1+a \cdot H_2+a \cdot H_3=a(H_1+H_2+H_3)$; такое тождество легко иллюстрируется чертежом, и, конечно, целесообразность такого тождественного преобразования при вычислении не вызывает сомнений у учащихся.

2. Рациональные целые алгебраические выражения.

В восьмилетней школе рассматриваются рациональные алгебраические выражения, то есть такие, в которых числа и буквы связаны действиями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с натуральным показателем.

Изучение иррациональных выражений ограничивается только изучением основных свойств квадратных радикалов и ознакомлением с понятием кубического радикала.

Рациональное выражение считается целым, если в нем нет делителя, содержащего буквы, и дробным, если таковой имеется. Из целых выражений выделяются некоторые простейшие выражения — одночлены и многочлены.

В большинстве старых учебников алгебры и методиках алгебры одночлен определялся как «алгебраическое выражение, в котором последнее по порядку действие не есть сложение или вычитание» Такое определение не совпадает с определением многочлена, принятым в современных курсах алгебры, как целой рациональной функции и включало в класс одночленов такое выражение, как $\frac{x+y}{y}$, которое не является целым выражением.

В современных учебниках дается более точное определение одночлена: одночленом называется произведение, состоящее из числовых и буквенных сомножителей, из которых каждый может быть в любой натуральной степени, алгебраическая сумма одночленов называется многочленом. Согласно этим определениям среди алгебраических выражений встречаются и такие, которые не являются ни одночленом, ни многочленом, но которые иногда могут быть преобразованы в тождественно равные одночлены или многочлены.

Так, целое выражение $a(b+c)$ преобразуется в многочлен $ab+ac$, дробное выражение $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ преобразуется в многочлен $x+y$, а дробное выражение $\frac{x^2-xy}{x-y}$ преобразуется в одночлен x при условии $x \neq y$.

3 Преобразования целых алгебраических выражений.

Программы и учебники включают «действия над целыми алгебраическими выражениями». Однако определить понятие «действия над буквенными выражениями» в начальной алгебре весьма трудно. Известно, что учащиеся обычно недоумевают: как это можно складывать или умножать буквы? Но их не смущает обозначение суммы или произведения с помощью знаков действий. В самом деле, что значит сложить два одночлена a и b? Это значит не более, как поставить между ними знак сложения, то есть только обозначить сумму их. То же можно сказать и про два многочлена. Если задано два многочлена $3ab+2a^2b$ и $2ab+a^2b$ и предлагается сложить эти многочлены, то, кроме того что мы поставим между ними знак сложения, сделать ничего нельзя, этим сложение завершается; в отдельных случаях полученное выражение — сумму двух многочленов — можно преобразовать различным образом в зависимости от цели преобразования, например раскрыть скобки, сделать приведение подобных членов. В задачниках встречается такое упражнение: произвести сложение многочленов $(3a^2b+2ab)+(a^2b+3a^2b^2)$; такое задание часто вызывает законное недоумение учащихся и они заявляют, что многочлены уже сложены.

Прошедшая на страницах журнала «Математика в школе» дискуссия по вопросу о терминологии и понятиях в начальной алгебре[1] свидетельствует о том, что большинство методистов и учителей математики склоняется к тому, что при обучении учащихся VI класса целесообразно подчеркивать, что в алгебре действия над алгебраическими выражениями только обозначаются, полученные в результате новые выражения могут быть преобразованы в тождественно равные. И только в том

[1] См.. «Математика в школе», 1962, № 6, 1963, № 5, 6.

случае, когда даны значения букв, входящих в выражения, можно произвести над числами действия, указанные в алгебраическом выражении. При таком подходе к преобразованиям алгебраических выражений ученики будут лучше понимать, что открытие скобок и приведение подобных членов не являются действиями в арифметическом смысле слова. Придерживаясь указанного подхода к преобразованиям алгебраических выражений, мы рекомендуем несколько изменить порядок изучения материала темы. Мы предлагаем начинать с преобразования одночленов — приведения их к простейшему виду, а затем переходить к преобразованиям многочленов.

4. Приведение одночлена к простейшему или нормальному виду.

Так как по определению к одночленам относятся и такие произведения, в которых отдельные сомножители могут повторяться, как, например, $3aba^2 2b^3$, то естественно поставить задачу о приведении одночлена к простейшему виду.

Сначала следует рассмотреть преобразования одночленов на основании переместительного и сочетательного законов умножения или свойства произведения и на основании понятия о степени. Для этого можно рассмотреть такие одночлены:

1) $0{,}75x^2y \cdot 2y^2xp = 0{,}75 \cdot 2 \cdot x^2x \cdot y \cdot y^2 \cdot p = 1{,}5xxxyyyp = 1{,}5x^3y^3p$;

2) $3a(b^3)^2 = 3ab^3b^3 = 3 \cdot a \cdot bbb \cdot bbb = 3ab^6$;

3) $5 \cdot a^2 \cdot (2a^2p)^3 \cdot c = 5a^2 \cdot 2a^2p \cdot 2a^2p \cdot 2a^2p \cdot 2a^2pc = 5aa \cdot 2aa \cdot 2aa \cdot 2aa \cdot ppp \cdot c =$
$= 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot aaaaaaaa \cdot ppp \cdot c = 40a^8p^3c.$

Во всех этих случаях преобразования одночленов весьма громоздки, но все-таки они привели в каждом случае к простейшему виду одночлена. Теперь можно дать определение «нормального вида» одночлена. Одночленом, приведенным к нормальному виду, считается такой, в котором один численный сомножитель (численный коэффициент) и нет повторяющихся буквенных сомножителей.

После этого нужно поставить задачу вывести такие правила преобразования одночленов, которые освободили бы от необходимости производить переписывание громоздких выражений.

Для этого надо доказать теоремы о преобразовании произведений и степеней.

Теорема 1. *Произведение степеней одного и того же основания равно степени с тем же основанием и с показателем, равным сумме показателей в сомножителях.*

Сначала рассмотрим численный пример. Пусть надо найти $3^3 \cdot 3^2$. По определению степени

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ и $3^2 = 3 \cdot 3$, значит $3^3 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ (по основному закону умножения) $= 3^5$, следовательно,
$3^3 \cdot 3^2 = 3^5$, то есть $3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2}$.

В общем виде вывод может быть записан так:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Вывод может быть сформулирован и так: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание сохраняется, а показатели складываются. Доказательство теоремы в общем виде.

Дано:

$$a^x \cdot a^y,$$

доказать:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Доказательство:

$$a^x = \underbrace{aaa \ldots a}_{x \text{ раз}}; \quad a^y = \underbrace{aaa \ldots a}_{y \text{ раз}};$$

$$a^x \cdot a^y = \underbrace{(aaa \ldots a)}_{x \text{ раз}} \cdot \underbrace{(aaa \ldots a)}_{y \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{aaa \ldots a \cdot aaa \ldots a}_{(x+y) \text{ раз}} = a^{x+y}, \text{ то есть}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Если учитель находит, что доказательство теоремы для учащихся трудно, то можно ограничиться выводом из рассмотрения численных примеров и записью вывода в общем виде. Требовать всегда формулировки вывода, как мы полагаем, не обязательно, гораздо важнее, чтобы ученики знали, как получен вывод, могли записать его в общем виде, понимать эту запись и уметь применять ее на практике. Вывод следует закрепить решением примеров:

$$a^3 \cdot a^4; \ 3x^3 \cdot x^5; \ 3a^2 \cdot ba^3; \ 3^2x^2 \cdot 3^3x^4 \text{ и др.}$$

В связи с этими преобразованиями вводится понятие о подобных одночленах и можно ввести понятие о противоположных одночленах. Понятие «противоположные одночлены» устанавливается так: рассматриваются два подобные одночлена, отличающиеся знаком, например $5a^2b$ и $-5a^2b$, при одних и тех же числовых значениях букв $a=2$, $b=3$; получаем $5a^2b=60$, $-5a^2b=-60$. Числовые значения взятых одночленов противоположны, а сами одночлены называются противоположными. Понятие о противоположных одночленах воспринимается учениками легко, а в последующем оно значительно упрощает формулировки многих правил.

5. Преобразование многочлена в нормальный (канонический) вид.

Преобразование многочлена в нормальный вид состоит из

двух операций: выражение каждого члена многочлена в нормальном виде и в приведении подобных членов.

Приведение подобных членов надо, конечно, трактовать не как действие, а как преобразование, ведущее к упрощению многочлена, к выражению его в нормальном виде. Подобные члены можно соединять в один, приняв за коэффициент его алгебраическую сумму соединяемых членов. В начале упражнений на приведение подобных членов полезно переставлять члены многочлена так, чтобы подобные члены оказались рядом (на основе переместительного закона), затем, пользуясь сочетательным свойством суммы, производить в каждой группе приведение подобных членов (что состоит в сложении их коэффициентов на основании распределительного закона сложения, прочитанного в обратном порядке).

Первые примеры на приведение полезно оформить так:

$$3a^2-2ab+4xy+2a^2+5ab-2xy+4a^2+7ab=$$

$$=(3a^2+2a^2+4a^2)+(-2ab+5ab+7ab)+(4xy-2xy)=$$

$$=(3+2+4)\,a^2+(-2+5+7)\,ab+(4-2)\,xy=9a^2+10ab+2xy.$$

Затем надо перейти к подчеркиванию подобных членов, не меняя их местами.

Надо иметь в виду, что ученики часто делают приведение подобных членов не раскрывая скобки, что ведет к ошибкам. Но это относится к случаям, когда заданы суммы многочленов. В связи с приведением подобных членов следует ввести понятие о противоположных многочленах. Надо рассмотреть, например, два таких многочлена:

$$3a^2b-5ab^2+4ab \text{ и } -3a^2b+5ab^2-4ab$$

при одних и тех же значениях букв ($a=-2$, $b=3$), полученные результаты ($+102$ и -102) помогут учащимся получить представление о противоположных многочленах.

6. Сумма и разность одночленов.

Обычно в учебниках алгебры говорится о сложении и вычитании одночленов, но сложение и вычитание их нельзя определить, а можно лишь обозначить, записав сумму одночленов. Поэтому предпочтительнее и говорить о сумме одночленов, которая может быть обозначена знаком сложения. Так, например, сумма одночленов $3a^2b$ и $2b^2c$ может быть только обозначена, получится некоторый многочлен. Иногда полученный многочлен может быть преобразован. Так, если запишем сумму одночленов $2x^2y$, $3xy$ и $-4x^2y$, то в полученном многочлене два члена будут подобны:

$$2x^2y+3xy+(-4x^2y)=2x^2y-4x^2y+3xy=-2x^2y+3xy.$$

При изучении рациональных чисел было установлено, что разность удобнее заменить суммой уменьшаемого и числа, проти-

воположного вычитаемому. Эта замена производится и в случае, когда дана разность одночленов (ведь каждый одночлен выражает некоторое число). Так, например,

$$3a^2b-(2ab)^2=3a^2b+(-2ab^2)=3a^2b-2ab^2.$$

Так осуществляется тождественное преобразование обозначенной разности.

Существует такая точка зрения, что в алгебре можно было бы не выделять понятие разности алгебраических выражений, а ограничиться понятием суммы, но мы полагаем, что для шестиклассников это создало бы излишние трудности. Предложенное же нами рассмотрение разности не нарушает системы.

7. Произведение, степень и частное одночленов

Подход к произведению одночленов таков же, как и к сумме: произведение одночленов также только обозначаем. В результате получаем новый одночлен как произведение численных и буквенных сомножителей. Этот новый одночлен преобразуем в нормальный вид на основании доказанной выше теоремы. Здесь же следует рассмотреть и произведение трех и более одночленов.

Затем следует рассмотреть произведение одинаковых одночленов, то есть степень одночлена, например: $2a^3b^2\cdot 2a^3b^2\cdot 2a^3b^2=(2a^3b^2)^3$. Для преобразования таких одночленов надо доказать две теоремы

Теорема 2. *При возведении степени в степень получается степень с прежним основанием и с показателем равным произведению показателей степеней.*

Рассмотрим численный пример. Пусть дано $(a^3)^4$. Покажем, что $(a^3)^4=a^{3\cdot 4}\cdot(a^3)^4=a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3=$

(на основании понятия о степени)

$=a^{3+3+3+3}=a^{3\cdot 4}$.

(на основании первой теоремы)

В общем виде вывод может быть записан так: $(a^x)^y=a^{xy}$.

Доказательство теоремы в общем виде.

Дано: $(a^x)^y$,

доказать: $(a^x)^y=a^{xy}$.

Доказательство:

$$(a^x)^y=\underbrace{a^x\cdot a^x\cdot a^x\cdot\ \ldots\ \cdot a^x}_{y\text{ раз}}=$$ (по определению степени)...

$$=a^{\overbrace{x+x+x+\cdots+x}^{y\text{ раз}}}$$ (по 1-й теореме) $=a^{xy}$.

Теорема 3. *При возведении одночлена в степень в эту степень возводится каждый множитель отдельно и полученные результаты перемножаются*

Рассмотрим пример. Пусть дано возвести в третью степень одночлен $2x^2y^3$; $(2x^2y^3)^3 = 2x^2y^3 \cdot 2x^2y^3 \cdot 2x^2y^3 =$ (по определению степени) $= 2 \cdot 2 \cdot 2x^2x^2x^2y^3y^3y^3 =$ (на основании свойства произведения) $= 2^3x^6y^9$ (по первой теореме).

В общем виде вывод может быть записан так: $(ka^xb^y)^p = k^pa^{px}b^{py}$.

Доказательство теоремы в общем виде.

Дано: $(ka^xb^y)^p$,

доказать: $(ka^xb^y)^p = k^pa^{px}b^{py}$.

Доказательство:

$$(ka^xb^y)^p = \overbrace{ka^xb^yka^xb^y \cdot \ldots \cdot ka^xb^y}^{p \text{ раз}} =$$ (по определению степени)

$$= \underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{p \text{ раз}} \cdot \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{p \text{ раз}} \cdot \underbrace{b^y \cdot b^y \cdot b^y \cdot \ldots \cdot b^y}_{p \text{ раз}} =$$ (на основании свойства произведения) $= k^p \cdot a^{px} \cdot b^{py}$ (на основании 1-й теоремы).

Замечания на 1-ю теорему распространяются также на 2-ю и 3-ю теоремы. И, конечно, последние два вывода надо закрепить решением соответствующих задач.

Частное двух одночленов надо рассматривать как алгебраическую дробь, и можно было бы изучение частного отложить и отнести к теме «Алгебраические дроби». Но мы полагаем, что для законченности вопроса о различных преобразованиях одночленов надо остановиться на возможности в отдельных случаях частное преобразовать в целое выражение, то есть в одночлен.

Для таких преобразований приходится рассмотреть еще две теоремы.

Теорема 4. *Частное от деления степеней одного и того же основания равно степени с тем же основанием и с показателем степени, равным разности показателей делимого и делителя.*

Сначала надо рассмотреть пример с численными показателями, например: $a^5 : a^2 = a^{5-2}$; это верно, так как на основании зависимости между компонентами действия деления $a^{5-2} \cdot a^2 = a^{5-2+2} = a^5$, что соответствует данным; $a^5 : a^5 = 1$ как частное равных чисел.

После нескольких таких примеров можно доказать теорему в общем виде: $a^k : a^p = a^{k-p}$ при условии, что k и p — натуральные числа и $k > p$. Действительно, на основании известной зависимости

$$a^{k-p} \cdot a^p = a^{k-p+p} = a^k, \text{ что верно.}$$

$a^k : a^k = 1$ как частное равных чисел.

Теорема 5. *При делении одночленов надо поделить коэффициент делимого на коэффициент делителя, а буквенные сомножители с одинаковым основанием поделить, опираясь на 4-ю теорему.*

Пример.

$$8a^5b^4 : 3a^3b = \frac{8}{3}\, a^{5-3}b^{4-1} = \frac{8}{3}\, a^2b^3;$$

это верно, так как $\frac{8}{3}\, a^2b^3 \cdot 3a^3b = 8a^5b^4$. Доказательство в общем виде такое же, как и в 4-й теореме:

$$Ma^kb^p : Na^cb^m = \frac{M}{N}\, a^{k-c}b^{p-m}.$$

Это верно, так как

$$\frac{M}{N}\, a^{k-c}b^{p-m} \cdot Na^cb^m = Ma^kb^p.$$

Так как понятие об отрицательном показателе дается в VII классе, то в VI классе устанавливается, что при $k<c$ или $p<m$ частное при делении взятых одночленов не может быть выражено одночленом.

8. Сумма и разность многочленов.

Сумма многочленов, как и сумма одночленов, может быть только обозначена и в отдельных случаях преобразована, приведена к нормальному виду. Рассмотрим примеры, когда надо сумму заданных многочленов обозначить и когда такая сумма уже задана.

Обозначим сумму многочленов $(3a^2b - 2ab + 5ab^2)$ и $(2ab - 5a^2b - 3ab^2)$, получим $(3a^2b - 2ab + 5ab^2) + (2ab - 5a^2b - 3ab^2)$: теперь можно воспользоваться известным из арифметики правилом прибавления суммы:

$$3a^2b - 2ab + 5ab^2 + (2ab) + (-5a^2b) + (-3ab^2) = 3a^2b - 2ab + 5ab^2 + 2ab - 5a^2b - 3ab^2.$$

Анализируя полученный результат, можно заключить, что преобразование свелось к открытию скобок, при этом все члены второго многочлена приписаны к первому многочлену со своими знаками. Осталось привести полученный многочлен к нормальному виду. Отсюда выводится правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+».

Разность многочленов, так же как и разность одночленов, может быть заменена суммой первого многочлена и многочлена, противоположного вычитаемому, или сведена к раскрытию скобок, перед которыми стоит знак «—». Обратные операции — заключение многочленов в скобки — целесообразно рассматривать в каждом случае сразу же после рассмотрения соответствующей прямой операции.

Рассмотрев правило открытия скобок, перед которыми стоит знак «+» (например, $3ab+(4a-2ab+3b)=3ab+4a-2ab+3b$), читаем полученное равенство справа налево и замечаем, что при заключении нескольких членов многочлена в скобки, перед которыми ставится знак «+», надо эти члены многочлена перенести в скобки со своими знаками.

Затем рассматривается уже известное правило открытия скобок, перед которыми стоит знак «—» (например, $3ab-(4a-2ab+3b)=3ab-4a+2ab-3b$). Читая полученное равенство справа налево, ученики видят, что при заключении нескольких членов многочлена в скобки, перед которыми требуется поставить знак «—», надо члены, заключаемые в скобки, вписать в скобки с противоположными знаками.

9. Произведение многочленов.

Изучая с учениками правила преобразования произведений многочленов, рассматриваем сначала арифметические примеры вычисления произведения однозначного числа на двузначное, двух двузначных и двух многозначных чисел.

Произведение чисел определим на основании распределительного закона умножения.

Примеры. $9\cdot 47=9\cdot(40+7)=9\cdot 40+9\cdot 7;$
$23\cdot 6=(20+3)\cdot 6=20\cdot 6+3\cdot 6.$

Сформулированное правило вычисления произведения применяем к преобразованию произведения одночлена и многочлена.

Примеры. 1) $a\cdot(b+c)=ab+ac$; 2) $(p+k)\cdot n=pn+kn$;
3) $k(a-b)=ka-kb$; 4) $(a-b)k=ak-bk$.

При этом надо обратить внимание учащихся на то, что все эти равенства являются записями распределительного закона умножения буквами. Затем рассмотрим порядок вычисления произведения двузначных чисел, например:

$$1)\ 97\cdot 98=97\cdot(100-2)=97\cdot 100-97\cdot 2=(100-3)\cdot 100-$$
$$-(100-3)\cdot 2=(100\cdot 100-3\cdot 100)-(100\cdot 2-3\cdot 2)=100\cdot 100-3\cdot 100-$$
$$-100\cdot 2+3\cdot 2;$$

$$2)\ 9\frac{1}{5}\cdot 10\frac{1}{3}=\left(9+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(10+\frac{1}{3}\right)=\left(9+\frac{1}{5}\right)\cdot 10+\left(9+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$
$$=90+2+3+\frac{1}{15}.$$

Теперь устанавливаем порядок преобразования произведения алгебраических сумм многочленов:
$(a+b)\cdot(c+p)=ac+bc+ap+bp$; $(a-b)\cdot(c-p)=ac-bc-ap+bp$.

После этого переходим к преобразованию произведения многочленов с большим числом членов, постепенно усложняя их. На первых порах следует соблюдать постепенность в записях преобразований и сопровождать преобразования рассуждениями.

Так, например:

$$(a+b-c)\cdot(p-n+k)=(a+b-c)\,p-(a+b-c)\,n+(a+b-c)\,k=$$
$$=(ap+bp-cp)-(an+bn-cn)+(ak+bk-ck)=ap+bp-cp-$$
$$-an-bn+cn+ak+bk-ck.$$

Можно показать ученикам замену одного из сомножителей — многочленов одночленом (вспомогательной буквой). Например, надо перемножить $(x+y+c)$ и $(a+b)$. Заменим многочлен $(x+y+c)$ одночленом m. Тогда получим:

$$m(a+b)=ma+mb.$$

Теперь заменим m многочленом, который он представлял в произведении, получим:

$$(x+y+c)\cdot a+(x+y+c)\cdot b=xa+ya+ca+xb+yb+cb.$$

Пусть надо найти произведение

$$(3a+4b^2-2c^3)\cdot(2b-4c^2).$$

Заменим первый многочлен одночленом m, получим

$$m\cdot(2b-4c^2)=2bm-4c^2m.$$

Подставим вместо m многочлен, который заменялся буквой m, получим:

$$2b\,(3a+4b^2-2c^3)-4c^2\cdot(3a+4b^2-2c^3)=$$
$$=(6ab+8b^3-4bc^3)-(12ac^2+16b^2c^2-8c^5)=$$
$$=6ab+8b^3-4bc^3-12ac^2-16b^2c^2+8c^5.$$

Указанный прием замены многочлена одночленом часто употребляется в алгебре, и познакомить с ним учащихся полезно От двух множителей следует перейти к произведению трех и более множителей, используя переместительный и сочетательный законы произведения нескольких сомножителей

Правило преобразования произведения многочленов можно дать такое: чтобы найти произведение многочленов, надо найти последовательно произведение каждого члена множимого на первый член множителя, затем на второй член его и т. д., соблюдая при умножении правила знаков; полученные произведения сложить, то есть записать их сумму. Ученики часто ведут преобразования бессистемно и из-за этого ошибаются Чтобы избежать ошибок, надо с первых же шагов требовать от них выполнения установленного правилом порядка.

Изучение произведений расположенных многочленов приводит к весьма важному заключению, что число членов этого произведения до приведения должно равняться произведению числа членов в сомножителях, а после приведения число их может уменьшиться, но произведения высших членов и низших членов перемножаемых многочленов всегда остаются, так как эти произведения подобных себе членов иметь не могут. Знание этого свойства произведения во многих случаях может предупредить пропуск некоторых членов в произведении.

10. Умножение многочленов по формулам.

Умножение многочленов по формулам рассматривается как частный случай умножения многочленов. К выводу формул умножения нужно привлекать самих учащихся. Под руководством учителя они легко проводят все необходимые преобразования и при этом дают объяснения и формулируют окончательные выводы. Усвоению формул помогают такие предварительные упражнения:

Даны два числа: первое a и второе b; что собой представляют и как прочитать следующие выражения: $(a+b)$, $(a-b)$, $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ab; $2ab$; $(a+b)\cdot(a-b)$; a^2-b^2 или $(a+b)^3$; $(a+b)^2\cdot(a+b)$; a^3; b^3; a^3b^3; a^3b^2; a^2b^3; $3a^3b^2$; $3a^2b^3$.

После совместного вывода формулы

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Можно предложить ученикам самостоятельно доказать, что

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Такой же порядок можно применить при выводе формул

$$(a+b)^3 \text{ и } (a-b)^3.$$

Необходимо разобрать с учащимися тождество

$$(a-b)^2=(b-a)^2,$$

иллюстрируя его и численными примерами типа $5^2=(-5)^2$ и др. При выводе формул

$$(a+b)^2,\ (a-b)^2 \text{ и } (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

полезно использовать геометрические иллюстрации. При выводе формул $(a+b)^3$ и a^3+b^3 геометрические иллюстрации, как уже сказано выше, нецелесообразны: для их разъяснения требуется много времени[1]. Упражнения на применение всех выведенных формул надо постепенно усложнять в такой последовательности:

$(m\pm n)^2$; $(2\pm b)^2$; $(3a\pm c)^2$; $(2a\pm 3c)^2$; $(a^2\pm b)^2$; $(2a+3b^2)^2$ и т. д.

[1] Выводы формул (a^3+b^3) и (a^3-b^3) отнесены программой к VII классу.

Нельзя оставить выведенные формулы сокращенного умножения без практического применения их для вычислений, как, например:

1) $98^2=(90+8)^2=8100+2\cdot720+64=9604$ или $98^2=(100-2)^2=$
$=100^2-2\cdot100\cdot2+4=10\,000-400+4=9604$;

или

2) $39^3=(40-1)^3=40^3-3\cdot40^2\cdot1+3\cdot40\cdot1-1^3=64\,000-3\cdot1600+$
$+120-1=64\,000-4800+119=59\,319$;

3) $48\cdot52=(50-2)\cdot(50+2)=50^2-2^2=2500-4=2496$;

4) $8\frac{1}{3}\cdot7\frac{2}{3}=\left(8+\frac{1}{3}\right)\left(8-\frac{1}{3}\right)=8^2-\frac{1}{9}=64-\frac{1}{9}=63\frac{8}{9}$.

11. Частное многочленов.

Частное многочленов в общем случае представляет собой дробь, которую в отдельных случаях можно преобразовать. В VI классе программа предусматривает изучение только тех случаев, когда частное может быть представлено в виде целого выражения. Это относится к случаю, когда имеется частное многочлена и одночлена. Порядок преобразования частного в этом случае основан на распределительном свойстве деления чисел по отношению к сумме и разности.

Полезно вспомнить, как практически производится деление многозначного числа на однозначное; пример: $375:5=$
$=(300:5)+(70:5)+(5:5)$ или $(42+49):7=(42:7)+(49:7)$.

По аналогии с этим устанавливается правило (или порядок) преобразования частного от деления многочлена на одночлен: частное от деления многочлена на одночлен преобразуется в сумму частных от деления каждого члена многочлена на одночлен.

Пример: $(8a^3b^2-12a^2b^3+6a^2b^2):4a^2b=(8a^3b^2:4a^2b)-$
$-(12a^2b^3:4a^2b)+(6a^2b^2:4a^2b)=2ab-3b^2+1{,}5b$. Справедливость установленного правила можно подтвердить и проверкой — найти произведение полученного частного на делитель.

После нескольких упражнений, в которых частное выражается многочленом, надо разобрать 3—4 примера, когда частное не может быть выражено многочленом, то есть частное является дробным выражением.

Пример: $(15x^4y^3-10x^3y^3+10x^2y^2-20xy^2):10x^2y^2$, в этом случае сразу видно, что частное от деления последнего члена многочлена на одночлен является дробным выражением, а значит, и все частное не есть целое выражение.

Если позволяет время, то в VI классе целесообразно рассмотреть частные многочленов, получаемые с помощью формул сокращенного умножения. Это, конечно, возможно только после изучения этих формул. Рассуждения в этом случае следует

вести примерно так: известно, что $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$; из известной зависимости между сомножителями и произведением следует, что $(a+b)=(a^2-b^2):(a-b)$, это равенство можно читать справа налево; второе равенство, следующее из начального, ученики могут вывести самостоятельно. Выводы надо закрепить решением несложных примеров. Аналогично могут быть рассмотрены все случаи «деления по формулам».

У учащихся может возникнуть вопрос о возможности деления многочленов в более общем виде, но этот вопрос в программу не входит. И нам представляется, что материал о делении многочленов в общем виде может быть освещен для учеников-семиклассников, особо интересующихся математикой. Им на занятиях кружка надо разъяснить смысл деления в алгебре: разделить один многочлен на другой — это значит найти такой третий многочлен, произведение которого на делитель и плюс остаток равнялось бы делимому, причем остаток может равняться нулю. Таким образом, компоненты деления в алгебре связаны общей формулой $M=Q\cdot K+R$, где M — делимое, Q — делитель, K — частное и R — остаток (степень остатка должна быть меньше степени делителя). Последнее равенство — тождество и отражает смысл деления многочленов.

Примеры: 1) при делении $(2x^2-5x+2)$ на $(x-3)$ получается частное $(2x+1)$ и остаток 5, отсюда $2x^2-5x+2=(x-3)\cdot(2x+1)+5$; это случай деления с остатком.

2) $(2x^2-5x-3):(x-3)=2x+1$, отсюда $2x^2-5x-3=(x-3)\cdot(2x+1)+0$, случай, когда остаток равен 0.

3) При делении $(3x+5)$ на $(3x^2+5)$ в частном получается 0, а в остатке $(3x+5)$ и равенство сохраняет смысл, так как $3x+5=(3x^2+5)\cdot 0+(3x+5)$.

(Подробное изложение вопроса можно найти в «Методике преподавания математики» под ред. С. Е. Ляпина, гл. III, стр. 269—272, Учпедгиз, 1955.)

§ 10. Разложение многочленов на множители

Тема «Разложение многочленов на множители» — 2-я тема VII класса — представляет для учащихся большие трудности. Объясняется это тем, что при выполнении упражнений по этой теме в них встречаются не только примеры, для решения которых применяются шаблонные приемы преобразования, но и такие, решая которые, нужно уметь охватить все заданное выражение полностью и подметить, как представить его иначе. Нередко приходится произвести предварительные, иногда искусственные, преобразования, которые откроют возможность применить хорошо знакомый прием разложения.

Опыт передовых учителей подсказывает целесообразность связывать отдельные приемы, применяемые при разложении

многочленов на множители, с тождественными преобразованиями, которые изучаются на протяжении учебного года в VI классе. При этом ученики накапливают некоторые знания и умения, непосредственно связанные с разложением на множители, и начинают систематическое изучение этой темы уже в значительной мере подготовленными к ней.

Так, после изучения произведения одночленов могут быть предложены следующие контрольные вопросы.

Дан одночлен $28a^6b^3$. Какие два одночлена с целыми коэффициентами могут дать в произведении этот одночлен? Облегчится ли вычисление числового значения выражения при таком преобразовании?

Дан одночлен $18a^3b^2$. Произведение каких одночленов даст этот одночлен?

Сразу же после ознакомления учащихся с умножением одночлена на многочлен и многочлена на одночлен могут быть рассмотрены некоторые вопросы, аналогичные приведенным выше.

Получив равенство $6a^2b^2(2b-3a)=12a^2b^3-18a^3b^2$, можно предложить записать его справа налево и поставить такие вопросы:

Дан многочлен $12a^2b^3-18a^3b^2$. Произведение каких одночленов на многочлен может дать данный многочлен? Привести несколько примеров.

Дан многочлен $6a^2-3ab$. Показать, какие сомножители могут дать в произведении этот многочлен.

После упражнений такого рода можно подвести некоторый итог, а именно:

а) каждый одночлен можно представить в виде произведения различных множителей (используя переместительный и сочетательный законы умножения), но такое преобразование редко дает преимущества;

б) в многочлене, каждый член которого содержит одинаковый множитель, этот последний можно вынести за скобку (используя распределительный закон умножения).

Подобные упражнения можно провести и после изучения *формул сокращенного умножения и деления*.

Так, после изучения формулы $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ полезно предложить вопросы.

Произведение каких множителей даст многочлен a^2-b^2?

Произведение какого множителя на двучлен $(a-b)$ дает многочлен a^2-b^2?

Следует проделать с учениками ряд упражнений на нахождение числового значения таких многочленов, которые целесообразно до подстановки в них численных значений букв преобразовать в степень или произведение.

Например, найти численное значение многочленов:

$a^2+2ab+b^2$ при $a=3{,}46;\ b=1{,}54;$

$9x^2-6xy+y^2$ » $x=19;\ y=49;$

$ab+ac-ap$ » $a=47;\ b=54;\ c=36;\ p=80.$

Таким образом, до систематического изучения ученики выполняют упражнения, требующие вынесения общего множителя за скобку и применения формул сокращенного умножения, а затем и формул сокращенного деления. При такой подготовке в последней четверти учебного года в VI классе и при выполнении подобных устных упражнений с начала года в VII классе тема «Разложение многочленов на множители» усваивается школьниками без особых затруднений.

Начиная систематическое изучение темы «Разложение многочленов на множители», следует выяснить цель предстоящих преобразований. Достаточно вспомнить значение разложения на множители чисел для нахождения наименьшего общего кратного их, в частности при приведении дробей к общему *знаменателю, для сокращения дробей. Полезно использовать* рассмотренные в VI классе примеры нахождения числового значения многочлена и сопоставить его с вычислениями после того, как он представлен в виде произведения. Если такие упражнения не выполнялись, то их можно рассмотреть специально для указанной цели.

Примеры. **1.** $6a^3-3a^2b$ вычислить при $a=18,\ b=35.$

2. $12a^2b^3-18a^3b^2$ вычислить при $a=2,\ b=3.$

В результате всей подготовительной работы устанавливается, что разложить многочлен на множители — значит представить его в виде произведения целых выражений (одночленов и многочленов). При этом подчеркивается, что разложение многочлена считается законченным, если ни один из многочленов полученного произведения не может быть еще разложен. Этим будет предупреждена распространенная ошибка учащихся, когда они, например, считают законченным разложение в таких случаях: $x^3-x=x(x^2-1)$, $a^3b-a^2b=ab(a^2-a)$.

Полезно обратить внимание учеников на то, что разложение на множители имеет смысл только для многочленов, так как одночлен сам по себе есть произведение. Поэтому преобразование одночлена, подобно такому: $7a^3b^2=7aaabb$, нельзя рассматривать как разложение на множители; в данном случае нормальный вид одночлена заменен развернутой записью его. Стоит остановиться и на том, что такое преобразование одночлена не облегчает вычисление числового значения, что разбиралось уже в VI классе.

Тему «Разложение многочленов на множители» можно начинать и с применения формул сокращенного умножения и деления.

В упражнениях по этой части темы особо тщательно надо рассмотреть случаи разложения разности квадратов двух выражений, когда основания одного или обоих квадратов являются многочленами. Сначала надо разобрать примеры, в которых многочленом является основание только первого квадрата:

$$(m+n)^2-p^2=(m+n+p)(m+n-p);$$

$$(2x-3y)^2-4y^2=(2x-3y+2y)(2x-3y-2y)=(2x-y)(2x-5y).$$

Затем надо перейти к примерам с многочленным основанием у второго квадрата; этих примеров следует разобрать побольше, так как ученики часто ошибаются в знаках при вычитании многочленов.

$$9x^2-(2x+3y)^2=(3x+2x+3y)(3x-2x-3y)=(5x+3y)(x-3y);$$

$$16c^2-(3c-5p)^2=(4c+3c-5p)(4c-3c+5p)=(7c-5p)(c+5p).$$

Если ученики научились решать примеры такого вида, то следующие, в которых основания обоих квадратов многочлены, не вызывают у них особых затруднений.

$$(p+c)^2-(n-k)^2=(p+c+n-k)(p+c-n+k);$$

$$(a+b)^2-(2a-b)^2=(a+b+2a-b)(a+b-2a+b)=3a(2b-a).$$

Разложение на множители четырехчлена, являющегося кубом суммы или кубом разности двух чисел, следует разобрать особенно тщательно, так как в более сложных выражениях учащиеся «не видят» куба выражения.

Затем следует привести в систему некоторые из изученных тождественных преобразований и рассмотреть их с новой точки зрения.

Читая равенство $c(a+b)=ca+cb$ справа налево, имеем:

$$ca+cb=c(a+b).$$

Читая равенство $c(a-b)=ca-cb$ справа налево, имеем:

$$ca-cb=c(a-b).$$

В обоих случаях многочлен представлен в виде произведения сомножителей, то есть разложен на множители. Обращаем внимание, что в рассмотренных случаях в каждый член многочлена входил общий множитель c, который можно вынести за скобку.

Необходимо добиться от школьников понимания того, что при вынесении общего множителя за скобки выражение в скобках получается делением данного многочлена на вынесенный за скобку множитель. Пока не закреплены навыки в разложении, надо чаще требовать проверки произведенного преобразования.

В случаях, когда общий множитель является многочленным, нужно рассмотреть 4 типа примеров:

1. Общий многочленный множитель заключен в скобки, например:

$$2x(x-y)+3y(x-y)=(x-y)(2x+3y).$$

Некоторую трудность у учеников вызывает случай, когда одним из слагаемых многочлена является сам общий множитель:

$$c(p+n)-(p+n)=(p+n)(c-1);$$

учащиеся в этих случаях часто делают ошибку, получая такой результат: $(p+n)c$.

2. Для выявления многочленного множителя надо поставить скобки:

$$n(p-c)+p-c=n(p-c)+(p-c)=(p-c)(n+1);$$
$$n(p-c)-p+c=n(p-c)-(p-c)=(p-c)(n-1).$$

3. Скобки в задании имеются, но выражения, стоящие в скобках, противоположны:

$$a(x-y)-(y-x)=a(x-y)+(x-y)=(x-y)(a+1).$$

Как видно, в этом случае надо применить правило перемены знаков перед одними скобками или, еще лучше, применить правило деления противоположных величин.

4. Выражения, стоящие в скобках, — числа противоположные, но одно из них дано в квадрате, например $2n(p-c)^2-(c-p)$; вспомнив, что $(p-c)^2=(c-p)^2$, устанавливаем, что знак перед скобками менять не надо:

$$2n(p-c)^2-(c-p)=2n(c-p)^2-(c-p)=$$
$$=(c-p)\cdot[2n(c-p)-1]=(c-p)(2nc-2np-1).$$

Из типичных случаев еще надо особо разобрать приемы разложения многочленов на множители путем группировки.

1. Группировка членов парами без перемены знаков:

$$ac-ad+bc-bd=a(c-d)+b(c-d)=(c-d)(a+b).$$

2. Группировка членов парами с переменой знаков:

$$ac-ad-bc+bd=(ac-ad)-(bc-bd)=a(c-d)-b(c-d)=$$
$$=(c-d)(a-b).$$

3. Перегруппировка членов многочлена:

$$a(a+c)-p(p+c)=a^2+ac-p^2-pc=(a^2-p^2)+(ac-pc)=$$
$$=(a-p)(a+p)+c(a-p)=(a-p)\cdot(a+p+c).$$

4. Выделение из многочлена полного квадрата:

$$x^2+2xy+y^2-c^2=(x+y)^2-c^2=(x+y+c)(x+y-c);$$

$$25-x^2-2xy-y^2=25-(x^2+2xy+y^2)=5^2-(x+y)^2=$$
$$=(5+x+y)\cdot(5-x-y).$$

Полезно ознакомить учеников с простейшими случаями разложения квадратного трехчлена с целыми коэффициентами Для лучшего усвоения материала можно сначала рассмотреть умножение двух биномов, в каждом из которых второй член — определенное целое число, например:

$$(x+5)(x+6)=x^2+5x+6x+30.$$

Проделав 3—4 подобных упражнения, ученики без труда установят прием обратного преобразования квадратного трехчлена рассмотренного вида в произведение.

Ученики должны знать о том, что при разложении многочлена на множители часто успех зависит от сообразительности и настойчивости, а способов разложения может быть несколько.

С учениками следует выяснить примерный порядок разложения многочлена на множители.

Сначала надо вынести из всех членов общий множитель (если имеется таковой) за скобки, затем проверить, не является ли полученное выражение в скобках квадратом алгебраической суммы членов (при наличии трех членов), или кубом алгебраической суммы двучлена (при наличии четырех членов), или разностью квадратов, или суммой кубов. В случае невозможности заменить полученное выражение при помощи одной из формул сокращенного умножения или деления, надо попытаться применить способ комбинирования (группировки) членов.

Если позволяет время, то полезно решить два-три сложных примера, чтобы показать разнообразие приемов разложения, которые приходится иногда применять.

Пример

$$a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^2(a^4-a^2+2a+2)=a^2[(a^4-a^2)+(2a+2)]=$$
$$=a^2[a^2(a^2-1)+2(a+1)]=a^2[a^2(a+1)(a-1)+2(a+1)]=$$
$$=a^2(a+1)[a^2(a-1)+2]=a^2(a+1)(a^3-a^2+2)=$$
$$=a^2(a+1)(a^3+1-a^2+1)=a^2(a+1)[(a^3+1)-(a^2-1)]=$$
$$=a^2(a+1)[(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)(a+1)]=$$
$$=a^2(a+1)(a+1)(a^2-a+1-a+1)=a^2(a+1)^2(a^2-2a+2).$$

§ 11. Алгебраические дроби

1. Основные свойства алгебраических дробей.

К тождественным преобразованиям относятся и преобразования дробных рациональных алгебраических выражений в курсе VII класса.

Изучая алгебраические дроби, следует разобрать особенность этих дробей в сравнении с арифметическими дробями, хотя многое в отношении их будет устанавливаться по аналогии с последними.

Сначала надо ввести понятие о дробном алгебраическом выражении. Дробное алгебраическое выражение — это такое рациональное выражение, которое содержит частное от деления любого выражения на буквенное выражение; примеры дробных выражений:

$$3a+\frac{4}{b-1}-6,\quad 2x-\frac{x}{x-4}.$$

Алгебраической дробью называется выражение, являющееся частным двух целых выражений, например: $\frac{4}{a-1}$, $\frac{b}{b+2}$, в общем виде $\frac{a}{b}$, где a и b целые выражения и $b\neq 0$.

Затем следует доказать две теоремы.

Теорема 1. Дано: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (две дроби равны). Доказать: $ad=bc$.

Доказательство. $\frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd$, отсюда после деления abd на b и cbd на d получаем $ad=bc$.

Теорема 2. Дано $ad=bc$. Доказать: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Доказательство. $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$; после почленного деления левой и правой частей заданного равенства на bd получаем $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Надо, чтобы ученики поняли, что вторая теорема является обратной первой и читается так: дроби равны, если произведение числителя первой на знаменатель второй равно произведению числителя второй на знаменатель первой.

Существует точка зрения, что доказывать эти теоремы не надо, а следует принять определение: «две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными при условии $ad=bc$». Мы придерживаемся изложения в «Алгебре» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова.

Очень полезно показать на примерах применение 2-й теоремы при сравнении арифметических и алгебраических дробей, в случае когда нужно доказать, что заданные дроби равны.

Примеры. Надо сравнить две арифметические дроби $\frac{161}{259}$ и $\frac{253}{407}$; ученики знают, что в этом случае надо привести дроби к общему знаменателю; но в данном примере получаются громоздкие вычисления и большие числа; по второй же теореме достаточно проверить, являются ли произведения $161 \cdot 407$ и $259 \cdot 253$ равными.

$161 \cdot 407 = 23 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 11$; $259 \cdot 253 = 37 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 11$; очевидно, произведения равны, а значит, и заданные дроби равны.

Пусть надо доказать, что дроби $\frac{ax+ay-bx-by}{cx-dx+cy-dy}$ и $\frac{ap-bp}{cp-dp}$ равны. Можно разложить числители и знаменатели дробей на множители, и после сокращения будет видно, что дроби равны; можно проверить, равны ли соответствующие произведения, однако и в этом случае проще всего разложить на множители полученные выражения.

Следует разъяснить учащимся, что на алгебраические дроби нельзя распространить все зависимости, присущие арифметическим дробям. В отношении алгебраической дроби нельзя решить, правильная или неправильная дробь, так как численное значение дроби зависит от значения букв, входящих в компоненты дроби.

Иногда ученики полагают, что дробь $\frac{3a+20}{2a+20}$ неправильная, а дробь $\frac{a+b}{2a+b}$ правильная. При этом они считают, что в первой дроби числитель больше знаменателя на a, а во второй — меньше на a. Достаточно подставить в первую дробь значение $a=-4$, а затем $a=-13$, чтобы убедиться, что в одном случае получится дробь правильная $\frac{2}{3}$, а в другом дробь неправильная $\frac{19}{6}$; для второй дроби достаточно произвести вычисления при $a=-3$, $b=10$, а затем при $a=-4$, $b=2$, чтобы убедиться в том, что получим дроби $\frac{7}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

Основное свойство алгебраической дроби вытекает из условия тождественного равенства дробей $\frac{a}{b}=\frac{ap}{bp}$.

Читая запись равенства дробей $\frac{a}{b}=\frac{ap}{bp}$ справа налево, имеем: $\frac{ap}{bp}=\frac{a}{b}$, то есть если числитель и знаменатель дроби представляют собой произведения, имеющие общий множитель, то на этот множитель дробь можно сократить и значение ее не изменится. Этого рассуждения достаточно для объяснения сокращения дроби. Сокращения дробей, у которых числитель и знаменатель одночлены, обычно не затрудняют учеников.

При сокращении же многочленных дробей ученики часто допускают ошибки, сокращая слагаемые многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, например: дробь $\frac{a+b}{a}$ после такого сокращения принимает вид b, а дробь $\frac{3a^2+4b}{3a}$ выражается в виде $a+4b$.

Для предупреждения таких ошибок надо вначале тщательно разбирать каждый пример, постоянно подчеркивая, что сокращение есть деление числителя и знаменателя на одно и то же число, не равное 0, а кроме того, требовать перед сокращением дроби разлагать числитель и знаменатель на множители. Полезно провести ряд специальных упражнений, связанных с ответом на вопрос, можно ли сократить данную дробь.

Ученик должен привыкнуть к тому, что для ответа на поставленный вопрос он должен представить числитель и знаменатель в виде произведения (то есть разложить на множители).

Полезно заставлять учеников, допускающих указанные ошибки, делать проверку подстановкой численных значений букв в начальную и сокращенную дроби, а также проверять, получится ли первоначальная дробь после обратного преобразования — умножения числителя и знаменателя на сокращенный множитель. Например, если допущено такое сокращение:

$$\frac{a^2b+c}{a^2}=b+c,$$

то при проверке получим, что $a^2b+c\neq a^2b+a^2c$.

В некоторых случаях для проверки сокращения дроби можно и полезно воспользоваться обратной теоремой, например:

1. Ученик произвел сокращение дроби так: $\frac{3a+20}{2a+20}=\frac{3}{2}$. По теореме полученные дроби равны, если $(3a+20)\cdot 2=(2a+20)\cdot 3$, то есть $6a+40=6a+60$, но это невозможно ни при каких значениях буквы a, следовательно, сокращение выполнено неправильно.

2. Учащиеся произвели сокращение дроби так: $\frac{3a+2b}{2a+b}=\frac{3+2}{2+1}=\frac{5}{3}$.

Положим, $a=4$, $b=1$, получим $\frac{3a+2b}{2a+b}=\frac{14}{9}$, но по обратной теореме $\frac{14}{9}\neq\frac{5}{3}$, следовательно, сокращение произведено неверно.

Пользуясь основным свойством дроби, надо тщательно разобрать перемену знака перед дробью, что тоже трудно усваивают ученики, например:

$$\frac{a}{b}=\frac{a(-1)}{b(-1)}=\frac{-a}{-b};\quad \frac{-a}{b}=\frac{(-a)(-1)}{b(-1)}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Если числитель и знаменатель дроби многочлены то перемена знака перед числителем и знаменателем равносильна перемене знака перед каждым членом многочлена. Ученики иногда делают ошибки, меняя знак только перед одним из слагаемых числителя или знаменателя, например пишут:

$$\frac{a-b}{a+b}=-\frac{a+b}{a+b}.$$

В связи с этим материалом надо обратить внимание учащихся на возможность сократить дробь, когда множители числителя и знаменателя являются противоположными выражениями. В этом случае не следует менять знак у компонентов дроби, а надо сокращать дробь без преобразования:

$$\frac{25-a^2}{a^3-125}=\frac{(5-a)(5+a)}{(a-5)(a^2+5a+5^2)}=\frac{(-1)(5+a)}{(a^2+5a+25)}=-\frac{5+a}{a^2+5a+25}.$$

2. *Сложение и вычитание дробей* следует рассматривать как тождественное преобразование суммы дробей в одну дробь (замена суммы дробей одной дробью).

Прежде чем перейти к сложению и вычитанию алгебраических дробей, необходимо напомнить ученикам правила сложения и вычитания арифметических дробей. Тогда по аналогии легко вывести правила сложения и вычитания алгебраических дробей. При выводе и объяснении этого правила надо рассматривать дробь как частное при делении двух целых алгебраических выражении друг на друга. Рассматривая случай

$$\frac{a+b-c}{p}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p},$$

можно полученное равенство читать справа налево, тогда получим нужное правило для сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

Рассматривая сумму и разность многочленных дробей с различными знаменателями, надо поставить вопрос о замене их равными им дробями с одинаковыми знаменателями.

Так, дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{p}$ легко преобразовать в равные им дроби с одинаковыми знаменателями, используя основное свойство дроби. Получается

$$\frac{a}{b}=\frac{ap}{bp} \text{ и } \frac{c}{p}=\frac{cb}{pb},$$

отсюда

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{p}=\frac{ap}{bp}+\frac{bc}{pb}=\frac{ap+bc}{pb}.$$

Упражнения на сложение и вычитание алгебраических дробей следует начать с дробей, у которых числители — одночлены или многочлены, а знаменатели — одночлены. В случае сложения и вычитания дробей с многочленными знаменателями надо опять требовать от учеников предварительного разложения знаменателей на множители.

При сокращении дробей и сложении их возникает вопрос о наибольшем общем делителе многочленов и наименьшем общем кратном знаменателе дробей. Выделять понятие наибольшего общего делителя многочленов не следует, так как им не пользуются (новая программа и не предусматривает этого понятия).

Что касается наименьшего общего кратного, то для алгебраических дробей следует говорить не о наименьшем общем кратном знаменателе, а о простейшем общем кратном знаменателе, так как численное значение этого общего знаменателя будет зависеть от значений букв, входящих в него. Нет надобности давать какое-либо определение этому простейшему общему знаменателю. Достаточно того, что ученики будут знать, что до приведения дробей к общему знаменателю надо отыскать выражение, которое делилось бы на каждый из знаменателей. При этом оно должно быть наиболее простым. На примерах школьники должны научиться отыскивать такой общий знаменатель. Для этого надо подобрать упражнения с постепенным усложнением многочленных знаменателей.

Однако надо отметить, что термин «наименьшее общее кратное» часто употребляется, в частности и в учебниках; поэтому нужно разъяснить условность его.

При изучении сложения и вычитания дробей с различными знаменателями мы рекомендуем придерживаться такой последовательности: сначала рассмотреть случай, когда знаменатели дробей не имеют общих множителей, например $\frac{3a}{5b}+\frac{2a}{3c}$; затем рассмотреть случай, когда знаменатель одной из дробей является кратным знаменателем остальных дробей, например $\frac{7a}{30b^3}+\frac{2a}{15b^2}+\frac{a}{10b}$; наконец, рассмотреть случай, когда ни один из знаменателей не является кратным остальным, но некоторые (или все) знаменатели содержат общий множитель, например:

$$\frac{2a}{15b^3c}+\frac{2a}{9b^2c^2}-\frac{4a}{12bc^3}.$$

Такой же четкой последовательности следует придерживаться и при изучении сложения и вычитания дробей с многочленными знаменателями.

Примеры. 1. $\frac{3a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}$. 2. $\frac{1+7a}{1-7a}-\frac{1-7a}{1+7a}-\frac{4}{1-49a^2}$.

3. $\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}$.

Полезно ввести определенную схему всех записей при сложении многочленных дробей. Примером такой записи может служить запись, приведенная в «Алгебре» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова.

Пример. Преобразовать алгебраическую сумму дробей

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}.$$

Разложение знаменателей на множители:

$a^2+2a+1=(a+1)^2$ . . . . дополнительный множитель $(a-1)^2$;

$a^2-2a+1=(a-1)^2$ . . . . » » $(a+1)^2$;

$a^2-1=(a-1)(a+1)$ . . . » » $(a+1)(a-1)$.

Общий знаменатель: $(a+1)^2(a-1)^2$.

Сумма дробей после приведения к общему знаменателю:

$$\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a^2-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$

$$=\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{a^4-2a^2+1}=\frac{-7a^2-1}{a^4-2a^2+1}.$$

Среди упражнений на сложение дробей должны быть такие, в которых при приведении дробей к общему знаменателю приходилось бы менять знак перед дробью, например:

$$\frac{3a}{2a-6}-\frac{a-2}{3a+9}+\frac{8a-6}{27-3a^2}.$$

Разложение знаменателей на множители и отыскание общего знаменателя:

$2a-6=2(a-3)$ . . . . . дополнительный множитель $3(a+3)$;

$3a+9=3(a+3)$ . . . . . » » $2(a-3)$;

$27-3a^2=3(9-a^2)=3(3-a)(3+a)$ » » (-1).

Общий знаменатель $3(a-3)(a+3)2=6(a-3)(a+3)$.

Сумма дробей после приведения к общему знаменателю:

$$\frac{3a\cdot 3(a+3)}{2(a-3)(a+3)\cdot 3}-\frac{(a-2)\cdot 2(a-3)}{3(a+3)\cdot 2(a-3)}-\frac{2(4a-3)\cdot 2}{(-1)\cdot 3(3-a)(3+a)}=$$

$$=\frac{9a^2+27a-2a^2+4a+6a-12-16a+12}{6(a-3)(a+3)}=\frac{7a^2+21a}{6(a-3)(a+3)}=$$

$$=\frac{7a(a+3)}{6(a-3)(a+3)}=\frac{7a}{6(a-3)}.$$

Конечно, не следует требовать от учащихся во всех случаях придерживаться этой или какой-либо другой постоянной схемы. В простых случаях дополнительные множители можно вовсе не писать, а преобразования производить устно.

Полезно при изучении дробей обращать внимание на условия, при которых заданные дроби имеют смысл. Так, например, в последнем рассмотренном упражнении дроби имеют смысл только при $a \neq \pm 3$.

3. Умножение и деление алгебраических дробей.

При умножении и делении алгебраических дробей применяются те же правила, что и при умножении и делении арифметических дробей.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b\,d} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Однако надо иметь в виду, что применение к арифметическим дробям a, b, c, d обозначают целые положительные числа, а в применении к алгебраическим дробям буквы выражают любые целые выражения, в частности отрицательные числа. Поэтому правила следует доказать (для учащихся доказательство, может быть, и не следует приводить, а только отметить необходимость его, но сам учитель должен знать). Приводим доказательство правила умножения в общем виде.

Пусть дано произведение двух дробей $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, обозначим это произведение буквой x; тогда справедливо такое равенство: $bdx = bd \times \times \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, переместив сомножители, получим $b \cdot d \cdot x = b \cdot \frac{a}{b} \cdot d \cdot \frac{c}{d}$; по определению действия деления $\frac{a}{b} \cdot b = a$, $\frac{c}{d} \cdot d = c$. Тогда $b \cdot d \cdot x = a \cdot c$ и $x = \frac{ac}{bd}$, что и требовалось доказать.

Доказательство правила деления проводится посредством проверки деления умножением. Действительно, по смыслу деления $\frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \frac{c}{d}$ должно равняться $\frac{a}{b}$, это оказывается верным.

Возведение дроби в степень с натуральным показателем является частным случаем перемножения нескольких дробей, и потому теорема $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$ доказывается просто.

Заметим, что при умножении дробей можно ввести определение: за произведение двух дробей принимается дробь, у которой числитель есть произведение числителей данных дробей, а знаменатель — произведение знаменателей этих дробей.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ В VI и VII КЛАССАХ

§ 12. Пропедевтика и учение об уравнениях в восьмилетней школе

Из всех вопросов школьного курса математики учение об уравнениях занимает наиболее важное место. Действительно, учение об уравнениях непосредственно связано с учением о функциях, оно помогает ученикам понять зависимость между величинами, характеризующими различного рода явления реального мира, и выражения этих зависимостей.

Уравнения также служат одним из источников введения новых чисел Решение их позволяет конкретно применить тождественные преобразования; уравнения дают учащимся наиболее рациональный метод решения задач с конкретным содержанием и позволяют обобщить приемы решения ряда типовых задач.

Решение задачи с помощью составления уравнения требует от ученика рассуждений, сообразительности и прежде всего общего развития учащихся, запаса жизненных представлений, то есть умения представить конкретную ситуацию, изложенную в условии задачи

В решении задачи методом уравнений ученики часто могут идти различными путями и проявить творческую инициативу, изобретательность. Теоретическая и практическая ценность этой темы отражена в учебном плане по математике: из общего числа часов, отведенных на алгебру в VI—VIII классах, $\frac{1}{3}$ приходится на уравнения. Значение уравнений в общем курсе алгебры восьмилетней школы ясно выступает в задачниках П. А. Ларичева, Н. Н. Полозовой и др. В этих задачниках авторы, следуя общему духу программы, вводят решение уравнений и задач на составление уравнений с первых глав, усложняя упражнения по мере расширения представлений учащихся

о числах и о тождественных преобразованиях алгебраических выражений. Современные программы по математике предусматривают решение простейших уравнений в VI классе со второй темы алгебры, с использованием известных ученикам зависимостей между компонентами четырех арифметических действий. Систематическое изучение уравнений отнесено на первую четверть VII класса.

В VI классе тему «Решение уравнений первой степени с одним неизвестным» лучше всего начинать с изучения вопроса о равенствах. Следует обратить внимание учеников на то, что им приходилось много раз встречаться с такими формулами, в которых два алгебраических выражения соединены знаком равенства.

Два алгебраических выражения, соединенные знаком равенства, принято называть равенством. Примерами могут служить следующие равенства: $a(b+c)=ab+ac$; $30-12=18$; $3a+4=2a+a+4$.

Равенства, в которых содержатся только известные числа, называются численными или арифметическими.

Для проверки арифметического равенства проводят вычисления левой и правой частей равенства. Полезно привести примеры, в которых требуется сделать достаточно сложные вычисления для проверки справедливости равенства.

Примеры. 1. $3+5+7+9+11+13+15=\frac{(3+5)\cdot 7}{2}$;

2. $1+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6=\frac{3^7-1}{2}$;

3. $2^4=4^2$;

4. $3^5=5^3$;

5. $3\cdot 35-5=3\cdot 30$;

6. $\frac{48-3}{9}=\frac{48-1}{3}$.

Затем следует показать ученикам, что совсем иначе обстоит дело с равенством, содержащим буквенные выражения; такие равенства могут оказаться верными при одних значениях букв и неверными при других значениях букв, входящих в равенство.

Примеры. 1. $4a+b=2b+a$ верно при $a=1$, $b=3$ и неверно при $a=2$, $b=3$.

2. $x+13=27$ верно при единственном значении $x=14$, но неверно при всех других значениях.

Иногда можно получить равенство, которое становится бессмысленным при некоторых значениях букв, входящих в него.

Так, $ax+3=27$ теряет смысл при $a=0$, так как $0\cdot x+3\neq 27$ ни при каком значении x.

Далее следует остановить внимание учеников на равенствах, верных при любых значениях входящих в них букв, такие равенства называются тождествами Примеры следует привести в первую очередь из ряда арифметических законов, например $a-(b-c)=a-b+c$, $(a-b)c=ac-bc$ и др [1]

Надо отметить, что арифметические равенства представляют тождества

После всех этих рассуждений можно ввести понятие об уравнениях

Но прежде всего необходимо установить, что мы сами понимаем под уравнением и как подвести учеников к этому понятию Существует три отличающихся друг от друга определения

1) Уравнение рассматривается как равенство, справедливое только при некоторых значениях входящих в него букв

2) Уравнение рассматривается как любое равенство, в котором одно или несколько чисел, выраженных буквами, считаются неизвестными, а значения остальных букв (если они имеются) считаются известными

3) Уравнение определяется так вопросительное предложение о том, существуют ли такие значения неизвестной величины, при которых одно выражение равно другому, если существуют, то одно ли, если не одно, то сколько и какие [1]

На первый взгляд, простейшее из указанных определений — первое, казалось бы самое доступное для понимания учащихся, но оно оказывается узким, не охватывает всего объема этого понятия

Ведь понятие уравнения в современной жизни находит многообразные применения при помощи уравнения выражаются зависимости между величинами и значения одних величин находятся по значениям других величин, в виде уравнений записываются многие законы физики, химии, техники, при помощи уравнений задаются кривые и т д

Кроме этого, указанная трактовка уравнения никак не связывает понятие уравнения с понятием функции

Второе определение отражает научную трактовку уравнения, а именно, что уравнение — «равенство между значениями двух функций того или иного числа неизвестных величин», причем в частных случаях одна из функций может равняться постоянному числу (см статью акад А Н Колмогорова в БСЭ, т 56, стр 163)

Третье определение указывает на вопросительный характер равенства, подчеркивая противоположность такого рода равенства тождеству как утвердительному равенству Но в этой трактовке смешивается понятие уравнения с понятием о реше-

[1] См статьи о трактовке понятия уравнения в журнале «Математика в школе», 1959, № 1.

нии уравнения К тому же не всегда можно определить характер равенства заранее и, таким образом, отнести равенство к уравнению или тождеству.

Ученики восьмилетней школы должны быть постепенно подведены ко второму определению понятия уравнения

Однако шестиклассники первоначально знакомятся с понятием уравнения при решении задач, в которых приходится отвечать на некоторый вопрос, поставленный в условии задачи, и потому на первом этапе изучения уравнений целесообразно показать вопросительный характер равенства.

В дальнейшем изучении математики понятие уравнения должно уточняться и расширяться в связи с изучением законов физики ученики знакомятся с выражением зависимости между физическими величинами, при изучении функции и их графиков учащиеся увидят, что равенства, содержащие неизвестные (переменные) величины, могут служить средством задания функций и изучения свойств функций. Таким образом, ученики, оканчивающие восьмилетнюю школу, получат достаточно широкое представление об уравнении, необходимое им в общем комплексе знаний по основам наук, таких знаний, которые будут нужны им в практической жизни.

К определению уравнения нужно подвести учеников постепенно, расширяя это понятие, но учитель заранее должен знать, к чему он ведет их, поэтому он должен выбрать ту или иную точку зрения на уравнения и придерживаться ее. От выбранной точки зрения будет зависеть подготовительная работа, которую учитель будет вести с учениками V и VI классов в плане пропедевтики темы «Уравнения».

Мы рекомендуем второе определение уравнения. В классе, где ученики впервые встречаются с термином «уравнение», следует дать определение уравнению с одним неизвестным. (Равенство, в котором одно число, выраженное буквой, считается неизвестным, а значения остальных букв считаются известными, называется уравнением с одним неизвестным.)

Понятие об уравнении проще всего устанавливается при решении задач. При согласованной работе учителя математики с учителями начальных классов представление об уравнении можно создать очень рано Так, при решении примеров на вычисление различных компонентов действий полезно придавать записям условий такой вид

$$x+5=7;\ 36:x=4;$$
$$27-x=13,\ x:6=9$$

и читать эти условия в форме вопроса, например: к какому числу надо прибавить 5, чтобы получить 7? Какое число надо разделить на 6, чтобы получить 9?

В V классе решаются примеры, которые представляют собой простейшие уравнения, например:

$$4{,}75+x+5{,}05=24{,}1;$$
$$a-(4{,}6-0{,}9)=10.$$

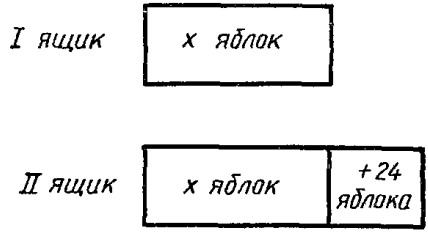
В IV и V классах некоторые задачи, особенно типовые, иногда решают с введением обозначения неизвестной величины буквой, например x, что уже представляет собой скрытое решение уравнений [1].

Разберем в качестве примера такую задачу.

«В двух ящиках 126 яблок. В одном на 24 яблока больше, чем в другом. Сколько яблок в каждом ящике?»

Решается эта задача заменой или предположением, но оформить решение можно так, что получим уравнение.

Изобразим условие графически:



Всего яблок $x+(x+24)=x+x+24=2x+24$.

В общее количество яблок входит удвоенное количество яблок из первого ящика и еще 24 яблока; все это количество составляет 126 яблок. Значит,

$$2x+24=126.$$

Удвоенное количество яблок из первого ящика равно:

$$2x=126-24;\ 2x=102 \text{ (яблока)},$$

а количество яблок в первом ящике равно:

$$x=102:2=51 \text{ (яблоко)}.$$

Количество яблок во втором ящике равно:

$$x+24=51+24=75 \text{ (яблок)}.$$

Задач подобного рода можно найти много в любом задачнике. В IV и V классах нельзя обращать решение полученного «уравнения» в механизм с таким рассуждением, что

$$2x=126-24, \text{ отсюда } x=\frac{102}{2}=51,$$

[1] О. Т. Бочковская, Решение арифметических задач в IV классе. Сб. статей по арифметике, изд Ленинградского городского института усовершенствования учителей, 1947.

то есть отвлекаться от смыслового значения выражения $2x$ и x, или пользоваться механически зависимостью между компонентами действий (что вообще в простейших случаях не исключено даже и в этих классах, но обычно вводится в VI классе, когда ученики будут иметь первоначальное понятие об уравнении).

В V классе для ознакомления с уравнением следует использовать и геометрический материал: задачи, связанные с нахождением площадей прямолинейных фигур — прямоугольника и треугольника, площади поверхности и объема прямоугольного параллелепипеда и куба.

Примерами таких задач могут быть следующие:

«Найти площадь прямоугольника, если периметр его равен 64,8 *дм*, а высота меньше основания на 1,2 *дм* (или в 3 раза). Используя чертеж и обозначая основание буквой x, получаем простенькое уравнение, понятное пятиклассникам».

«Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если известно, что три его неравных ребра отличаются друг от друга на 1 *дм*, а сумма их равна 12 *дм*».

Изобразив неравные ребра в виде отрезков и обозначив меньшее буквой x, учащиеся легко приходят к уравнению

$$x+(x+1)+(x+1+1)=12.$$

Как уже было выше сказано, в V классе нет надобности даже вводить термин «уравнение», а ограничиться термином «равенство».

Приводятся и возражения против раннего обозначения неизвестной величины буквой и против решения в V классе некоторых задач при помощи уравнений. Противники алгебраического метода решения задач указывают на то, что ученики V класса не понимают, что значит «обозначить неизвестную величину буквой» или «примем за меру измерения число x (пока неизвестное нам)»; они считают, что при решении задач с помощью уравнений приходится делать приведение подобных членов, как это якобы имеет место в приведенной нами задаче с яблоками.

Однако опыт достаточно большого числа учителей подтверждает, что буквенное обозначение неизвестной величины при решении многих задач по арифметике в V классе значительно облегчает рассуждения, объяснения и особенно записи этих объяснений, при этом нисколько не снижая понимания.

В самом деле, обычно при решении задачи, подобной задаче с яблоками, вводится такое рассуждение. Примем количество яблок в одном ящике за единицу, тогда во втором ящике будет яблок такая единица да еще 24 яблока. Иногда вместо единицы говорят «часть»; ученики в этих случаях иногда не

понимают, что это за единица участвует в рассуждениях, не понимают, о какой части и части чего идет речь.

Обозначая же неизвестную величину буквой x, мы вводим некоторую единицу счета; в рассмотренной задаче за единицу счета принято количество яблок в 1 ящике. Такое рассуждение, как нам кажется, значительно доступнее для пятиклассников.

Что касается приведения подобных членов, то в V классе об этом не идет речь, но ученики на этом этапе развития интуитивно понимают, что $x+x$ составляет $2x$. Нет надобности говорить о том, что в курсе арифметики VI класса обозначение неизвестных буквой широко применяется в задачах, решение которых связано с составлением пропорций, причем получается уравнение, которое никого не смущает.

Программа VI класса предполагает введение понятия уравнения и ознакомление учеников с некоторыми формальными приемами решения уравнений.

Подойти к вопросу об уравнениях в VI классе можно путем решения таких задач.

1. Известно, что полупериметр прямоугольника — это сумма двух неравных сторон его.

Пусть

длина основания прямоугольника a,
высота » h,
полупериметр » p.

Чему равно p, если $a=8$ *см*, $h=2$ *см*?

(Ответ: $p=10$ *см*.)

Заполнить таблицу. Сформулировать условие для каждой задачи и определить значение неизвестной величины.

a	h	p
x	7	18
5	x	20
8	11	x

Отмечаем, что все три задачи могут быть решены.

2. Скорость поезда при равномерном движении его v.

Время движения поезда t.

Пройденное расстояние за t единиц времени S.

Чему равно S, если $v=42$ *км*; $t=8$ *ч*?

(Ответ: 336 *км*.)

Заполнить таблицу.

v	t	S
x	4	166
2,5	x	100
3,2	10,5	x

Отмечаем, что все три задачи могут быть решены.

3. Решим задачу: в магазине крупы a *кг*, муки b *кг*, конфет c *кг*.

Чему равно a, если $b=64$ *кг*, $c=47$ *кг*?

a	b	c
x	42	96
49	x	161
32	56	x

Заполнить таблицу.

Отмечаем, что в каждом случае x может быть любым числом.

При решении этих задач следует объяснить ученикам, что первую и вторую задачи оказалось возможным решить потому, что величины в условиях были связаны друг с другом, зависимы друг от друга и эта зависимость могла быть выражена в 1-й таблице так:

$$a=p-h, \text{ или } h=p-a, \text{ или } a+h=p.$$

Во 2-й таблице зависимость между величинами могла быть выражена так:

$$v=\frac{S}{t}, \text{ или } t=\frac{S}{v}, \text{ или } S=vt.$$

В 3-й таблице величины, указанные в условии, не связаны друг с другом (независимы), и поэтому оказалось невозможным решить задачи и невозможным выразить зависимость, так как ее не существует.

Следует обратить внимание на то, что для решения каждой из задач из 1 и 2-й таблиц мы составляли равенство, в котором одно число, выраженное буквой, считалось неизвестным, а значения остальных букв были известны; каждое равенство имело левую и правую часть. Для составления этих равенств мы использовали каждый раз зависимость между величинами, указанную в условии.

После нескольких подобных упражнений на решение задач, приводящих к уравнению, можно дать указанное выше определение уравнения с одним неизвестным.

Необходимо отметить, что из рассмотренных задач видно, что одна и та же зависимость между величинами может быть выражена различными уравнениями, однако решение задачи не зависит от вида уравнения. Эти соображения весьма полезны в последующем изучении уравнений и при решении задач на составление уравнений.

Затем следует решить задачу примерно такого характера:

«В двух отрядах 60 пионеров. В одном больше, чем в другом, на 6 человек. Сколько пионеров в каждом отряде?»

Если обозначим число пионеров в меньшем отряде буквой x, то в большем отряде их будет $x+6$, а число пионеров в обоих отрядах выразится так: $x+(x+6)$. Это число равно 60, то есть $2\cdot x+6=60$.

Получим уравнение, содержащее неизвестную букву x, значение которой нам надо найти; причем это значение должно быть таким, при котором левая часть уравнения должна стать численно равной правой части.

Найти значение неизвестного, при котором левая часть уравнения будет иметь то же числовое значение, что и правая часть, значит решить уравнение.

Значение неизвестного, при котором обе части уравнения имеют одно и то же числовое значение, называется корнем уравнения. Иначе говоря, решить уравнение — это значит найти корень его. Хотя решение уравнения с одним неизвестным в VI классе основано на знакомых ученикам зависимостях между компонентами действий, надо все необходимые рассуждения тщательно отработать и в дальнейшем время от времени требовать от учеников проводить эти рассуждения самостоятельно.

Так, решение данного уравнения должно сопровождаться такими рассуждениями.

Левая часть уравнения состоит из двух слагаемых — одного известного и другого неизвестного, в правой части уравнения — сумма этих слагаемых. Неизвестное слагаемое $2x$ равно сумме 60 без известного слагаемого, то есть

$$2x=60-6;\ 2x=54.$$

Получили новое уравнение, левая часть которого состоит из двух сомножителей — одного неизвестного, другого известного; правая часть уравнения есть произведение этих сомножителей. Неизвестный сомножитель равен частному от деления произведения 54 на известный сомножитель 2. Получим $x=\frac{54}{2}$, $x=27$. Нашли корень уравнения 27.

Проверим, верно ли решено уравнение. Для этого в первоначальное уравнение вместо x подставим найденное значение его 27 и вычислим левую часть:

$$2x+6=2\cdot 27+6=60.$$

Получили число, равное числу в правой части уравнения. Уравнение решено верно.

Ответ для задачи. В отрядах было 27 пионеров и 33 пионера.

Полезно решить задачу, которая привела бы к уравнению, содержащему неизвестное в обеих частях его, например:

«В двух пачках денег равное количество казначейских билетов: в одной пятирублевые, в другой трехрублевые. Когда взяли из первой пачки 20 руб., в пачках остались равные суммы денег. Сколько казначейских билетов было в каждой пачке?»

Обозначим количество билетов в каждой пачке буквой x. Тогда, согласно условию, получим уравнение $5x-20=3x$. При решении уравнения будем рассуждать так:

Вычитаемое 20 равно уменьшенному $5x$ без остатка $3x$; то есть

$$20=5x-3x, \text{ или } 20=2x.$$

Дальше, как и в предыдущей задаче, получаем $x=10$ Чтобы проверить, верно ли решено уравнение, вычислим отдельно каждую часть исходного (первоначального) уравнения, подставив вместо x найденное значение 10. Получим

$$5x-20=5\cdot 10-20=30;\ 3x=3\cdot 10=30.$$

Обе части уравнения приняли одинаковое числовое значение, значит уравнение решено верно Проверяем, является ли найденное значение неизвестной ответом на задачу.

Некоторые учителя в процессе решения уравнений обращают внимание учеников на то, что простейшие рассуждения приводят всегда к «перемещению» членов уравнения из одной части в другую с противоположным знаком, и в дальнейшем этим пользуются механически, не затрагивая вопроса о свойстве уравнения. Механический перенос членов уравнения освобождает от утомительных рассуждений и может быть введен в VI классе.

Дальше остается тренировать учащихся в решении уравнений и задач на составление уравнений, не усложняя чрезмерно условий задач, но усложняя задаваемые уравнения соответственно изучаемым тождественным преобразованиям Следуя этому принципу, мы получим примерно такую последовательность простейших уравнений:

$$x+3=7;\ 3x=9;\ 2x+3=13;\ 8-6x=10;\ 5x-4=11;$$
$$\frac{1}{2}x+4=6\frac{1}{2};\quad 9+3\frac{1}{4}x=35,\quad 6x+15=3 \text{ и т. д.}$$

Уравнения, связанные с приведением подобных членов:

$$5x+2x=14,\ 8+7x-34=30,\ 5y+7-8y+6y=13,$$
$$5x+13-2x+8+3x=4x+51-4x.$$

Уравнения, связанные со сложением многочленов:

$$(3x+8)+(2x-5)=13;\ x+(x-8)=16,\ 3x-(x-4)=42;$$
$$21x-(9-3x)=15;\ (3x+1)+(5x-8)-(x-4)=48.$$

Уравнения, связанные с умножением многочленов:

$$(3x+2)(2x-2)-6x(x-1)=33;\ (3x-2)^2+9x(2-x)=8;$$
$$(x-3)^3-x^2(x-9)=-18,\ (2x+3)^2-(2x+5)(2x-5)=38 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что при подборе примеров следует вводить для обозначения неизвестной различные буквы (x, y, m и др.) и иногда помещать неизвестную в правой части уравнения.

В современных задачниках уравнения расположены в указанной системе. В VI классе можно ограничиться решением таких уравнений, в которых неизвестная буква после упрощения каждой части отдельно оказывается в одной части уравнения, то есть уравнений, не связанных с перенесением неизвестной из одной части уравнения в другую. Количество заданных уравнений для решения должно быть значительно больше, чем задач с конкретным условием. Учащиеся должны приобрести хорошие навыки в решении уравнений, так как, только обладая этими навыками, они овладевают решением задач на составление уравнений.

Как уже указано было выше, в VI классе задачи не должны приводить к уравнениям сложного вида, в частности к уравнениям с дробными членами (когда неизвестная буква входит в знаменатель дроби). Решать же уравнения с дробными коэффициентами весьма полезно. Для примера приведем задачу допустимой сложности в VI классе.

«За 3 *м* шерстяной и 5 *м* шелковой ткани заплатили 136 руб Сколько стоит метр каждой материи, если цена шерстяной материи больше цены шелковой на 24 руб.?»

Условие приводит к уравнению: $5x+3(x+24)=136$.

При решении подобных уравнений используются простейшие преобразования: умножение многочленов, приведение подобных членов и др.

§13. Систематическое изучение уравнений

Систематическое изучение уравнений является первой темой программы по алгебре в VII классе. Начать изучение материала надо с повторения того, что ученики знают об уравнениях из VI класса: определение уравнения, что выражает уравнение, что значит решить уравнение, что называется корнем или решением уравнения. Весь этот материал повторить надо в связи с решением нескольких уравнений, например $x(3x+4)-$ $-3x(x-2)-12=8$.

Далее следует рассмотреть вопрос о числе корней уравнения первой степени с одним неизвестным.

Для этого прежде всего подмечается, что все решенные уравнения после упрощений (открытия скобок, приведения подобных членов) принимали один и тот же общий вид $ax+b=0$, при этом $a\neq 0$; во всех этих случаях уравнения имели единственный корень $x=-\frac{b}{a}$. Полезно здесь же посредством контрольных вопросов выяснить, может ли корень уравнения быть равным 0; 1; —1, правильной дробью, неправильной дробью, отрицательным числом, положительным числом, и при каких условиях получается тот или другой ответ.

Имея в виду, что при рассмотрении вопроса о равносильности уравнений придется встретиться с уравнениями выше первой степени, надо показать ученикам, что встречаются уравнения с одним неизвестным, но в которых неизвестное не только в первой степени, но и во второй и в третьей степени. Пример: уравнение $(x-3)(x+5)=0$ после открытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $x^2+2x-15=0$. Можно отметить, что такое уравнение называется квадратным. Следует объяснить, что произведение двух множителей только в том случае может равняться нулю, если один из множителей равен нулю и заданное равенство — уравнение $(x-3)\cdot(x+5)=0$ — может быть верным только в том случае, если $x-3=0$ или $x+5=0$, откуда следует, что $x=3$ или $x=-5$. Других корней быть не может. Встречаются уравнения, которые имеют три, четыре и более корней. Затем дается понятие и определение равносильности уравнений. Для этого рассматриваются различные уравнения, например:

1) $x+3=14$ и $3x-6=27$;
2) $(x-2)\cdot(x-6)=0$ и $7(x-2)(x-5)=0$;
3) $x-3=5$ и $(x-2)\cdot(x-3)=0$;
4) $(y-2)\cdot(y-7)=0$ и $y-3=4$.

Обычно для учащихся трудно формулировать определение равносильности; поэтому, как нам представляется, можно дать такое определение: «Уравнения, которые имеют только одинаковые корни, называются равносильными»; но при этом надо тщательно разъяснить, пользуясь рассмотренными примерами, что слово «только» значит, что каждый корень одного уравнения является корнем другого и каждый корень второго уравнения является корнем первого.

Далее следует привести пример, когда для решения уравнения при помощи зависимости между компонентами действий требуются продолжительные рассуждения и громоздкие преобразования; таким уравнением может служить следующее: $\frac{2x+15}{3}=4x-5$. Это уравнение имеет корень $x=3$, при этом значении x уравнение обращается в тождество $7=7$.

Затем рассматриваются два свойства уравнений, позволяющие преобразовывать уравнение в более простое, но равносильное начальному, то есть при этих преобразованиях уравнение не может приобрести новые корни, не может и потерять своих корней.

Рассуждение ведется такое: прибавим к каждой части заданного уравнения по 25, получим новое уравнение, которое назо-

вем выводным: $\left(\frac{2x+15}{3}\right)+25=(4x-5)+25$. Так как при $x=3$ выражения в скобках останутся равными 7, то после прибавления по 25 к каждой части уравнения получим тождество $32=32$. Таким образом и для выводного уравнения корень $x=3$ сохранится.

Прибавим к каждой части начального уравнения по многочлену x^2-x+4. Новое уравнение $\left(\frac{2x+15}{3}\right)+(x^2-x+4)=(4x-5)+$ $+(x^2-x+4)$ при $x=3$ обращается опять-таки в тождество $17=17$, так как многочлен x^2-x+4 при $x=3$ равен 10. Очевидно, что корень начального уравнения не теряется, если к каждой части уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен, содержащий неизвестное. Остается проверить, не может ли начальное уравнение приобрести новый корень, если к обеим частям уравнения прибавляется (или вычитается) одно и то же число или один и тот же многочлен, содержащий неизвестное. Допустим, что начальное уравнение при прибавлении к обеим частям уравнения 25 (или многочлена x^2-x+4) приобрело еще новый корень $x=2$; тогда для перехода от выводного уравнения к начальному достаточно вычесть из каждой части выводного уравнения по 25 (или по многочлену x^2-x+4) и, согласно выведенному свойству уравнения, оно не может потерять корень $x=2$, а мы знаем, что начальное уравнение имеет только корень $x=3$.

Можно вывод первого свойства и упростить. Рассмотрим уравнение $3x-2=7$. Пользуясь рассуждениями, известными ученикам из VI класса, получим $x=3$. Прибавим к каждой части уравнения, например, 5 Получим новое уравнение $3x-2+5=$ $=7+5$; решением нового уравнения будет $x=3$. Как видно, данное и выводное уравнения имеют только один корень $x=3$.

Рассмотрим уравнение $10-3x=2x$, корень его $x=2$. Прибавим к каждой части уравнения $8x$. Получим $10-3x+8x=2x+8x$; $10+5x=10x$; $10=10x-5x$; $10=5x$; $x=10:5$; $x=2$. Как видно, при прибавлении к каждой части уравнения целого выражения, содержащего неизвестное, получается новое уравнение, имеющее только один корень, при этом такой же, как и начальное уравнение. Сформулировав первое свойство уравнения, показываем, как пользоваться следствием из него для упрощения техники решения уравнения. Пусть имеем уравнение $2x-7=5$ Пользуясь первым свойством уравнения, к левой и правой части его прибавим по 7. Получим

$$\begin{array}{r} 2x \quad 7=5 \\ +7=+7 \\ \hline 2x=5+7 \end{array}$$

Решим ряд уравнений по такой же схеме:

$$\begin{array}{l} 3x+12=48 \\ \quad -12=-12 \\ \hline 3x=48-12 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5x=20-x \\ \quad +x=+x \\ \hline 5x+x=20 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7x-2=3x+38 \\ \quad +2=+2 \\ \hline 7x=3x+38+2 \\ \quad -3x=-3x \\ \hline 7x-3x=38+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7x-2x=21-2x \\ \quad +2x=+2x \\ \hline 7x=21. \end{array}$$

Дальнейшее решение полученных уравнений на этом этапе надо вести на основании зависимости между компонентами действия умножения.

Сопоставляя каждый раз исходное уравнение с полученным после преобразования, выводятся следствия из первого свойства:

а) Члены уравнения можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя при этом знак этих членов на противоположный.

б) Два равных члена, стоящих в обеих частях уравнения с одинаковыми знаками, можно опустить.

Второе свойство уравнения следует вывести после нескольких упражнений на применение первого свойства. В тех случаях, когда приходится скрыто им пользоваться, опираться следует по-прежнему на зависимость между компонентами действия умножения.

Второе свойство уравнения — если обе части уравнения умножить или разделить на какое-нибудь число, не равное нулю, то в результате получится новое уравнение, имеющее только тот же корень, что и исходное, может быть выведено одним из приемов, использованных при выводе первого свойства. В любом случае надо объяснить, почему делается оговорка «не равное нулю»: при умножении на нуль получается уравнение, которое удовлетворяется при любом значении неизвестного, то есть получается тождество.

Таким образом, умножение на нуль нарушает равносильность. Разобрав даже часть материала о свойствах уравнения, ученики получают возможность расширить круг задач и решать несложные уравнения с численными дробными коэффициентами, например:

$$\frac{x+17}{5}=\frac{3x-17}{4}-2.$$

Вначале необходимо требовать от учащихся, чтобы они обе части уравнения умножали на наименьшее кратное знаме-

нателей дробных членов, что приводит к такой последовательности в записи:

$$\frac{x+17}{5}\cdot 20=\left(\frac{3x-17}{4}-2\right)\cdot 20;\quad \frac{(x+17)\cdot 20}{5}=\frac{(3x-17)\cdot 20}{4}-2\cdot 20;$$

$$(x+17)\cdot 4=(3x-17)\cdot 5-2\cdot 20 \text{ и т. д.,}$$

или сразу переходили ко второй строке этой записи, где показано, что каждый член уравнения множим на одно и то же постоянное число.

Надо предупредить распространенную ошибку школьников, когда они рассуждают так: «Чтобы освободиться от дробных членов, приведем их к общему знаменателю и отбросим его». Последнее рассуждение приводит к тому, что они умножают на наименьшее кратное знаменателей только члены с дробными коэффициентами, оставляя без изменения остальные члены. Решая с такой ошибкой, они получают:

$$\frac{3x-7}{4}-\frac{x+17}{5}=2;\quad (3x-7)\cdot 5-(x+17)\cdot 4=2$$

или

$$\frac{x+4}{5}-x+5=\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{2};\quad (x+4)\cdot 6-x+5=(x+3)\cdot 10-(x-2)\cdot 15,$$

что неверно.

Полезно отметить, что тождественные преобразования в каждой части уравнения не нарушают равносильности уравнения. Следует иметь в виду, что программы предусматривают в основном решение уравнений с численными коэффициентами.

Вслед за изучением алгебраических дробей рассматриваются уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе членов уравнения. В связи с решением этого вида уравнений и задач на составление уравнений следует снова вернуться к вопросам теории уравнений, связанным с умножением обеих частей уравнений на целое выражение, содержащее неизвестное.

Свойство это надо опять разобрать на конкретном примере. Пусть нам дано исходное уравнение $3x-2=7$. Решим это уравнение (найдем его корни) $3x=7+2$; $3x=9$; $x=3$.

Умножим обе части исходного уравнения на $2x-8$, получаем новое (выводное) уравнение

$$(3x-2)(2x-8)=7\cdot(2x-8).$$

Перенесем член из правой части в левую:

$$(3x-2)(2x-8)-7\cdot(2x-8)=0.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$(2x-8)\cdot(3x-2-7)=0.$$

Это приводит к тому, что либо $2x-8=0$, либо $3x-2-7=0$. Решая каждое из полученных уравнений, получаем $x=4$; $x=3$. Оба корня удовлетворяют выводному уравнению, но только один из них ($x=3$) удовлетворяет исходному.

Таким образом, умножение обеих частей уравнения на целое выражение, содержащее неизвестное, привело к получению постороннего корня ($x=4$). При этом следует обратить внимание учеников на то, что посторонним корнем является как раз то значение неизвестной, которое обращает введенный сомножитель в нуль.

$$(3x-2)(2x-8)=7(2x-8).$$

Приняв выведенное уравнение за исходное, можно показать, что при делении обеих частей уравнения на целое выражение, содержащее неизвестное, возможна потеря корня; потерянным решением явится то значение неизвестной, при котором это выражение равно нулю.

При решении уравнения $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$ обе части его приходится умножать на $(x-5)(x-6)$. Получаем корень $x=10$, что удовлетворяет исходному уравнению.

При решении же уравнения $1-\frac{x-3}{2-x}=\frac{3x-7}{x-2}$ приходится умножать обе части его на $2-x$; при этом получится $x=2$. Проверка исходного уравнения покажет, что это значение x лишает смысла обе части уравнения, то есть приводит к выводу, что уравнение не имеет решения. Полезно обратить внимание учащихся на то, что можно было бы заранее до решения уравнения установить следующее.

В первом случае из области возможных значений x исключаются числа 5 и 6. Получив значение $x=10$, можно было бы не делать проверку.

Во втором случае исключалось значение $x=2$. Получив его, без проверки можно утверждать, что уравнение не имеет решения. Полезно показать ученикам (но не обязательно), что после прибавления к обеим частям уравнения выражения, содержащего неизвестное в знаменателе, получается новое уравнение, иногда имеющее не только те корни, что исходное Так, уравнение $2x-3=9$ имеет корень $x=6$. Прибавим к обеим частям уравнения $\frac{1}{x-6}$.

Получим новое уравнение

$$2x-3+\frac{1}{x-6}=9+\frac{1}{x-6}.$$

Но для этого уравнения корень исходного уравнения $x=6$ не является корнем, так как при этом значении неизвестного

выражение $\frac{1}{x-6}$ не имеет смысла. Таким образом, при прибавлении указанного выражения к обеим частям исходного уравнения мы получили новое уравнение, потеряв корень исходного уравнения. Если же последнее уравнение принять за исходное и вычесть из каждой части уравнения дробь $\frac{1}{x-6}$, то получим новое уравнение, для которого корнем будет $x=6$, что не является корнем исходного уравнения, то есть приобретем посторонний корень.

В итоге проведенных рассуждений можно сформулировать такой вывод.

1) Умножение (деление) обеих частей уравнения на многочлен, содержащий неизвестное, может привести к приобретению (потере) корней. При этом приобретенными (потерянными) корнями могут быть только те значения неизвестной, при которых этот многочлен равен нулю.

2) Прибавление к обеим частям уравнения выражения, содержащего неизвестное в знаменателе, может привести к потере или приобретению корня. При этом таким корнем могут быть только те значения неизвестной, при которых знаменатель этого выражения равен нулю.

(Подробное изложение вопросов равносильности уравнений и причин нарушения равносильности можно найти в «Алгебре» Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского, ч. 1, стр. 138—141, Учпедгиз, 1951.)

При изучении равносильности уравнений ученики неминуемо встретятся со случаем, когда уравнение не имеет решения. Полезно специально остановиться на уравнениях, не имеющих решения и имеющих бесчисленное множество решений.

Надо рассмотреть уравнения различных степеней, хотя бы два, например: $x=x+3$ и $x^2=x^2+3$; учащиеся понимают, что от прибавления числа 3 любое число увеличивается, поэтому ясно, что каково бы ни было x, число $x+3$ не может равняться x и число x^2+3 не может равняться x^2; таким образом, равенства не имеют смысла, и в этих случаях принято говорить, что оба уравнения не имеют корней, не имеют решений.

Рассматривая два уравнения $3x+2=2x+x+2$ и $x^2+5=x^2+5$, нетрудно установить, что любое число является для того и другого уравнения корнем, так как, подставляя в эти уравнения вместо x любое число, получаем верное равенство — тождество Но отсюда следует, что сами заданные уравнения являются не чем иным, как тождеством; в этих случаях говорят, что уравнение имеет бесконечное множество решений.

В связи с этим полезно дополнить знания учащихся о равносильности уравнений: к равносильным уравнениям относятся и такие уравнения, которые не имеют решений и которые имеют

бесконечное множество решений. Однако учителю надо иметь в виду, что встречаются уравнения, которые имеют бесчисленное множество корней, но эти множества «не равномощны», как например $|x|=x$ и $3x+2=3x+2$, и поэтому эти два уравнения неравносильны.

В некоторых учебниках (например, в «Алгебре» Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского) специально рассматривается вопрос о числе решений уравнений первой степени с одним неизвестным и делается вывод, что такое уравнение «либо имеет единственное решение, либо вовсе не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений». Однако такой вывод противоречит основной теореме алгебры о числе корней многочлена, и делать такой вывод мы не рекомендуем. Наоборот, показав общий вид уравнения 1-й степени с одним неизвестным $ax+b=0$, где $a\neq 0$, следует подчеркнуть, что из этого равенства вытекает, что $x=\frac{b}{a}$. Это выражение при указанном условии относительно a всегда имеет смысл, и значение x единственное, так как частное всегда однозначно. Другое дело показать, что встречаются такие уравнения, которые не имеют вовсе решений или имеют бесконечное множество решений. Вот поэтому рассмотрение таких уравнений мы отделили от рассмотрения уравнения 1-й степени с одним неизвестным.

Случаи, когда уравнение не имеет решения или имеет бесчисленное множество решений, хорошо разобрать на конкретных задачах. Решим такую задачу:

«Найти высоту прямоугольника с основанием $3\frac{1}{2}$ *м*, периметр которого в два раза меньше периметра квадрата со стороной, равной высоте прямоугольника».

Решение. Обозначим буквой x сторону квадрата, тогда периметр его будет $(4x)$ *м*, а периметр прямоугольника $(7+2x)$ *м*. Согласно условию составим уравнение $\frac{1}{2}\cdot 4x=7+2x$ или $2x=7+2x$, но это невозможно.

Следовательно, составленное уравнение не имеет решений.

(Ответ. Прямоугольника, обладающего указанным свойством, не существует.)

Решим такую задачу:

«Найти дробь со знаменателем 10, которая не изменится, если к числителю прибавить 0,1, а к знаменателю число, обратное ее числителю».

Решение. Если примем за x неизвестный числитель искомой дроби, то искомая дробь будет $\frac{x}{10}$, а измененная $\frac{x+0,1}{10+\frac{1}{x}}$.

По условию эти дроби должны быть равны, т. е.

$$\frac{x+0,1}{10+\frac{1}{x}}=\frac{x}{10}.$$

Освободив уравнение от дробей, получим

$$10x+1=10x+1,$$

то есть тождество. Значит, букве x можно придавать какие угодно численные значения и поставленным в задаче условиям удовлетворяет любой числитель.

Необходимо параллельно с решением уравнений с численными коэффициентами постепенно вводить несложные уравнения с буквенными коэффициентами. Это диктуется следующими соображениями.

В том случае, когда уравнения с буквенными коэффициентами решаются после того, как завершено изучение уравнений с числовыми коэффициентами, у учеников складывается впечатление о буквенных уравнениях как об особых уравнениях. Им труднее применять к ним приемы решения, которыми они пользовались при решении числовых уравнений. При параллельном решении уравнений с числовыми и буквенными коэффициентами решение последних не вызывает затруднений.

Такой порядок решения уравнений дает возможность научить школьников решать задачи с конкретным условием, в общем виде используя для этого различного рода зависимости из смежных предметов: физики, химии, техники.

Но при этом надо приучить учеников определять, при каких условиях (при каких значениях букв) полученные значения корней имеют смысл.

Приведем примеры решения уравнений с буквенными коэффициентами.

1. Имеем уравнение $ax+bp=ap+bx$. Решая его, получим

$$(a-b)x=p(a-b).$$

Рассуждаем так:

а) Если $a-b\neq 0$, то $x=\frac{p(a-b)}{a-b}$; $x=p$.

б) Если $a=b$, то уравнение примет вид тождества $0\cdot x=0$, что справедливо при любом значении неизвестной x.

2. Имеем уравнение $2ax-ab+a=b(4x-a+2)$. Решая его, получим

$$a-ab-2b+ab=2x(2b-a);\ a-2b=2x(2b-a).$$

Рассуждаем так:

а) Если $2b-a\neq 0$, то $x=\frac{a-2b}{2(2b-a)}$; $x=-\frac{1}{2}$.

б) Если $2b-a=0$, то уравнение примет вид тождества $0=2x\cdot 0$ и, следовательно, x может равняться любому числу.

3. Имеем уравнение $\frac{b-x}{a+x}+\frac{c-x}{a-x}=\frac{c(x+a)-2a^2}{a^2-x^2}$.

После преобразований уравнение примет вид $(2a+b)\cdot x=a(2a+b)$.

Рассуждаем так:

а) Если $2a+b\neq 0$, то $x=\frac{a(2a+b)}{2a+b}$; $x=a$, но при этом значении x исходное уравнение теряет смысл.

б) Если $2a+b=0$, то x может равняться любому числу, кроме $x=\pm a$.

Такого рода исследование ответа для каждого отдельного уравнения допустимо в VII классе, при этом надо тщательно разобрать вопрос о значении x при $2a+b=0$. Ученики с трудом понимают, что в этом случае x — любое число. Исследование в общем виде программой не предусмотрено. Некоторые учителя вводят понятие об области допустимых значений неизвестной в уравнении; нам представляется, что устанавливать область допустимых значений для каждого уравнения до решения его не следует, ибо эти рассуждения загромождают решение, часто требуют особых записей, а практического значения для курса восьмилетней школы не имеют.

Мы обращаем внимание учителя на то, что не следует употреблять такие записи: «при $a-b=0$ $x=\frac{0}{0}$», тем более употреблять в таком случае термины «значение x неопределенное», «$\frac{0}{0}$ это неопределенность». В случае, когда уравнение после преобразований принимает вид $ax=b$ и по условию $a=0$, надо говорить, что уравнение не имеет смысла, а в случае, когда уравнение принимает вид $ax=b$ и по условию $a=b=0$, следует писать $0\cdot x=0$, что является тождеством, и потому x может быть любым числом.

Параллельно с решением уравнений необходимо решать задачи на составление уравнений.

В VI классе, если и решаются уравнения с буквенными коэффициентами, то не следует брать уравнения, имеющие при некоторых условиях бесчисленное множество решений.

§ 14. Начальные сведения о неравенствах

Программы предусматривают употребление знаков неравенства только во второй теме алгебры VI класса; однако многие учителя пользуются знаком неравенства в V классе. У них ученики без труда пользуются такими записями:

$$7>3;\ \frac{5}{12}>\frac{2}{5},\ \text{так как}\ \frac{5}{12}=\frac{25}{60};\ \frac{2}{5}=\frac{24}{60};\ \frac{25}{60}>\frac{24}{60}.$$

В VI классе в связи с изучением приближенных чисел в арифметике и рациональных чисел в алгебре следует закрепить понятие о неравенстве посредством ряда упражнений, например:

1. Найти все целые положительные значения x, если

$$x < 12;\ 2 < x < 8;\ 3\frac{7}{8} < x < 8\frac{2}{3}.$$

2. Записать соотношение чисел при помощи знака неравенства:

а) число 5 больше числа 2, но меньше числа 9.

б) измерив отрезок AB, нашли, что 1 *см* укладывается в нем 5 раз с недостатком и 6 раз с избытком; записать результат измерения при помощи знака неравенства;

в) найти избыточное и недостаточное значение частного 37:8 в целых числах и при помощи знака неравенства записать значение частного.

3. Какие целые числа заключены между числами: -4 и 1; -1 и 3; -5 и -2? Отметить эти числа на числовой оси.

Какие целые значения может принимать x, если: $-2 < x < 1$; $-8{,}5 < x < -5{,}4$? Отметить x на числовой оси.

4. Среди упражнений на закрепление понятия абсолютной величины числá полезно дать такие упражнения: $|a| < 2$, как расположены на числовой оси точки, соответствующие числу a.

Записать при помощи знака неравенства вывод относительно x, если $|x-2| < 1$.

5. Можно ли утверждать, что $a=b$, если $|a|=|b|$?

» » » » $a=b$, » $a<0$, $b<0$, $|a|=|b|$?

При каких значениях a $2a > a$; $2a < a$; $a^3 > a^2$; $a^3 < a^2$? И др. Хотя в программе нет особой темы «Неравенства», но желательно некоторые сведения о неравенствах сообщить ученикам в процессе различного рода упражнений и решения задач. Так, например, уже в VI классе в связи с решением простейших уравнений можно решить несколько таких примеров: какое значение может принимать x, если $x-3>0$; $x+4<0$; $3x<15$? И др.

Учащиеся без труда решают подобные неравенства. Учителю остается подчеркнуть, что решением неравенств является в каждом случае множество численных значений неизвестной. Это становится для учеников совершенно ясным, если решения сопровождать графической иллюстрацией на числовой оси:

если $x-3>0$, то $x>3$;

» $x+4<0$, то $x<-4$.

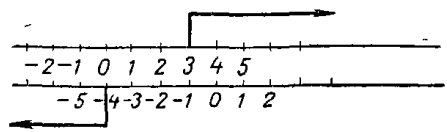


Рис. 20

§ 15. Функциональная пропедевтика

Чтобы подготовить учеников к сознательному усвоению идеи функциональной зависимости, понятий функции и уравнения в VII и более старших классах школы, необходимо заранее и постепенно подготовить их к знакомству с этими понятиями.

В плане подготовки должны быть использованы всевозможные упражнения, которые не ведут непосредственно к каким-либо обобщениям, но доступны ученикам младших классов и могут служить для накопления ими опыта. Этот опыт, естественно, будет создавать у них необходимые представления, ведущие к образованию соответствующих понятий на конкретной числовой и графической основе.

Далекие от обобщений и специальной терминологии, эти упражнения должны помочь учащимся выяснить, что рассматриваемое ими одно и то же выражение может приобретать различные значения в зависимости от числовых значений входящих в него букв. Эти упражнения должны помочь учащимся понять различные способы выражения функциональных зависимостей.

Так, например, в V классе при изучении изменения результатов действий при изменении компонентов в области дробных чисел в качестве упражнений для учеников полезно составлять таблицы сумм, разностей, произведений двух чисел, когда один из компонентов остается неизменным, а другой меняется.

Таблицам можно придать следующий вид.

Таблица 5

I		II		III		IV	
x	$2\frac{1}{2}+x$	x	$27\frac{3}{4}-x$	x	$x-7\frac{3}{5}$	x	$3\frac{3}{8}x$
$\frac{1}{8}$	$2\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{4}$	8	$\frac{2}{5}$	2	$6\frac{3}{4}$
$\frac{3}{8}$	$2\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$27\frac{1}{8}$	$8\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$2\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{16}$
$\frac{5}{12}$	$2\frac{11}{12}$	$1\frac{7}{16}$	$26\frac{5}{16}$	$9\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{20}$	$3\frac{5}{8}$	$12\frac{15}{64}$
$1\frac{1}{2}$	4	$3\frac{11}{24}$	$24\frac{7}{24}$	$11\frac{7}{15}$	$3\frac{13}{15}$	$4\frac{2}{3}$	$15\frac{3}{4}$
$2\frac{3}{10}$	$4\frac{8}{10}$	$8\frac{7}{40}$	$19\frac{23}{40}$	$13\frac{9}{20}$	$5\frac{17}{20}$	$5\frac{3}{4}$	$19\frac{13}{32}$

Рассматривая эти таблицы, легко установить зависимость результатов от величины компонентов действий и характер изменения этих результатов. Так, можно предложить ученикам сравнить вычитаемое и соответствующие разности в примерах 3 и 4 во II колонке. Вычитаемое увеличено на

$$3\frac{11}{24}-1\frac{7}{16}=2\frac{22-21}{48}=2\frac{1}{48},$$

разность при этом уменьшилась на

$$26\frac{5}{16}-24\frac{7}{24}=2\frac{15-14}{48}=2\frac{1}{48}.$$

Разобрав подобным образом несколько примеров, ученики заметят, что при увеличении вычитаемого на некоторое число разность уменьшается на то же число. (Раньше, до знакомства с дробными числами, говорилось, что увеличение вычитаемого на несколько единиц влечет уменьшение разности на столько же единиц.) Таким образом проверяется, что зависимость между компонентами действий, установленная для целых чисел, распространяется и на дробные числа.

В V классе при повторении и изучении геометрического материала появляется возможность углубить понятие о переменной величине. Так, например, периметр прямоугольника при выбранной длине основания будет меняться в зависимости от высоты прямоугольника. Длина периметра при длине основания, равной 4 лин. единицам, и меняющейся высоте будет выражаться

$$P=8+2x.$$

Полезно составить таблицу изменения длины периметра.

В V классе можно познакомить учащихся с графическим выражением зависимости между величинами.

Так, при повторении геометрического материала V класса и разборе зависимости длины периметра прямоугольника с основанием, равным 4 лин. единицам от высоты, получаем таблицу, которую можно использовать для построения графика. Если в концах отрезков, выражающих высоты, поставить отрезки, выражающие соответствующие периметры, то получится столбчатая диаграмма. А если первые отрезки (высоты) отложить на одной прямой от некоторой точки 0, то можно заметить, что концы вторых отрезков (периметров) будут лежать на одном луче. Этот луч и будет графиком изменения длины периметра (рис. 21).

Такая же работа может быть проведена при нахождении площади прямоугольника, у которого длина основания 4, а высота меняется.

Так же как и в предыдущем случае, построим таблицу изменения $4 \cdot x$ и графическое выражение этого изменения (рис. 22) Конечно, во всей этой работе должен соблюдаться педагогический такт, употребляться соответствующий язык, не допускающий на этом этапе обучения новой, ненужной здесь терминологии — оси, координаты и т п

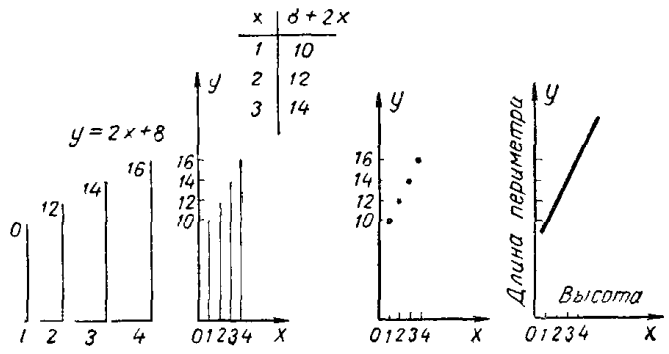


Рис. 21

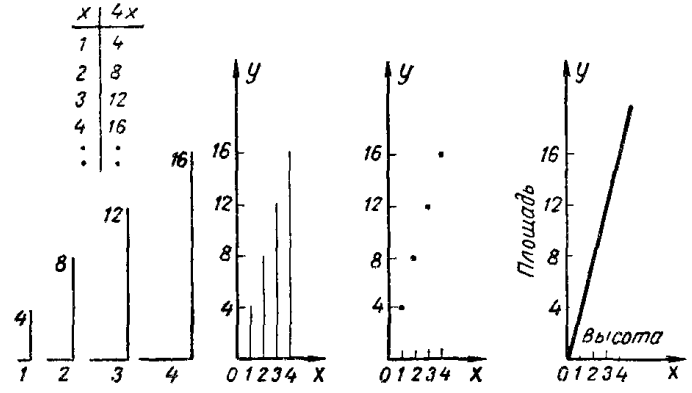


Рис. 22

Все указанное проделать в классе трудно (не хватит времени), но некоторую работу сделать учащиеся могут и должны. Эту часть работы устанавливает сам учитель, например изготовление первых чертежей для каждого случая. Дома же учащимся может быть предложено перенести эти чертежи на миллиметровую бумагу (определенного формата) и закончить остальные чертежи.

Многократные упражнения подобного характера создадут у учащихся нужное представление о графическом выражении рассматриваемой зависимости.

Программы по алгебре VI класса предусматривают выполнение учениками графиков изменения температуры и графиков движения и умение читать эти графики.

Весь полученный графический материал с успехом может быть использован при изучении прямой пропорциональности величин в VI классе, при изучении функции $y=ax$ в VII классе и в теме «Функции и их графики» в VIII классе.

§ 16 Изучение функциональной зависимости в VII классе

Пользуясь тем, что ученики в VI классе уже познакомились с прямой и обратной пропорциональностью, в VII классе надо опереться на эти знания и сделать некоторые обобщения. Рассматривая уже знакомые им конкретные примеры:

$S=vt$ (S — длина пути при равномерном движении);
$P=dV$ (P — вес вещества);
$Q=ab$ (Q — площадь прямоугольника),

выясняется, что если считать две величины переменными (например: S и t; P и V; Q и b) и одну постоянной (v — скорость, d — удельный вес, a — основание), то во всех этих случаях зависимость между переменными величинами прямо пропорциональная:

$$\frac{S}{t}=v;\quad \frac{P}{V}=d;\quad \frac{Q}{b}=a.$$

Если одну из переменных величин назовем x, а другую переменную назовем y, постоянную величину a, то получим общее выражение прямо пропорциональной зависимости: $\frac{y}{x}=a$, или $y=ax$. Придавая определенное значение одной из переменных величин, например x, легко вычислить значение второй переменной y.

Кроме прямо пропорциональной зависимости между величинами, существует еще много других зависимостей (можно напомнить ученикам, что в VI классе изучали обратно пропорциональную зависимость). В математике принято рассуждать так: если какое-нибудь явление характеризуется двумя переменными величинами так, что каждому значению одной соответствует некоторое определенное значение другой, то первую величину считать независимой переменной (аргументом), а вторую зависимой (функцией), зависимость между ними называется функциональной.

Прямо пропорциональная зависимость это частный случай функциональной зависимости.

Программа предусматривает введение функциональной терминологии только в VIII классе, но из опыта передовых учителей следует, что начальное понятие о функции и соответствующая терминология не затрудняют учеников VII класса, а вместе с этим значительно облегчают изложение многих последующих вопросов курса.

Полученная формула $y=ax$ есть один из способов выражения прямо пропорциональной зависимости.

Выбрав значение постоянной величины (например, $a=2$), мы можем построить таблицу соответствующих значений x и y.

x	—0,2	—0,1	...	0	0,1	0,2	...	1	2	...
$y=2x$	—0,4	—0,2	...	0	0,2	0,4	...	2	4	...

Так как теперь мы уже не связаны конкретным фактом и задачей, а рассматриваем зависимость в общем виде, то можем придавать x любые рациональные значения.

Построенная таблица позволяет быстро находить значение y по выбранному значению x. Иногда функциональная зависимость сразу задается таблицей. Табличный способ выражения функциональной зависимости не всегда удобен, так как в таблице нельзя поместить все возможные значения x; однако таблицей иногда пользуются, например, в магазинах для быстрого подсчета стоимости проданного продукта применяются таблицы определения длины окружности в зависимости от диаметра и многие другие.

Есть другой способ выражения функциональной зависимости — графический, с которым учащиеся познакомились в V классе. Графический способ требует знакомства с системой координат.

Для ознакомления с системой координат целесообразно разобрать такую задачу: «С потолка надо снять на время ремонта розетку, а после ремонта поставить ее точно на прежнее место. Как или чем определяется ее положение на потолке?»

Ответ получим незамедлительно: расстоянием ее от двух пересекающихся карнизов.

Разобрав еще пару подобных примеров, можно сделать вывод: положение точки на плоскости вполне определяется расстоянием ее до двух произвольно взятых пересекающихся прямых (осей), то есть двумя числами, и, наоборот, положение точки на плоскости само определяет два числа, выражающих расстояния ее до осей. Короче, два числа определяют положение определенной точки на плоскости, и, наоборот, точка плоскости определяет некоторые два числа. Такое соответствие называется взаимно однозначным соответствием. Надо, чтобы ученики поняли, в чем выражается взаимность и в чем однозначность

В случае, когда рассматриваются две группы (два множества) объектов, причем каждому объекту одной группы соответствует вполне определенный и только один объект другой группы, а каждому объекту второй группы соответствует вполне

определенный и тоже только один объект первой группы, то такое соответствие называется взаимно однозначным [1].

Из обыденной жизни в качестве примера можно привести взаимно однозначное соответствие между мотоциклами в городе и номерными знаками для них. Такое взаимно однозначное соответствие преимущественно рассматривается для математических объектов.

Для дальнейших занятий следует начертить на бумаге (желательно миллиметровой) координатную сетку, которую использовать как постоянное классное пособие (за единицу длины удобно принять 5 *см*). Нужно ввести понятие осей координат, указать, что они делят плоскость на четыре четверти; затем вводятся названия осей и координат точки, устанавливаются знаки координат точек в зависимости от четверти, в которой они расположены, и условные записи этих координат. Нужно упражнять учеников в пользовании системой координат для прямых и обратных задач: определить координаты выбранной точки плоскости и найти точку плоскости по заданным ее координатам.

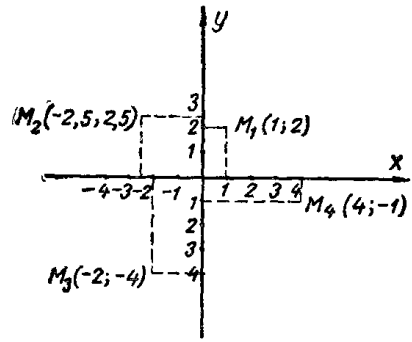


Рис. 23

Особо надо остановить внимание учащихся на умении назвать координаты точек, расположенных на одной из координатных осей, в начале координат. Учащиеся должны практиковаться в этих упражнениях на координатных сетках, построенных в тетрадях. За единицу длины можно принять длину стороны клетки (рис. 23).

Не следует долго упражнять учеников в построении отдельных точек по заданным их координатам и в определении координат построенных точек. Лучше предложить учащимся более сложные упражнения, которые могут заинтересовать их и в то же время помогут выявить свойства, применяемые в дальнейшем при построении графиков функций.

Например, могут быть поставлены такие вопросы:

1. Задана точка A (2, 3); назвать координаты точки B (точки C), симметричной точке A относительно оси ординат (оси абсцисс);

2. Какому условию должны удовлетворять координаты точки, лежащей на биссектрисе I или III координатного угла (II или IV)? Задачи, подобные этим, имеются и в задачнике Ларичева (№ 1263—1265).

Эти вопросы могут предлагаться в порядке устных упражнений; они являются задачами на доказательство, так как ученики

[1] Ученикам VII класса сообщать термин не обязательно.

должны обосновать правильность своих ответов. При этом повторяются свойства осевой и центральной симметрии, пройденный ранее геометрический материал.

Среди упражнений весьма полезными являются построения фигур (треугольников, четырехугольников) по координатам их вершин. На такого рода задачах можно показать, что задача построения фигуры, в частности треугольника, может решаться не только известными из курса геометрии VI класса способами, но и другими методами, которые изучаются в курсе аналитической геометрии. Таким образом, ученикам приоткрывается занавес перед высшими разделами математики.

После упражнений с координатной сеткой можно вернуться к вопросу о выражении функциональной зависимости графически и к построению графика зависимости $y=ax$ по точкам.

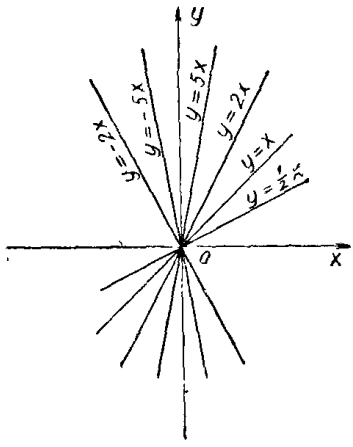


Рис 24.

Сначала следует построить график для какой-либо конкретной функции вида $y=ax$, например график функции изменения веса бруска железа (y) при изменении объема бруска (x). Для этого надо сначала составить таблицу для нескольких значений x, а затем построить график по точкам. В этом случае надо обратить внимание учеников на то, что для x берутся значения только положительные, так как отрицательные значения x не имеют смысла. Соединив ряд полученных точек, замечаем, что эти точки лежат на луче, выходящем из начала координат ($x=0$, $y=0$). Такую же работу полезно проделать для функции $C=2\pi R$. Учащимся предлагается, пользуясь таблицами Брадиса, составить таблицу длин окружности при $2R=0{,}25$ *см* (0,5; 0,75; 1,00; 1,5) и построить по точкам график изменения длины окружности в зависимости от изменения ее диаметра.

Тот факт, что при построении графика функции $y=ax$ мы считаем, что полученные точки лежат на одной прямой, подлежит доказательству, но до VIII класса учащиеся доказать это не смогут, однако об этом полезно сказать.

Затем можно перейти к построению графика функции вида $y=ax$ в общем виде по точкам, теперь придавая x уже любые рациональные значения. График получится в виде прямой, проходящей через начало координат.

Проделав ряд упражнений на построение графиков функции вида $y=ax$ при различных значениях постоянной a (параметра a), рекомендуется выяснить геометрическое значение параметра (рис. 24).

В VII классе устанавливается, что при увеличении значения a угол наклона прямой к положительному направлению оси X увеличивается (потому-то a и называется угловым коэффициентом); в VIII классе можно установить, что коэффициент a выражает тангенс угла наклона прямой к оси X.

Ученики без труда приходят к выводу, что положение графика определяется двумя точками и что одной из них может быть взято начало координат (не «центр», как часто говорят учащиеся).

Практически при построении графика функции $y=ax$ (или линейной функции $y=ax+b$) рекомендуется брать три точки; третья точка корректирует построение прямой графика.

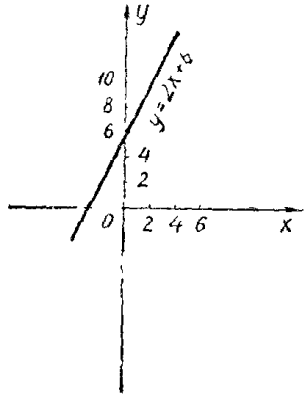


Рис. 25

Продолжая изучение функциональной зависимости, надо рассмотреть примеры линейной функции и ее общий вид $y=ax+b$. Ряд задач, предложенных ученикам и составленных ими самостоятельно, будет приводить к аналогичным формулам, например: 1) зависимость стоимости телеграммы (в копейках) от числа слов; 2) расстояние поезда от некоторой станции (в километрах) в зависимости от времени движения (в часах) с данной постоянной скоростью, если в начале движения поезд находился на данном расстоянии от станции (в определенном направлении); 3) зависимость количества жидкости, остающейся в баке, от времени ее вытекания, если дана вместимость бака и скорость, с которой жидкость равномерно вытекает, при условии, что бак был полным; 4) зависимость длины одного основания трапеции от длины другого основания при заданной средней линии.

В каждой задаче лучше задавать числовые данные, тогда получаем примерно следующие формулы (при некоторых числовых данных): 1) $y=3x+10$; 2) $y=200-2{,}5x$, или $y=-2{,}5+200$; 3) $\frac{x+y}{2}=10$, или $y=-x+20$. Для каждой формулы определяется область допустимых значений аргумента x, вытекающая из условия задачи. Так, например, для третьей задачи $0<x<80$. Подобные примеры и приводят к общему виду функциональной зависимости одного и того же характера $y=ax+b$. Ученики легко выявляют, что при $b=0$ получается $y=ax$, что, видимо, представляет собой частный случай линейной функции.

Можно рассмотреть изменение периметра прямоугольника y при постоянном основании 3 лин. единиц и изменяющейся высоте x. Получаем $y=6+2x$, или $y=2x+6$ (рис. 25).

Рассматривая изменение периметра при указанных условиях, мы можем в формулу подставлять различные значения x и получать соответствующие значения y.

Таблица изменения $y=2x+6$

x	0,1	0,2	. . .	0,9	1	2	. . .	6	7	. . .
y	6,2	6,4	. . .	7,8	8	10	. . .	18	20	. . .

Построим график функции по точкам, в данном случае график изменения периметра прямоугольника при основании 3.

Полезно задать ученикам домашнюю работу: построить графики рассмотренной зависимости при различных значениях a и b. Значения a и b следует задать, например:

при $a=\frac{1}{2}$; $b=0$; при $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$;
» $a=1$; $b=0$; » $a=1$; $b=3$;
» $a=2$; $b=0$; » $a=2$; $b=5$;
» $a=5$; $b=0$; » $a=5$; $b=4$:
» $a=-2$; $b=0$; » $a=-2$; $b=5$;
» $a=-5$; $b=0$; » $a=-5$; $b=-4$.

Учащиеся должны выполнить все построения на форматках миллиметровой бумаги одного и того же размера, удобного для вклейки в тетради, или в особых блокнотах миллиметровой бумаги.

В классе нужно рассмотреть хотя бы часть этих графиков (рис. 26), построив их на доске, используя цветные мелки.

Учащиеся легко подмечают геометрическое значение a и b. При этом следует показать, что для построения графиков функции $y=ax+b$ при различных значениях b, но при одном и том

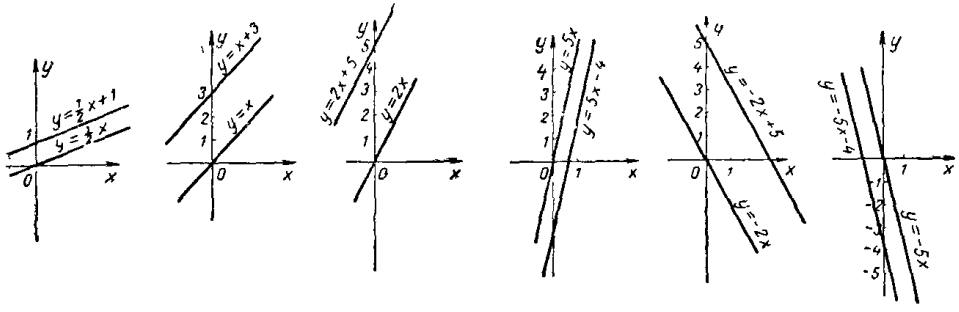


Рис. 26. График изменения $y=2x+6$

же значении a нет надобности строить графики каждой функции по точкам, а достаточно построить график $y=ax$ и сместить его параллельно самому себе, так как ординаты точек, имеющих равные абсциссы, будут отличаться друг от друга на число (b), а знак b определит направление этого смещения.

Подметив геометрические значения параметров a и b, полезно выяснить с учениками, в каком случае графики двух линейных функций пересекаются, в каких параллельны, в каких совпадают. Эти сведения пригодятся при графическом решении систем двух уравнений с двумя неизвестными.

После ознакомления учащихся с функциями и их графиками чрезвычайно полезно рассмотреть какую-либо задачу, которая привела бы учеников к пониманию уравнения с одним неизвестным как равенства значений двух функций от одного и того же аргумента, например: определить, при какой высоте прямоугольник с основанием, равным 3 *м*, имеет площадь, численно равную периметру его. Элементарные рассуждения приводят к тому, что в этом случае периметр прямоугольника выразится $(2x+6)$ *м*, а площадь $(3x)$ $м^2$. Так как эти выражения по условию должны быть численно равны, то можно составить уравнение $2x+6=3x$, которое легко решается $(x=6)$.

Вместе с этим каждое из выражений можно рассматривать как функцию: $y=2x+6$ и $y=3x$. Для каждой из них можно построить график. Если графики перенести на одну координатную сетку, то они пересекутся. Абсцисса точки пересечения $x=6$ дает то значение функции $(y=18)$, при которой рассматриваемые функции $2x+6$ и $3x$ равны (рис. 27).

В качестве упражнений можно дать задачи, подобные рассмотренной, но при основании прямоугольника, равном 4; 2.

В последнем случае получим уравнение $2x+4=2x$ (уравнение решения не имеет). Прямые (графики функций $y=2x+4$ и $y=2x$) будут параллельны, т. е. не будут иметь общей точки. Отсюда делается вывод, что нет такого значения аргумента (x), при котором значения этих функций равны. Решение этих задач

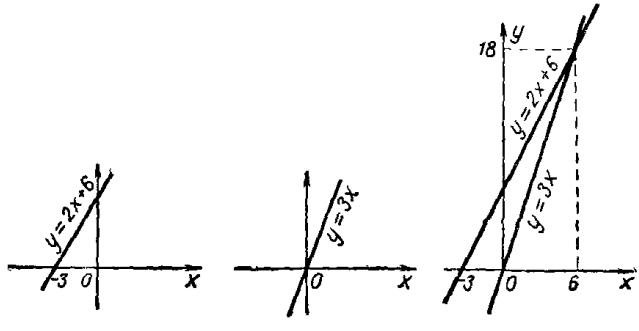


Рис. 27

легко приводит к выводу, что уравнения с одним неизвестным могут решаться и графически.

В VII классе по программе изучается еще и функция $y=\frac{k}{x}$. Изучение этой функции надо начать, как это было сделано в отношении линейной функции, с рассмотрения конкретных примеров обратно пропорциональных величин. Затем надо остановиться на существенных особенностях этой функции. Прежде всего при рассмотрении ее выражения ученики сами легко устанавливают, что к области допустимых значений аргумента x не принадлежит нуль Также легко выясняется, что функция может принимать любые (действительные) значения, кроме нуля.

Построение графика функции проще всего начать с конкретного случая, например $y=\frac{1}{x}$, представляющего зависимость между двумя взаимно обратными числами. Можно сразу выяснить, что график будет расположен в I и III четвертях координатной плоскости, так как знаки x и y одинаковы при $k>0$. Кривая графика будет вырисовываться более четко при большом количестве промежуточных значений x. Очень важно, чтобы ученики понимали, что графиком функции является совокупность обеих ветвей полученной кривой, которая называется гиперболой. Подробно рассматривать свойство гиперболы не удается из-за нехватки времени, но необходимо установить, что ветви гиперболы приближаются к осям координат как угодно близко, но у них нет общих точек с осями. Конечно, полезно установить осевую и центральную симметрии кривой, но это можно сделать только при наличии свободного времени.

Учащиеся могут самостоятельно построить на одном чертеже ряд графиков для различных значений $k>0$. При этом они могут использовать имеющиеся у них таблицы значений функции $y=\frac{k}{x}$ или, имея графики $y=\frac{1}{x}$ на том же чертеже, находить построение точек нового графика увеличением или уменьшением соответствующих ординат в k раз (см. рис. 28).

Если на миллиметровой бумаге размером 25×25 *см*, наклеенной на деревянный планшет, построить множество ветвей гипербол, расположенных в I четверти при различных значениях $k>0$ ($k=1$; 2; 3; 4; 5; 6), то получится своеобразный прибор, который может служить для определения площадей прямоугольников без измерения их сторон (см. рис. 29). Рассмотрение функции $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$ может быть проведено учащимися самостоятельно, причем соответственные графики должны быть построены на другом чертеже.

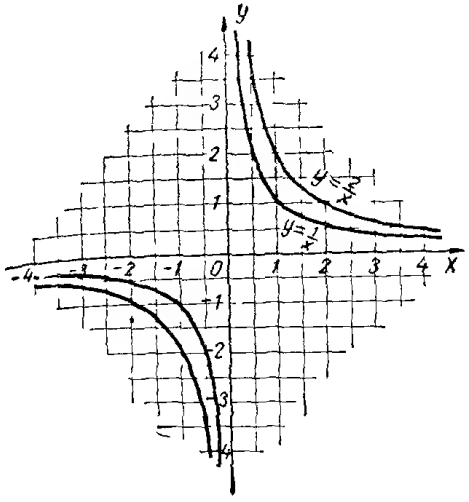


Рис. 28

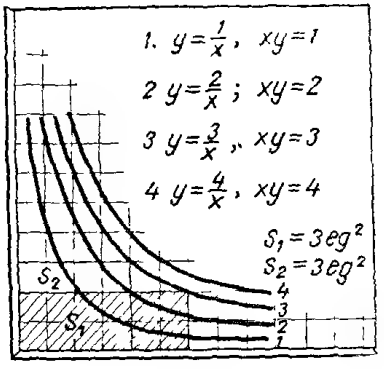


Рис 29

§ 17. Системы уравнений первой степени с двумя неизвестными

Знакомство с системой двух уравнений первой степени с двумя неизвестными рекомендуется начать с решения задачи

Задача. Группа учеников купила 16 тетрадей и 9 карандашей и уплатила за покупку 59 коп.; другая группа учеников купила по той же цене 18 тетрадей и 10 карандашей и уплатила 66 коп. Определить стоимость одной тетради и одного карандаша.

Сначала целесообразно решить эту задачу с одним неизвестным. Для этого обозначим стоимость одной тетради буквой x коп., тогда по 1 условию получим, что 16 тетрадей стоят $16x$ коп., 9 карандашей стоят $(59-16x)$ коп., а один карандаш стоит $\frac{59-16x}{9}$ коп., так как стоимость карандаша в обоих случаях была одна и та же, то можно составить уравнение $\frac{59-16x}{9}=\frac{66-18x}{10}$; получим решение: $x=2$ (получили стоимость одной тетради). Чтобы найти цену одного карандаша, подставим значение x в любое из составленных выражений, например в $\frac{59-16x}{9}$, получим $\frac{27}{9}=3$. Итак, цена тетради 2 коп., цена карандаша 3 коп.

Следует показать, как решается эта же задача, если ввести две буквы для обозначения двух неизвестных.

Обозначим цену тетради буквой x коп., цену карандаша — y коп., тогда, согласно 1 и 2 условиям, получим:

$$16x+9y=59,$$
$$18x+10y=66.$$

Итак, составили два уравнения. Для решения задачи надо найти такие значения x и y, которые удовлетворяли бы одновременно обоим уравнениям, или, как говорят, надо решить эти уравнения совместно; в таких случаях считают, что два уравнения составляют систему уравнений 1-й степени с двумя неизвестными. Чтобы показать, что эти уравнения составляют систему, сбоку от этих уравнений ставят скобку и запись получает такой вид:

$$\begin{cases} 16x+9y=59; \\ 18x+10y=66. \end{cases}$$

Ученикам предлагается самостоятельно проверить, удовлетворяют ли найденные выше значения x и y составленным двум уравнениям, то есть являются ли они решением системы.

После решения такой задачи можно дать определение системы:

1) Два или несколько уравнений образуют систему, если одноименные неизвестные в них обозначают одну и ту же величину

2) Решить систему двух уравнений — это значит найти такие значения неизвестных, при которых каждое из уравнений системы обращается в тождество. Пара таких значений неизвестных называется решением системы.

Полезно показать общий вид системы двух уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Следует отметить, что решением рассмотренной системы уравнений оказалась одна пара чисел, но это не обязательно для каждой системы.

Чтобы научиться решать системы уравнений и уметь устанавливать число решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными в различных случаях, надо познакомиться с некоторыми свойствами одного уравнения 1-й степени с двумя неизвестными, то есть уравнения вида $ax+by=c$.

Для этого можно рассмотреть, например, такую задачу:

«Разность между некоторым числом и половиной другого равна $\frac{1}{2}$. Определить числа».

Обозначим первое число x, а второе y. Составим уравнение:

$$x-\frac{y}{2}=\frac{1}{2}, \text{ или } y=2x-1.$$

Следует выяснить, что решить это уравнение — значит найти такие пары значений x и y, которые при подстановке в уравнение обращали бы его в тождество.

Составим таблицу значений для y при различных значениях x.

x	$y=2x-1$	x	$y=2x-1$
$-0,1$	$-1,2$	1	1
0	-1	2	3
0,1	$-0,8$	6	11
0,5	0	10	19
...	...	...	...

Таблица подсказывает, что одно уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений [1].

Следует обратить внимание учеников на то, что составленное уравнение выражает знакомую им зависимость. Такую зависимость они выражали графически, причем получалась прямая линия. Графическое выражение рассматриваемой зависимости подтверждает, таким образом, бесчисленное множество решений.

Затем надо ввести еще одно условие относительно искомых чисел, например: сумма этих чисел равна 5. Сохраняя прежние обозначения, составим два уравнения:

$$\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\frac{1}{2}; \\ x+y=5. \end{cases}$$

Преобразовав каждое уравнение, получим:

$$\begin{cases} y=2x-1; \\ y=-x+5. \end{cases}$$

Полезно сначала показать ученикам табличное решение системы уравнений. В этом случае они лучше поймут, в чем заключается решение системы и почему решением системы является пара чисел.

Составим таблицу некоторых значений x и соответствующих значений y.

x	$-0,1$	0	0,1	0,5	1	2	3	...	6	7	...	10
$y=2x-1$	$-1,2$	-1	$-0,8$	0	1	3	5	...	11	13	...	19
$y=-x+5$	5,1	5	4,9	4,5	4	3	2	...	-1	-2	...	-5

[1] Могут встретиться и исключения: например, уравнение $x+y=x+y+1$ не имеет решения, а $x^2+y^2=0$ имеет единственное решение: $x=0$, $y=0$, но последнее уравнение уже не первой степени.

Следует еще раз подчеркнуть, что будем искать такие значения x, при которых численные значения выражений $2x-1$ и $-x+5$ станут равными.

После трех-четырех значений x надо обратить внимание школьников на то, что разность значений для выражений y уменьшается и поиски нужного значения x имеет смысл продолжать. При $x=2$ значения $y=2x-1$ и $y=-x+5$ получаются равными 3. Таким образом, решение системы уравнений найдено, и этим самым найден ответ на вопрос задачи. Полезно показать ученикам, что продолжать поиски иных значений x, при которых значения y стали бы равными, нет смысла, так как при увеличении значений x разность значений для y увеличивается. Итак, найдена одна пара чисел, удовлетворяющая системе уравнений; эта пара чисел и является решением данной системы.

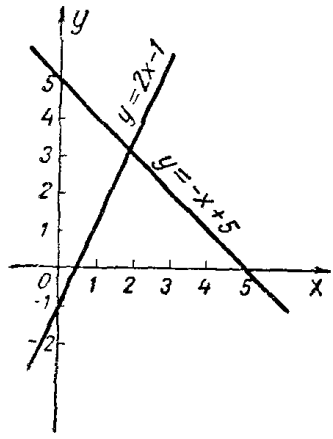


Рис. 30

Затем следует обратить внимание на то, что каждое из полученных уравнений может быть представлено графически прямой линией. Учащиеся должны построить эти прямые на одной координатной сетке. Коэффициенты при x различны, значит прямые наклонены под разными углами к оси абсцисс. Следовательно, они пересекаются, и координаты точки пересечения этих прямых определят значения x и y, которые будут удовлетворять обоим уравнениям. Единственность точки пересечения прямых подтвердит единственность решения данной системы (рис. 30).

Решить такую задачу. Куплено несколько ножей по 0,8 руб. за штуку и несколько вилок по 0,3 руб. за штуку. За покупку уплачено 10 руб. Сколько куплено ножей и вилок отдельно?

Обозначения: количество ножей x (штук),
» вилок y » .

Тогда стоимость ножей $0{,}8\,x$ (руб.),
» вилок $0{,}3\,y$ »

Уравнение:

$$0{,}8x+0{,}3y=10. \qquad (1)$$

Решение уравнения. Преобразуем уравнение (1). Получим

$$y=\frac{100-8x}{3}$$

одно уравнение с двумя неизвестными, которое не имеет определенного решения. Учащимся уже известно, что, придавая раз-

личные значения x, будем получать соответствующие значения y, то есть число вилок зависит от числа купленных ножей. Но при этом следует заметить, что в данной задаче x и y могут быть только целыми числами.

Составим таблицы некоторых значений x и y. Решим полученное уравнение методом проб; при этом легко установить простым рассуждением, что $x \leqslant 12$.

x	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	$\frac{4}{3}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{28}{3}$	12	$\frac{44}{3}$	$\frac{52}{3}$	20	$\frac{68}{3}$	$\frac{76}{3}$	28	$\frac{92}{3}$

Из таблицы видно, что в области целых чисел (это следует из условия задачи) уравнение имеет четыре решения, то есть четыре пары чисел, удовлетворяющих уравнению.

Введем еще одно условие: вилок было куплено на 4 штуки больше, чем ножей. Это условие приводит к уравнению

$$y=x+4. \qquad (2)$$

Относительно уравнения (2) могут быть сделаны заключения, аналогичные тем, что были сделаны относительно уравнения (1).

Для решения этого уравнения также составим таблицу некоторых значений x и y.

x	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

Имея в виду, что отыскивается такое значение x, при котором значение y было бы и для первого и для второго уравнения одно и то же, совместим таблицы; при этом оставим только те значения x, при которых в первой таблице значения y получились целые. Получим следующую таблицу:

x	$y=-\frac{100-8x}{3}$	$y=x+4$
11	4	15
8	12	12
5	20	9
2	28	6

Из совмещенных таблиц совершенно очевидно, что решением двух уравнений будет пара чисел: $x=8$ и $y=12$.

Отвлекаясь от условия, которое привело нас к данной паре уравнений, решим эту пару уравнений графически. Мы уже имеем выражение y как функции x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{100-8x}{3}; \\ y=x+4. \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\dfrac{8}{3}x+33\dfrac{1}{3}; \\ y=x+4. \end{cases}$$

Так как обе функции линейные и прямые (графики) пересекаются, то можно заранее сказать, что решение будет одно, которое определится координатами точки пересечения прямых.

Графическое решение, аккуратно выполненное, укажет для x и y те же значения, что получили из таблицы (рис. 31). Опираясь на графическое выражение каждого уравнения, нетрудно установить, что система двух уравнений с двумя неизвестными, из которых каждое уравнение первой степени, имеет своим решением либо одну пару значений неизвестных, либо бесчисленное множество, либо совсем не имеет решения.

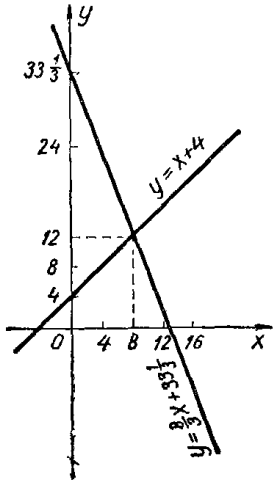


Рис. 31

Из рассмотрения графиков линейной функции ученики знают, при каких условиях прямые должны пересечься, при каких совпадут и при каких будут параллельны.

Для закрепления этих рассуждений им следует дать решить графически несколько систем уравнений с двумя неизвестными. Среди этих систем полезно предложить такие, которые не имеют решений, и такие, которые имеют бесчисленное множество решений. Если позволяют условия, то целесообразно установить, в каких случаях получается то или другое (по программе эти вопросы относятся к IX классу).

Остается рассмотреть аналитические способы решения системы двух линейных уравнений.

Начнем со способа сравнения неизвестных, наиболее понятного и непосредственно вытекающего из предшествующей работы (почему-то исключенного из современных учебников).

Рассмотрим разобранную систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x+3y=100; \\ y=x+4. \end{cases}$$

Ранее уже рассматривались выражения для y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{100 - 8x}{3}; \\ y = x + 4. \end{cases}$$

Помня, что для решения системы мы отыскиваем значение y, которое удовлетворяло бы обоим уравнениям, естественно приравнять полученные два выражения для y:

$$\frac{100 - 8x}{3} = x + 4.$$

Таким образом, мы пришли к одному уравнению с одним неизвестным. Решение его приводит к тому, что $x = 8$. Остается определить y. Подставляя значение $x = 8$ в первое уравнение, а затем во второе, мы убеждаемся, что получается одно и то же значение $y = 12$.

Небесполезно решить эту же систему, выразив сначала в каждом уравнении x через y.

При рассмотрении второго способа — подстановки, следует обратить внимание на то, что часто удобнее подставлять значение того неизвестного, при котором в исходном уравнении меньше по абсолютной величине коэффициент.

Рассматривая третий способ — алгебраическое сложение, следует обратить внимание учащихся на то, что, пользуясь свойством уравнения, мы можем заменить каждое из данных уравнений другими, равносильными исходному, с таким расчетом, чтобы коэффициенты при одном из неизвестных стали противоположными числами.

Складывая почленно уравнения, мы исключим это неизвестное и получим одно уравнение с одним неизвестным, которое и решим относительно оставшегося неизвестного. Значение второго неизвестного определяется легко. Остается проверить, удовлетворяют ли найденные значения неизвестных обоим уравнениям.

При решении системы двух заданных уравнений нам приходится преобразовывать каждое из уравнений системы (исходной), затем складывать их, исключая одно из неизвестных. После этого получаем уравнение с одним неизвестным, которое называется выводным. Это выводное уравнение вместе с одним из исходных называется выводной системой; система исходная равносильна выводной. Это значит, что решения исходной системы являются решениями выводной и что решения выводной являются решениями исходной. Теоремы о равносильности систем уравнений в восьмилетней школе не доказываются.

Решение системы способом сложения понимается без труда. Однако упражнения надо усложнять постепенно, например:

$$1)\ \begin{cases}2x+y=11,\\3x-y=9.\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}4x+5y=25,\\4x+3y=13.\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}7x-3y=15,\\5x+6y=27.\end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases}2x+y=5.\\4x+3y=11.\end{cases}\quad 5)\ \begin{cases}3x-7y=17,\\11x+5y=1.\end{cases}\quad 6)\ \begin{cases}6x-5y=4,\\13x-7y=1.\end{cases}$$

Необходимо разъяснить ученикам, что система уравнений считается решенной только после проверки, удовлетворяют ли найденные значения неизвестных обоим уравнениям.

Вместе с этим надо указать и на то, что на практике мы не каждый раз проводим проверку.

При решении буквенных уравнений необходимо обращать внимание на получаемые решения, помня, что если решение — алгебраическая дробь, то она имеет смысл только при условии, когда знаменатель не равен 0.

Преобразуя же уравнения, надо иметь в виду те оговорки, которые мы указали для решения одного уравнения с буквенными коэффициентами.

Так, система

$$\begin{cases}ax+by=\dfrac{a^2+b^2}{a+b},\\[2ex]bx+ay=\dfrac{2ab}{a+b}\end{cases}$$

приводит к решению

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{a+b},\\[2ex]y=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}$$

при условии, что $a^2-b^2\neq 0$, одновременно a и b не могут равняться 0.

Проверка подстановкой найденных решений в обе части каждого из уравнений является хорошим упражнением в тождественных преобразованиях и может служить поводом к повторению их.

Если позволяет время и подготовленность учащихся, то желательно уделить внимание таким системам, которые целесообразно решать введением вспомогательных неизвестных, что значительно облегчает решение системы. Прием введения вспомогательной величины, заменяющей заданное выражение, очень широко используется в математике, и поэтому учащимся полезно с ним хорошо ознакомиться.

Примером такой системы может служить следующая:

$$\begin{cases} \dfrac{27}{x-y}+\dfrac{11}{2x-3}=20, \\ \dfrac{12}{x-y}-\dfrac{3}{2x-3}=1. \end{cases}$$

Введем вспомогательные неизвестные:

$$\frac{1}{x-y}=z;\quad \frac{1}{2x-3}=v.$$

Получаем

$$\begin{cases} 27z+11v=20, \\ 12z-3v=1. \end{cases} \begin{matrix} \cdot\ +4 \\ \cdot\ -9 \end{matrix} \begin{cases} 108z+44v=80, \\ -108z+27v=-9. \end{cases} \quad \begin{cases} 71v=71, \\ 27z+11v=20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=1, \\ z=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{3}. \\ \dfrac{1}{2x-3}=1. \end{cases} \quad \begin{cases} 3=x-y, \\ 1=2x-3. \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1, \\ x=2. \end{cases}$$

Хотя исследование решения системы двух уравнений с двумя неизвестными предусматривается программой только в IX классе, все же совсем не коснуться этого вопроса в VII классе — это значит обречь учащихся в ряде случаев на недоумение.

Следует, не вдаваясь в исчерпывающее теоретическое исследование, познакомить учеников с двумя особыми случаями:

а) с неопределенной системой уравнений, то есть имеющей бесчисленное множество решений, как например:

$$\begin{cases} 2x+4y=18, \\ 4x+8y=36, \end{cases}$$

где второе уравнение по существу не отличается от первого и получается из него после умножения всех членов на 2, то есть фактически имеется одно уравнение с двумя неизвестными, допускающее бесчисленное множество решений;

б) с системой, не имеющей решений, например:

$$\begin{cases} 8x-9y=8, \\ 16x-18y=19, \end{cases}$$

которая приводит к абсурду $(16=19)$.

Рассмотрение этих двух случаев нужно связать и с графическим решением системы; вопрос этот достаточно хорошо изло-

жен в учебнике. (Подробное изложение тем «Уравнение» и «Система уравнений» можно найти в пособии для учителей, Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского, «Алгебра», ч. I, стр. 26, 134, 160, Учпедгиз, 1951).

§ 18. Решение задач на составление уравнений

Что значит решить задачу при помощи уравнения, ученики начинают понимать значительно раньше, чем они приступают к систематическому изучению уравнений и решению задач с помощью уравнений. Из предшествующей работы в VI классе, где ученики уже решали несложные задачи на составление уравнений, они знают, что в этом случае приходится некоторую величину, обычно искомую, обозначить буквой, другие неизвестные величины выразить посредством этой буквы и составить уравнение, согласно условию задачи, когда зависимость между данными и искомыми задачи выражена в условии совершенно ясно, да и сама зависимость несложная.

В более сложных задачах эта зависимость обычно выражена не столь явно, поэтому выразить ее при помощи уравнения труднее.

В различных учебниках и методических руководствах имеется много попыток дать общее правило для составления уравнений. Однако из опыта известно, что умение учеников решать задачи на составление уравнений не находится в зависимости от знания какого-либо общего правила. В ряде статей, напечатанных в журнале «Математика в школе», учителя делятся своим опытом обучения детей решению задач на составление уравнений. Наиболее ценной рекомендацией в этих статьях является путь предварительной тренировки в составлении алгебраических уравнений по условиям задачи.

Ученики, умеющие выражать зависимость между величинами с помощью формулы, значительно легче справляются с составлением уравнений. Современные задачники дают нужный для этого материал и для VI, и для VII классов.

Больше всего помогут ученикам в составлении уравнений последовательные упражнения в решении задач начиная с VI класса с постепенным усложнением в соответствии с изучаемыми разделами теоретического курса.

Ученикам можно указать последовательность ступеней в решении задач и показать, как надо оформлять их решение.

1. Выбор неизвестного и обозначение его буквой.
2. Выражение остальных неизвестных при помощи этой буквы.
3. Составление уравнения по зависимости между величинами, указанной в условии.
4. Решение уравнения.

5. Получение ответа на вопрос задачи.

6. Проверка полученного решения и ответа по условию задачи.

Приводим несколько задач, чтобы дать пример оформления их решения.

1. По плану звено колхозников должно было засевать ежедневно по 60 *га*. Однако колхозники засевали ежедневно по 78 *га* и поэтому закончили сев на 2 дня раньше срока, причем засеяли на 6 *га* больше, чем было намечено планом. Сколько гектаров засеяли колхозники?

Решение. Обозначения: число дней для сева по плану примем *за* x, *тогда*

задание по плану выразится $60x$ *га*,

фактическая выработка выразится $78(x-2)$ *га*.

Составление и решение уравнения.

Так как по условию фактическая выработка больше планового задания на 6 *га*, получаем уравнение

$$60x+6=78(x-2);\ 60x+6=78x-156;$$
$$18x=+162;\ x=9.$$

(Ответ: засеяно колхозниками $78(x-2)=78\cdot 7=546$ (*га*).)

Проверка. Так как начальный срок сева был установлен в 9 дней, то задание выразится $60\cdot 9=540$ (*га*); фактическая выработка больше запланированной на $546-540=6$ (*га*), что соответствует условию задачи. Задача решена верно.

2. Из A в B вышел поезд со скоростью 40 *км/ч*. Через 8 *ч* выходит поезд из B в A со скоростью 60 *км/ч*. Расстояние между A и B равно 700 *км*. На каком расстоянии от A поезда встретятся?

Решение. Расстояние от A до встречи поездов (путь, пройденный первым поездом) обозначим x *км*. Тогда

время движения 1-го поезда до встречи будет $\frac{x}{40}$ *ч*,

путь, пройденный 2-м поездом » » » $(700-x)$ *км*,

время движения 2-го поезда » » » $\frac{700-x}{60}$ *ч*.

Сравниваемые величины: $\frac{x}{40}$ и $\frac{700-x}{60}$.

Уравнение $\frac{x}{40}-\frac{700-x}{60}=8$.

Решение уравнения.

$$\frac{x}{40}\cdot 120-\frac{700-x}{60}\cdot 120=8\cdot 120;\ 3x-(700-x)2=960;$$
$$3x-1400+2x=960;\ 5x=2360;\ x=472\ (км).$$

(Ответ на вопрос задачи совпадает со значением корня уравнения.)

Проверка по условию.

Расстояние 472 *км* пройдено 1-м поездом за $\frac{472}{40}$ *ч*, то есть за $11\frac{4}{5}$ *ч*; 2-й поезд шел по условию только $11\frac{4}{5}-8=3\frac{4}{5}$ *ч* и прошел $60\cdot 3\frac{4}{5}=228$ (*км*), что должно, по условию, составлять разность (700 — 472). Эта разность действительно равна 228. Задача решена верно.

3. На 10,4 руб. куплены ножи и вилки. Ножи ценою по 80 коп. и вилки ценою по 30 коп. Ножей куплено на 4 штуки меньше, чем вилок. Сколько куплено ножей и вилок?

Решение. Обозначения: примем, что ножей куплено x штук. Тогда вилок будет $(x+4)$ шт.

Стоимость всех ножей $0{,}8\,x$ руб.,
» » вилок $0{,}3(x+4)$ руб.

Сравниваемые величины: стоимость всей покупки $0{,}8x+0{,}3(x+4)$ и уплаченная сумма денег 10,4 руб.

Уравнение.

$$0{,}8x+0{,}3(x+4)=10{,}4.$$

Решение уравнения.

$$0{,}8x+0{,}3x+1{,}2=10{,}4;\quad 11x=92;\quad x=\frac{92}{11}.$$

Проверка по условию.

x должен выразить число купленных ножей, то есть целое число. Найденное значение x не удовлетворяет этому условию, следовательно, задача при заданных условиях решений не имеет.

4. Найти число, зная, что если его сложить с 6 и сумму разделить на 3, то частное будет на столько больше неизвестного числа, на сколько 2 больше $\frac{2}{3}$ неизвестного числа.

Решение. Обозначение: искомое число примем за x.

Результат указанных действий над искомым числом будет $\frac{x+6}{3}$, то есть частное $\frac{x+6}{3}$.

Разность между 2 и $\frac{2}{3}x$ будет $2-\frac{2}{3}x$.

Сравниваем полученное частное $\frac{x+6}{3}$ с искомым числом x.

Уравнение.

$$\frac{x+6}{3}-x=2-\frac{2}{3}x.$$

Решение уравнения.

$$\frac{(x+6)\,3}{3} - 3x = 2\cdot 3 - \frac{2}{3}x\cdot 3;$$

$$x+6-3x=6-2x;\ 6-2x=6-2x.$$

Получили тождество, то есть x может быть любым числом

Проверка по условию.

Указанное частное $\frac{x+6}{3}=2+\frac{x}{3}$; разность между этим частным и числом x равна $2+\frac{x}{3}-x=2-\frac{2}{3}x$ в любом случае, то есть при любом значении x, независимо от остальных данных условия.

Существует точка зрения, что проверка по условию должна представлять собой новую задачу, в которой искомое число первоначальной задачи надо сделать заданным, а одно из данных чисел принять за искомое. Если при решении новой задачи решение совпадает с ранее заданным числом, то этим подтвердится правильность найденного решения первоначальной задачи.

Если придерживаться этой точки зрения, то проверка часто будет громоздкой. Достаточно, если проверка будет вестись по свободному рассуждению, как к тому приучены учащиеся при решении арифметических задач.

Важно, чтобы ученики понимали, почему следует делать проверку решения задачи именно по условию. Можно составить неверное уравнение, а решить его верно, и, проверив только, верно ли найдены корни уравнения или системы, нельзя утверждать, что задача решена правильно. Могут быть случаи, когда уравнение составлено верно и решено верно, но значение корня уравнения не имеет смысла для данной задачи (например, получится число людей дробное или число предметов отрицательное).

Целесообразно при составлении уравнения по условию задачи пользоваться схемой записи обозначений; схема помогает ученикам уяснить функциональную зависимость, создает легкую обозримость связей, диктуемых условием задачи, экономит время.

Такие схемы и таблицы приведены в учебнике А. Н. Барсукова.

При решении задачи любую из неизвестных величин можно принять за основную и выразить через нее другие неизвестные величины. Выбор неизвестной величины, которая принимается за основную и обозначается одной буквой, надо предоставлять ученикам делать по своему усмотрению. При этом будут получаться различные уравнения, но ответ задачи один и тот же.

Примером такой задачи может служить следующая:

«За блокнот, тетрадь и карандаш уплачено 22 коп. Карандаш стоил в четыре раза дешевле тетради, а блокнот на 4 коп. дороже тетради. Определить цену каждого предмета».

1-е решение.

Обозначения: цену блокнота примем x коп. Тогда

цена тетради будет $(x-4)$ коп.,

» карандаша » $\frac{x-4}{4}$ коп.

Уравнение.

$$x+(x-4)+\frac{x-4}{4}=22;$$

$$9x-20=88;\ 9x=108;$$

$$x=12;\ x-4=8;\ (x-4):4=2.$$

2-е решение.

Обозначения: цену тетради примем x коп. Тогда

цена блокнота будет $(x+4)$ коп.,

» карандаша » $(x:4)$ коп.

Уравнение:

$$x+x+4+x:4=22;\ 9x+16=88;$$
$$9x=72;\ x=8;\ x+4=12;\ x:4=2.$$

3-е решение.

Обозначения: цену карандаша примем x коп. Тогда

цена тетради будет $(4x)$ коп.,

» блокнота » $(4x+4)$ коп.

Уравнение:

$$x+4x+4x+4=22;\ 9x+4=22;\ 9x=18;$$
$$x=2;\ 4x=8;\ 4x+4=12.$$

Ответ, конечно, получился один и тот же:

цена карандаша 2 коп.,

» тетради 8 » ,

» блокнота 12 » .

Такая работа весьма полезна. Однако следует иметь в виду, что в зависимости от выбора основной неизвестной величины могут получаться более простые или сложные уравнения. Поэтому, предоставляя ученикам право выбора основной неизвестной величины и даже поощряя их в этом, следует выяснять, в каком случае их выбор оказался наиболее целесообразным.

Что касается подбора усложняющихся задач, то в современных советских учебниках осуществлена основная и единственно верная идея — классификация задач соответственно каждо-

му разделу теории; в задачниках приведены примеры уравнений и задачи на составление уравнений в связи с изучаемыми темами курса. Решая задачи на составление уравнений, следует обратить внимание на те из них, которые содержат условия, выражающие зависимости между величинами в технике, экономике, физике, химии и т. п. Такие задачи можно выбрать из новых задачников по алгебре и из задачников по физике (сборник под. ред. Знаменского, задачник Демидова и др.).

Нет надобности загромождать уроки большим количеством таких задач, но несколько следует решить; в этом случае учащиеся лучше поймут, зачем им нужно уметь решать систему и уметь рационально вычислять; вместо того чтобы вычислять отдельные величины, они научатся определять общее выражение искомой и тогда только производить всякого рода упрощения и вычисления. Необходимо в качестве условий для решения задач на составление уравнений использовать данные нашего строительства. Эти данные помогут ученикам на конкретном материале представить себе грандиозность советского строительства, успехи его и тем самым будут содействовать воспитанию в них чувства преданности и любви к своей Родине и строителям новой жизни — советским людям. Такие задачи имеются в современных задачниках и в статьях журнала «Математика в школе».

Из задач на составление систем уравнений только немногие могут вызвать затруднения. Однако такие задачи встречаются, и они должны быть разобраны особо тщательно. Некоторые из задач могут быть решены с помощью и одного уравнения и системы двух уравнений. Нет надобности требовать от ученика решить задачу с помощью одного уравнения, если это ведет к более сложным обозначениям зависимости между величинами.

ГЛАВА V

КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ, КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

§ 19. Квадратные и кубические корни

В программе по алгебре для VIII класса предлагается следующий материал. Квадратный корень и его арифметическое значение. Приближенный квадратный корень из положительного числа. График зависимости $y=\sqrt{x}$. Квадратный корень из произведения, дроби и степени. Вынесение множителя из-под знака квадратного корня и внесение его под знак радикала. Извлечение квадратного корня из положительного числа по таблицам и при помощи счетной линейки.

В объяснительной записке указано: «Изучение иррациональных выражений в восьмилетней школе ограничивается изучением основных свойств квадратных радикалов и ознакомлением с понятием кубического радикала. Основные свойства квадратных радикалов применяются к простейшим действиям над этими радикалами. При этом формулы, выражающие корень из произведения и частного, должны использоваться также для выполнения нескольких упражнений в умножении и делении корней. При выполнении упражнений в действиях над радикалами учащиеся должны также приобрести навык доведения результата до числа путем действий над приближенными значениями радикалов» (стр. 13).

Несколько раньше в объяснительной записке мы встречаем: «Дальнейшее расширение понятия о числе, в частности введение понятия об иррациональном числе, программой восьмилетней школы не предусматривается. В VIII классе при изучении радикалов учащимся должно быть лишь показано, что, например, квадратный корень из любого положительного числа всегда может быть вычислен с желаемой степенью точности» (стр. 11).

В объяснительной записке по геометрии указывается, что в восьмилетней школе нет необходимости останавливаться на изучении принципиальных основ теории измерения (например, постановка вопроса о существовании соизмеримых и несоизмеримых отрезков, о существовании длин, площадей и объемов). Вывод формул площадей и объемов проводится только для рациональных чисел.

Прежде чем приступить к изучению квадратного корня, следует повторить прямые и обратные действия над числами.

Прямые действия	Обратные действия
1-я ступень. *Сложение* $a+b=c$; пример: $18+5=23$.	*Вычитание* $a=c-b$, или $b=c-a$; пример: $18=23-5$, или $5=23-18$.
2-я ступень. *Умножение* $a\cdot b=c$; пример: $8\cdot 5=40$.	*Деление* $a=c:b$, или $b=c:a$; пример: $8=40:5$, или $5=40:8$.
3-я ступень. *Возвышение в степень* $a^b=c$; пример: $3^2=9$; $2^3=8$.	

Прямому действию (возведению в степень) соответствуют два обратных действия:

1) когда по степени числа c и показателю степени b находится основание a,

2) когда по степени числа c и основанию степени a находится показатель степени b.

В VIII классе рассматривается только первое обратное действие, которое называется извлечением корня; для действия извлечения корня вводится особый знак $\sqrt{\ }$ (знак радикала).

Следует привести ряд задач, в которых используется извлечение корня, например: дана площадь квадрата, требуется найти его сторону, то есть дано $S=a^2$, требуется найти a.

Ученики должны ясно понимать, что если $\sqrt{a}=b$, где $a>0$, то $a=b^2$; точно так же если $\sqrt[3]{a}=b$, то $a=b^3$.

Необходимо добиваться от учащихся понимания следующих основных равенств: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ и $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$, и если $\sqrt{a}=b$, то $b^2=a$ $(a>0)$, $\sqrt[3]{a}=b$, то $b^3=a$ (a может быть положительным и отрицательным числом).

Далее следует остановиться на вопросе об арифметическом корне. Необходимо предварительно указать, что квадратный корень

из данного числа имеет два значения, например: $\sqrt{9}=+3$ и $\sqrt{9}=-3$, ибо $(+3)^2=9$ и $(-3)^2$ также равняется 9.

Во избежание двузначности извлечения квадратного корня вводится понятие об арифметическом корне: неотрицательный квадратный корень из неотрицательного числа называется арифметическим корнем из данного числа.

Полезно показать на примере необходимость введения арифметического корня. Пусть требуется найти значение выражения

$$\sqrt{16}+\sqrt{25}.$$

Если не пользоваться понятием об арифметическом корне, то мы будем иметь четыре значения для данного выражения:

$$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9,$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4-5=-1,$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{25}=-4+5=+1,$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{25}=-4-5=-9.$$

Следует указать учащимся, что понятие об арифметическом корне третьей степени не вводится, так как извлечение кубического корня (в области действительных чисел) есть действие однозначное.

Заметим, что несколько позднее при прохождении квадратного уравнения при извлечении квадратного корня берется два знака (плюс и минус).

Мы думаем, что все же можно остановиться на том, что во многих случаях квадратный (кубический) корень из данного числа не может быть рациональным числом. Легко показать, что $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом. Корень квадратный из 2 больше 1 и меньше 2, ибо

$$1^2<2<2^2,$$

следовательно, $\sqrt{2}$ не может быть целым числом.

Предположим, что $\sqrt{2}$ равняется несократимой дроби $\frac{p}{q}$.

Согласно определению

$$\frac{p^2}{q^2}=2.$$

Но $\frac{p}{q}$ несократимая дробь, тогда $\frac{p^2}{q^2}$ есть также несократимая дробь и, следовательно, $\frac{p^2}{q^2}$ не может равняться 2, то есть наше

предположение, что $\sqrt{2}$ есть рациональная дробь, неверно. Следует сказать, что $\sqrt{2}$ есть иррациональное число, не углубляя данное понятие.

Извлечение квадратного корня с точностью до 1 и с точностью до 0,1; 0,01 и т. д.

Алгорифм извлечения квадратного корня из чисел в программу восьмилетней школы не включен. Однако мы считаем полезным познакомить учеников с правилом извлечения квадратного корня из чисел. Этот вопрос изложен в «Алгебре» А. Н. Барсукова[1].

Предварительно с учащимися полезно проделать следующие упражнения:

а) Найти $\sqrt{9}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$.

Вывод: корень из однозначного и двузначного числа (если корень нацело извлекается) есть однозначное число.

б) Найти $\sqrt{144}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{2500}$.

Будет ли

$\sqrt{5476}$ равняться 74,

$\sqrt{9604}$ » 98?

Вывод: корень из трехзначного и четырехзначного числа есть двузначное число.

в) Будет ли

$\sqrt{11\,881}$ равняться 109,

$\sqrt{35\,721}$ » 189,

$\sqrt{110\,224}$ » 332,

$\sqrt{484\,416}$ » 696?

Вывод: корень из пятизначного или шестизначного числа будет трехзначным числом.

После этого ученики поймут, зачем надо разбивать подкоренное число на грани справа налево по две цифры в каждой грани, причем в последней грани может быть либо одна, либо две цифры; число граней будет равняться числу цифр корня.

Дальнейшее изложение может быть дано по учебнику А. Н. Барсукова.

Далее следует остановиться на том случае, когда корень из данного числа нацело не извлекается, например $\sqrt{69}$.

Ученики легко установят, что данный корень больше 8 и меньше 9, ибо

$$8^2 < 69 < 9^2,$$

[1] См. [193], § 95.

причем 8 мы называем корнем с недостатком с точностью до 1, а 9 корнем с избытком с точностью до 1.

Необходимо предложить учащимся несколько таких упражнений, например, $\sqrt{564}$ будет больше 23 (корень с недостатком с точностью до 1) и меньше 24 (корень с избытком с точностью до 1), ибо

$$23^2=529 \text{ и } 24^2=576.$$

Затем следует дать определение: найти корень из данного числа с точностью до 1 — это значит найти два таких рядом стоящих натуральных числа, между квадратами которых заключается подкоренное число, первое число называется корнем с недостатком, а второе число — корнем с избытком с точностью до 1.

Корни с недостатком и с избытком с точностью до 1 записываются следующим образом:

$$\sqrt{69}\approx 8 \text{ (с недостатком) или } \left(\sqrt{69}\right)_1^{-}\approx 8.$$

$$\sqrt{69}\approx 9 \text{ (с избытком) или } \left(\sqrt{69}\right)_1^{+}\approx 9.$$

Аналогично для второго корня имеем:

$$\sqrt{564}\approx 23 \text{ (с недостатком) или } \left(\sqrt{564}\right)_1^{-}\approx 23,$$

$$\sqrt{564}\approx 24 \text{ (с избытком) или } \left(\sqrt{564}\right)_1^{+}\approx 24.$$

Необходимо проделать несколько примеров на нахождение корня с недостатком и с избытком с точностью до 1, а также рассмотреть случаи извлечения корня с точностью до 1 из смешанного числа, например $\sqrt{10{,}2}$.

В данном случае не обращается внимание на дробную часть и извлекается корень с точностью до 1 из целой части, то есть

$$\sqrt{10{,}2}\approx 3 \text{ (с недостатком),}$$

$$\sim 4 \text{ (с избытком).}$$

Перед тем как перейти к извлечению корня с точностью до 0,1; 0,01 и т. д., следует указать, что если подкоренное число увеличить в 100; 10 000; 1 000 000 и т. д. раз, то корень увеличится в 10; 100; 1000 и т. д. раз, например:

$$\sqrt{4}=2, \quad \sqrt{400}=20.$$

Отсюда следует, что если увеличить подкоренное число в 10^2; 100^2 и т. д. раз, то, чтобы значение корня не изменилось, необходимо корень уменьшить в 10; 100 и т. д. раз.

Примечание. Если извлечение корня с приближенной точностью дается после вывода правил действий с корнями, то данное правило можно доказать.

$$\frac{\sqrt{a\cdot 10^{2k}}}{10^k}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{10^{2k}}}{10^k}=\frac{\sqrt{a}\cdot 10^k}{10^k}=\sqrt{a}.$$

Надо предостеречь учеников от ошибки, которую они часто допускают: если увеличить подкоренное число в 10 раз, 100 раз и т. д., то корень увеличится в 10; 100 и т. д. раз, например:

$\sqrt{24}$ с точностью до 1 с недостатком будет 4, с избытком — 5,

$\sqrt{240}$ с точностью до 1 с недостатком будет 15, с избытком — 16, а не 40 и 50.

Затем можно перейти к извлечению корня из данного числа с точностью до 0,1; 0,01 и т. д.

Возьмем расширенный ряд натуральных чисел:

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots \qquad (1)$$

и ряд, члены которого будут квадратами членов ряда (1):

$$0;\ 1^2,\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ 5^2;\ \ldots \qquad (2)$$

Для нахождения $\sqrt{2}$ с точностью до 1 мы будем брать в ряду (1) два таких рядом стоящих числа, между квадратами которых находится число 2:

$$1^2 < 2 < 2^2.$$

Ранее было сказано, что 1 будет приближенным значением $\sqrt{2}$ с недостатком, а 2 приближенным значением с избытком с точностью до 1.

Помножим подкоренное число 2 на 10^2:

$$2 \cdot 10^2 = 200$$

и найдем в ряду (1) два таких рядом стоящих числа, чтобы квадрат первого был меньше 200, а квадрат второго — больше 200. Искомые числа будут 14 и 15, так как $14^2 = 196$, а $15^2 = 225$.

Итак,

$$14^2 < 200 < 15^2.$$

Согласно определению

$\sqrt{200} \approx 14$ с точностью до 1 с недостатком,

$\sqrt{200} \approx 15$ с точностью до 1 с избытком,

то есть мы находим квадратный корень из 200 с точностью до 1. Так как мы увеличили подкоренное выражение в 100 раз, то, чтобы корень не изменился, необходимо результат уменьшить в 10 раз:

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$

или

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

1,4 есть наибольшая из десятичных дробей с знаменателем 10, квадрат которой меньше 2, а 1,5 есть наименьшая из десятичных дробей с знаменателем 10, квадрат которой больше 2. Разность между данными десятичными дробями равна 0,1.

1,4 называется приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1 с недостатком, а 1,5 — приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1 с избытком.

$$\sqrt{2}\approx 1{,}4 \text{ (с недостатком), или } (\sqrt{2})^{-}_{0,1}\approx 1{,}4;$$
$$\sqrt{2}\approx 1{,}5 \text{ (с избытком), или } (\sqrt{2})^{+}_{0,1}\approx 1{,}5.$$

Найдем теперь приближенное значение $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком с точностью до 0,01. Для этого умножим 2 на 100^2:

$$2\cdot 100^2=20\,000.$$

В ряду (1) найдем два таких рядом стоящих числа, между квадратами которых находилось бы число $2\cdot 100^2$.

Искомые числа будут 141 и 142, ибо $141^2=19\,881$ и $142^2=20\,164$. Следовательно,

$$141^2<2\cdot 100^2<142^2,$$

откуда

$$\left(\frac{141}{100}\right)^2<2<\left(\frac{142}{100}\right)^2.$$

1,41 будем называть приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01 с недостатком, а 1,42 — приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01 с избытком.

$$\sqrt{2}\approx 1{,}41 \text{ (с недостатком), или } (\sqrt{2})^{-}_{0,01}\approx 1{,}41,$$
$$\sqrt{2}\approx 1{,}42 \text{ (с избытком), или } (\sqrt{2})^{+}_{0,01}\approx 1{,}42.$$

Аналогично можно найти приближенные значения $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком с точностью до 0,001 и т. д.

После этого дается определение: приближенным значением квадратного корня с недостатком и с избытком с точностью до 0,1 (0,01, 0,001 и т. д.) называются два таких числа, отличающихся друг от друга на 0,1 (0,01; 0,001 и т. д.), из которых квадрат одного меньше, а квадрат другого больше данного числа.

Чтобы найти квадратный корень из данного числа с точностью до 0,1 (0,01; 0,001 и т. д.), необходимо подкоренное число умножить на 10^2 (100^2, 1000^2 и т. д.), затем извлечь квадратный корень с точностью до 1 и полученное число соответственно разделить на 10; 100; 1000 и т. д.

Полезно, чтобы ученики самостоятельно нашли приближенные значения с недостатком и с избытком с точностью до 1; 0,1; 0,01 для следующих корней:

$$\sqrt{3};\ \sqrt{1{,}5};\ \sqrt{0{,}75} \text{ и т. д.}$$

Полезно указать учащимся, что приближенные значения корня с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. записываются в виде десятичной дроби с одним, двумя, тремя и т. д. знаками после запятой. Если найдено приближенное значение корня с недостатком с точностью до 0,1 (0,01; 0,001 и т. д.), то, прибавив 0,1 (0,01; 0,001 и т. д.), получим приближенное значение корня с избытком с точностью до 0,1 (0,01; 0,001 и т. д.).

В некоторых таблицах даны значения квадратного корня с точностью до 0,0001, например: $\sqrt{176} \approx 13{,}2665$. Приближенные значения корня даны в таблице 6.

Таблица 6

С точностью	С недостатком	С избытком
1	13	14
0,1	13,2	13,3
0,01	13,26	13,27
0,001	13,266	13,267

Относительно последней цифры 5 мы не знаем, будет ли это значение с недостатком или с избытком, поэтому при помощи таких таблиц нельзя находить приближенные значения с недостатком и с избытком с точностью до 0,0001.

С учениками следует проделать ряд примеров на нахождение приближенных значений корня с недостатком и с избытком, пользуясь таблицами.

Аналогично можно находить приближенное значение кубического корня с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001. Приведем пример. Найти $\sqrt[3]{4}$. Возьмем расширенный ряд натуральных чисел:

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots \qquad (1)$$

и ряд кубов этих чисел

$$0;\ 1^3;\ 2^3;\ 3^3;\ 4^3;\ 5^3;\ \ldots \qquad (2)$$

и найдем в ряду (1) два таких рядом стоящих числа, чтобы куб первого был меньше 4, а куб второго больше 4.

Искомые числа будут 1 и 2. Следовательно, с точностью до 1

$$\sqrt[3]{4} \approx 1 \text{ (с недостатком)},$$

$$\sqrt[3]{4} \approx 2 \text{ (с избытком)}.$$

Для нахождения $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком умножим подкоренное выражение на 10^3:

$$4 \cdot 10^3 = 4\,000.$$

В таблице кубов чисел находим два рядом стоящих числа, таких, что куб первого будет меньше, а куб второго — больше 4 000. Искомые числа будут

$$15^3 = 3\,375,$$
$$16^3 = 4\,096,$$

следовательно,

$$15^3 < 4 \cdot 1000 < 16^3,$$

или

$$\left(\frac{15}{10}\right)^3 < 4 < \left(\frac{16}{10}\right)^3.$$

Итак, имеем с точностью до 0,1:

$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}5 \text{ (с недостатком).}$$
$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6 \text{ (с избытком).}$$

Аналогично можно найти $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,01.

$$4 \cdot 100^3 = 4\,000\,000.$$

Имеем:

$$158^3 = 3\,944\,312,$$
$$159^3 = 4\,019\,679,$$

откуда

$$\left(\frac{158}{100}\right)^3 < 4 < \left(\frac{159}{100}\right)^3,$$

следовательно,

$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}58 \text{ (с недостатком),}$$
$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59 \text{ (с избытком).}$$

Тем же способом можно найти приближенное значение корня кубического из четырех с точностью до 0,001.

$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587 \text{ (с недостатком),}$$
$$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}588 \text{ (с избытком).}$$

После этих упражнений, пользуясь таблицами для кубического корня, ученики легко найдут значение кубического корня с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001. Например, $\sqrt[3]{19}$ (таблица 7).

Таблица 7

С точностью	С недостатком	С избытком
1	2	3
0,1	2,6	2,7
0,01	2,66	2,67
0,001	2,668	2,669

Заметим, что если необходимо извлечь квадратный корень из десятичной дроби, у которой нечетное число десятичных знаков после запятой, то нужно приписать к подкоренному выражению один нуль справа и отыскивать приближенное значение нового числа с избытком и недостатком. Например, найти $\sqrt{1{,}5}$.

Находим $\sqrt{150}$ и полученный результат делим на 10. $\sqrt{150} \approx 12$ с недостатком и 13 с избытком. Тогда $\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2$ с недостатком и $\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}3$ с избытком.

Неоднократно приходилось наблюдать, что ученики пишут: $\sqrt{1,6}$ равняется 0,4. Для предупреждения подобных ошибок следует решить с учениками несколько таких примеров: найти квадратный корень из числа 160 с точностью до 1.

$\sqrt{160} \approx 12$ (с недостатком) и $\sqrt{160} \approx 13$ (с избытком). Следовательно,

$$\sqrt{1,6} \approx 1,2 \text{ (с недостатком)},$$

$$\sqrt{1,6} \approx 1,3 \text{ (с избытком)}.$$

Если требуется найти приближенное значение кубического корня из десятичной дроби, у которой число десятичных знаков после запятой не кратно 3, то нужно приписать к подкоренному выражению справа столько нулей, чтобы число десятичных знаков было кратно 3.

Например, найти $\sqrt[3]{0,27}$. С точностью до единицы $\sqrt[3]{270}$ будет равен с недостатком 6 и с избытком 7. Поэтому

$$\sqrt[3]{0,27} \approx 0,6 \text{ (с недостатком)},$$

$$\sqrt[3]{0,27} \approx 0,7 \text{ (с избытком)}.$$

Таких упражнений мы рекомендуем проделать несколько, например:

$\sqrt{0,8} \approx 0,89$ с недостатком и 0,90 с избытком;

$\sqrt[3]{0,9} \approx 0,96$ с недостатком и 0,97 с избытком.

Приближенные значения квадратного и кубического корня можно найти и графическим способом.

Построим график функции $y=\sqrt{x}$. Возьмем таблицу значений данной функции (область задания функции будет $x \geqslant 0$).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$y=\sqrt{x}$	0	0,71	1	1,2	1,41	1,58	1,73	1,87	2	2,12	2,23	2,34	2,45

Примечание. Соответствующие значения $y=\sqrt{x}$ ученики должны найти самостоятельно.

На миллиметровой бумаге построим точки, соответствующие значениям x и y, и соединим эти точки плавной кривой (рис. 32), тогда получим график функции $y=\sqrt{x}$.

Данный график представляет собой параболу, у которой осью симметрии является ось OX.

Примечание Для большей наглядности масштаб на оси OY лучше взять в 2 или 4 раза больше, чем на оси OX

При помощи данного графика легко найти приближенные значения корня, например: $\sqrt{3{,}7} \approx 1{,}9$.

Аналогично можно построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$. В данном случае область задания функции будет любое рациональное число (в VIII классе понятие об иррациональном числе не изучается и поэтому не нужно говорить о том, что областью задания является вся область действительных чисел). Ученики сами должны составить следующую таблицу для значений функции $y = \sqrt[3]{x}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = \sqrt[3]{x}$	0	1	1,26	1,44	1,59	1,71	1,82	1,91	2

Аналогичная таблица получается и для отрицательных значений x. Возьмем на миллиметровой бумаге систему координат, масштаб на оси OY возьмем в 2 раза больше, чем на оси OX. Построим соответствующие точки и соединим их плавной кривой (рис. 33). Получим график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

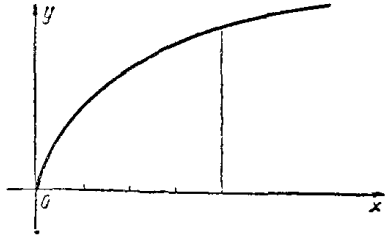


Рис 32

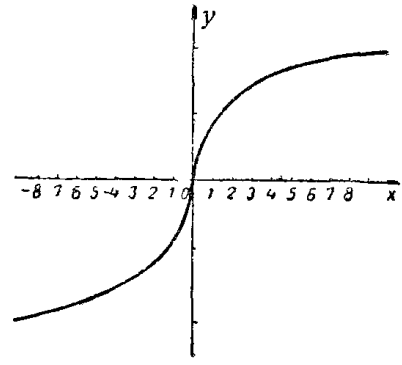


Рис 33

При помощи данного графика легко можно найти приближенные значения кубического корня, например

$$\sqrt[3]{2{,}5} \approx 1{,}35.$$

§ 20. Действия над радикалами

По программе в VIII классе изучаются только действия с квадратными радикалами.

В учебнике алгебры А. Н. Барсукова приводятся доказательства теорем о радикалах, например: «Чтобы извлечь корень квадратный из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить».

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

«Доказательство проведем непосредственной проверкой ...
Возведем в квадрат правую часть ...

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2=abc.$$

Получилось подкоренное выражение, стоящее в левой части».

Известно, что проверка возведением в квадрат не всегда дает нам основание утверждать, что исходное положение является верным. Например, положим, что $3=-3$. Возведем обе части равенства в квадрат $3^2=(-3)^2$, или $9=9$. Отсюда еще не следует, что исходное равенство верно.

Заметим, что приведенные в учебнике А. Н. Барсукова теоремы требуют некоторого дополнения. Действительно,

$$\sqrt{(-4)\cdot(-9)}$$

существует и равен 6, но нельзя писать, что

$$\sqrt{(-4)\cdot(-9)}=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9},$$

ибо корни в первой части равенства в области действительных чисел не существуют. Поэтому теоремы следует сформулировать так:

Теорема 1. *Чтобы извлечь квадратный корень из произведения, можно извлечь его отдельно из каждого сомножителя, если корень из каждого сомножителя существует, и результаты перемножить.*

Существует и другое доказательство. Докажем теорему для двух сомножителей. Пусть дано: $\sqrt{ab}$. Положим $\sqrt{a}=x$ и $\sqrt{b}=y$, причем каждый корень существует. Согласно определению имеем: $a=x^2$ и $b=y^2$. Перемножим почленно данные равенства:

$$ab=x^2\cdot y^2,$$

или

$$ab=(xy)^2.$$

Тогда $\sqrt{ab}=x\cdot y$.

Подставим вместо x и y их значения:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \text{и т. д.}$$

Аналогично доказывается теорема об извлечении корня из дроби: также следует добавить, что корни из числителя и знаменателя существуют.

Несколько подробнее желательно остановиться на вопросе о вынесении множителя за знак радикала и о внесении множителя под знак радикала. Предварительно перед учащимися должна быть поставлена задача: какое из чисел больше $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$? Вводя множители под знак радикала, получим:

$$\sqrt{18} \text{ и } \sqrt{12},$$

откуда

$$3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}.$$

Подобных упражнений следует проделать несколько. Следует обратить внимание учеников на то, что при вычислении приближенного значения иррационального выражения с некоторой точностью необходимо множитель, стоящий перед корнем, ввести под знак корня и лишь потом находить приближенное значение. Например, найти приближенное значение $3\sqrt{5}$ с точностью до 0,1:

$\sqrt{5} \approx 2{,}23$ (с недостатком) и $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (с избытком).

Следовательно,

$$3\sqrt{5} \approx 6{,}69 \text{ (с недостатком)},$$

$$3\sqrt{5} \approx 6{,}72 \text{ (с избытком)}.$$

Если предварительно ввести множитель 3 под знак радикала, то получим $\sqrt{45}$. Приближенное значение $\sqrt{45}$ с точностью до 0,01 будет

$$\sqrt{45} \approx 6{,}70 \text{ (с недостатком)},$$
$$\sqrt{45} \approx 6{,}71 \text{ (с избытком)}.$$

Во втором случае точность более высокая. Поэтому полезны следующие примеры: вычислить с точностью до 0,01 значение выражения

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{17} - 2\sqrt{108}.$$

Решение. Необходимо ввести все множители под знак радикала и найти значение каждого корня с точностью до 0,001, а сумму округлить до 0,01.

§ 21. Логарифмическая линейка

В программу восьмилетней школы по математике включена тема «Счетная (логарифмическая) линейка», на которую отведено 9 часов. Содержание этой темы следующее: основная шкала

счетной линейки, умножение и деление чисел при помощи линейки. Несколько позже указано: извлечение квадратного корня из положительного числа по таблицам и при помощи счетной линейки; извлечение кубического корня по таблицам и при помощи счетной линейки.

В объяснительной записке к программе мы встречаем: «Вычисления посредством линейки должны прочно войти в обиход учащихся и применяться на уроках математики, физики, химии и других предметов».

Высказанное положение является совершенно правильным Мы полагаем, что во всем дальнейшем курсе, где возможно и целесообразно, вычисления должны проводиться при помощи линейки.

Крайне желательно, чтобы каждый ученик имел свою собственную линейку Существенную помощь при выборе линейки может оказать учитель, указав школьникам на необходимость совпадения на линейке штрихов, свободное перемещение в корпусе движка вправо и влево и т. д.

Необходимо сообщить ученикам и попросить их записать правила обращения с линейкой:

1) Счетную линейку сохраняйте в сухом месте при нормальной температуре.
2) Нельзя держать линейку около печки, парового отопления, на солнце, так как она может покоробиться Нельзя держать линейку во влажном месте, так как она может разбухнуть и движок перестанет свободно перемещаться в пазах линейки
3) Линейку следует хранить в футляре, так как без футляра ее можно поцарапать.
4) Нельзя пользоваться счетной линейкой для черчения Нельзя ее употреблять и как масштабную линейку.
5) При загрязнении линейки ее нужно протереть влажной мягкой тряпочкой. Нельзя протирать линейку бензином, денатуратом или древесным спиртом, так как эти жидкости растворяют краску и даже целлулоид.
6) Если движок ходит туго в пазах линейки, то боковые ребра движка можно протереть парафином или воском
7) Следует предохранять линейку от ударов

При несоблюдении этих правил линейка быстро выходит из строя.

Далее следует показать ученикам, как удобнее всего держать линейку, и сказать, что нельзя на линейке делать отметки карандашом или чернилами и т д. Следует обратить особое внимание, на каком расстоянии от глаз следует держать линейку.

В учебнике алгебры А. Н. Барсукова дано краткое описание устройства линейки. Самым сложным местом в изучении линейки является ее устройство, которое связано с функциональными шкалами.

Программа предлагает сперва познакомить учеников с выполнением действия умножения и деления при помощи линей-

ки, а затем с возвышением в квадрат числа и извлечения из него квадратного корня.

Мы предлагаем следующий порядок изучения данной темы: понятие о функциональных шкалах, возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня, возвышение в куб и извлечение кубического корня из чисел при помощи линейки, а затем умножение и деление чисел.

Мы рекомендуем тему «Счетная линейка» изучать постепенно, а не в одном месте.

С выполнением действия сложения и вычитания при помощи двух шкал мы уже познакомились в параграфе о положительных и отрицательных числах. Следует теперь остановиться на двух линейных шкалах с разными единицами масштаба. Пусть дана функция

$$y=2x+1.$$

Требуется найти значение y при различных значениях $x\geqslant 0$ Составим следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	. . .
y	1	3	5	7	9	. . .

Возьмем две параллельные шкалы, находящиеся друг от друга на расстоянии d (рис. 34). Масштаб на шкале A возьмем $1=1$ *см*. Из точки на шкале A с пометкой *1* восставим перпендикуляр к кромке линейки, на шкале B получим некоторую точку, которую сопроводим пометкой *3*; пометка точки B на шкале, соответствующая точке с пометкой *2* на шкале A, будет *5* и т. д. Пометке *0* на шкале A будет соответствовать точка с пометкой *1* на шкале B.

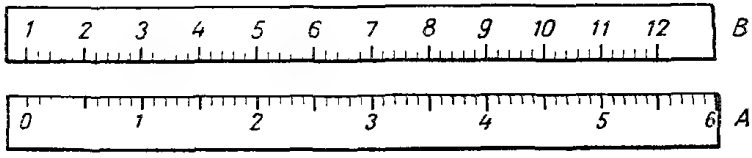


Рис 34

Разделим отрезок с пометками *1* и *3*; *3* и *5* и т. д. на шкале B на 10 равных частей, тогда пометки между двумя штрихами на шкале B будут отличаться друг от друга на 0,2. Таким образом можно градуировать шкалу B.

При помощи двух этих шкал очень просто найти графическим путем значение y по данному значению x, например, если $x=2{,}3$, то значением y будет соответствующая пометка на шкале B, то есть

$$y=5{,}6.$$

После одного или нескольких примеров с равномерными шкалами учащиеся уяснят смысл и ценность таких шкал.

Затем следует перейти к нахождению квадрата данного числа при помощи двух шкал. Заметим, что в данном случае уже одна шкала будет неравномерно-функциональной. Возьмем, как и раньше, две полоски бумаги, лучше всего миллиметровой (рис. 35). На шкале A возьмем масштаб $1=1$ *см* и разделим промежутки между целочисленными пометками на 10 равных частей; шкала будет равномерной. Найдем теперь пометки на шкале B так, чтобы они соответствовали бы пометкам квадратов на шкале A. Предварительно составим следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	. . .
y	0	1	4	9	16	25	. . .

Восставим из точек с целыми пометками на шкале A перпендикуляры к краю линейки до пересечения с шкалой B. Соответствующие точки на шкале B снабдим пометками *0; 1; 4; 9; 16; 25; . . .* . Мы видим, что длины равных отрезков на шкале B будут изображаться различными числами. В этом случае мы будем иметь неравномерную функциональную шкалу.

Для того чтобы найти промежуточные пометки на шкале B, можно поступать следующим образом: возьмем на шкале A точку с пометкой *1,5*, соответствующую точку на шкале B снабдим пометкой

$$(1{,}5)^2=2{,}25.$$

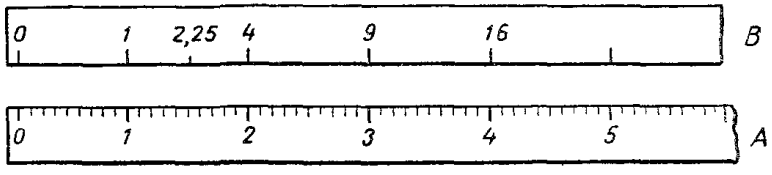


Рис. 35

Так можно поступать и для других значений x, однако на шкале B для удобства вычислений желательно иметь пометки, которые бы отличались друг от друга или десятыми, или сотыми долями. Поэтому градуируют шкалу B несколько иначе. Прежде всего на шкале B наносят целочисленные пометки: *0; 1; 4; 9; 16; . . .* .

Покажем теперь, как найти на шкале B точку с пометкой *2*. Имеем: $x^2=2$, отсюда по таблице для квадратного корня имеем $x=\sqrt{2}\approx 1{,}41$. В точке с пометкой *1,4* на шкале A восставим

перпендикуляр к краю линейки, соответствующую точку на шкале B снабдим пометкой *2*.

Найдем теперь на шкале B точку с пометкой *3*. Имеем: $3=x^2$, откуда $x=\sqrt{3}\approx 1{,}7$. Точке с пометкой *1,7* на шкале A будет соответствовать точка на шкале B с пометкой *3*. Таким образом можно найти все целочисленные пометки на шкале B.

Найдем теперь промежуточные пометки на шкале B. Для нахождения пометки *1,5* имеем $1{,}5=x^2$, откуда $x=\sqrt{1{,}5}\approx 1{,}22$, или 1,2.

Для точки 0,5 соответствующая пометка на шкале B будет *0,7*, а для точки 0,75 соответствующая пометка на шкале B будет *0,87*, или *0,9*, и т. д.

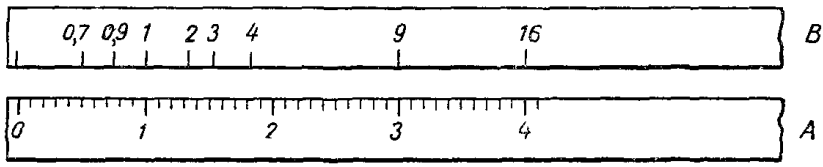


Рис. 36

Чтобы не «затемнить» шкалу B, на нее наносят штрихи, соответствующие половине целых значений, то есть 1,5; 2,5; 3,5 и т. д. В промежутке (0; 1) штрихи должны быть нанесены через 0,1 масштабной единицы.

Промежутки между вычисленными значениями на шкале B можно разделить на равные части, считая, что с некоторым приближением цена делений изменяется равномерно.

Таким образом сами ученики изготовят себе шкалы для возведения чисел в квадрат и извлечения квадратного корня из чисел. Если они достаточно аккуратно нанесут деления на шкалах A и B, то свободно смогут выполнять возвышение числа в квадрат и извлечение квадратного корня из чисел.

Нужно подчеркнуть, что при помощи самодельной линейки или счетной линейки, изготовленной на фабрике, результаты всех вычислений получаются приближенные, однако вполне достаточные для практики.

Можно рекомендовать отдельным ученикам изготовить линейку для возвышения чисел в куб и для извлечения кубического корня из чисел.

После того как школьники усвоят понятие о функциональных шкалах, можно перейти к изучению счетной логарифмической линейки. Математическое обоснование устройства основной шкалы D в VIII классе невозможно, ибо учащиеся незнакомы с логарифмами. В этом случае надо сказать им, что теоретическое обоснование шкал счетной линейки будет дано позже, в

старших классах. Для любознательных учеников в VIII классе на внеклассных занятиях можно дать следующее изложение устройства шкал логарифмической линейки.

Пусть дана функция $y=10^x$.

Легко найти значения y для целочисленных значений x

x	0	1	2	3	4
y	1	10	100	1000	10 000

Сравнительно нетрудно найти значения y, когда x принимает промежуточные значения, например: $x=0{,}5$, $y=\sqrt{10}\approx 3{,}16$; для $x=\frac{1}{4}$ значение функции будет $y=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}\approx\sqrt{3{,}16}\approx 1{,}77$.

Имеются в математике специальные таблицы, которые позволяют найти значение функции $y=10^x$ для любого значения x. Часто приходится решать обратную задачу: найти значение x для соответствующего значения y. Мы находим лишь приближенные значения x, за исключением того случая, когда y есть целая степень 10.

Полезно привести часть таблицы (табл. 8). При помощи данной таблицы умножение и деление чисел можно заменить сложением и вычитанием, возвышение в степень и извлечение квадратного корня — умножением и делением показателя степени. Пусть требуется найти $3\cdot 8$. Найдем по таблице соответствующие значения x и возьмем их сумму

$$0{,}477+0{,}903=1{,}380.$$

Таблица 8

y	x	y	x	y	x
1	0	11	1,041	21	1,322
2	0,301	12	1,079	22	1,342
3	0,477	13	1,114	23	1,362
4	0,602	14	1,146	24	1,380
5	0,699	15	1,176	25	1,398
6	0,778	16	1,204	26	1,415
7	0,845	17	1,230	27	1,431
8	0,903	18	1,255	28	1,447
9	0,954	19	1,279	29	1,462
10	1	20	1,301	30	1,477

По таблице для $x=1{,}380$ найдем $y=24$, то есть 24. Пусть требуется найти $28:4$. Соответствующие значения аргумента будут 1,447 и 0,602. Для разности $1{,}447-0{,}602=0{,}845$ соответствующее значение y будет 7, то есть $28:4=7$.

Так же легко найти 3^2. Для $y=3$ соответствующее значение $x=0{,}477$. Умножим

$$0{,}477\cdot 2=0{,}954$$

и найдем по таблице соответствующее значение y, получим 9. При извлечении квадратного корня показатель степени приходится делить на 2, например, найти $\sqrt{25}$. Для $y=25$ соответствующее значение x будет 1,398.

$$1{,}398:2=0{,}699.$$

Для $x=0{,}699$ y будет равняться 5.

Применение такой таблицы значительно упрощает все вычисления. Можно сказать, что такая таблица носит название логарифмической и с ней ученики познакомятся в старших классах, а в VIII классе познакомятся с линейкой, устроенной на основе логарифмической таблицы.

Познакомимся с устройством основной шкалы D.

Возьмем таблицу.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000

Примем за единицу масштаба длину отрезка в 25 *см*=250 *мм* (длину логарифмической линейки). Найдем соответствующие значения y в миллиметрах.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,000	75	119	150	175	195	211	226	233	250

Отложим на прямой OM отрезок, равный 250 *мм;* от точки O отложим отрезок, равный 75 *мм,* и снабдим его пометкой *2,* затем отложим отрезок, равный 119 *мм,* и снабдим его пометкой *3* и т. д. (рис. 37).

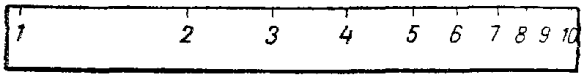


Рис. 37

Отрезок OM с полученными пометками назовем логарифмической функциональной шкалой (термин «функциональная шкала» в VIII классе можно не употреблять). Заметим, что на дан-

ной шкале откладываются отрезки, равные значениям функции, а пометки в концах этих отрезков указывают соответствующие значения аргумента. Пользуясь таблицами, можно найти и промежуточные значения аргумента.

Шкала K, то есть шкала квадратов чисел, является также функциональной шкалой, только масштаб выбран в два раза меньше.

Примечание. Для нее имеем $y=\lg x^2=2\lg x$. Так как на длине всего основного отрезка укладывается две логарифмические шкалы, то масштаб уменьшен в два раза.

Шкала K, называемая шкалой кубов, построена аналогично основной шкале D, но масштаб для шкалы K взят в три раза меньше ($y=\lg x^3=3\lg x$); таким образом на ней укладываются три логарифмические шкалы.

Шкала B устроена аналогично шкале A, а шкала C — аналогично шкале D.

Как мы уже сказали, изучение счетной линейки следует начинать с описания шкалы D. Необходимо научить учащихся чтению чисел на шкале D и нахождению штриха, соответствующего данному числу.

После того как учащиеся полностью овладевают шкалой D, можно перейти либо к умножению и делению чисел при помощи линейки, как это указано в программе, либо познакомить учеников с возведением числа в квадрат и извлечением квадратного корня из числа, затем с возвышением числа в куб и извлечением кубического корня из числа и, наконец, к умножению и делению чисел.

Нам кажется, что такой порядок изучения линейки более удобный. В этом случае можно рассредоточить материал темы о счетной линейке и изучать его постепенно.

Мы будем придерживаться этого порядка изучения логарифмической линейки.

После ознакомления с устройством шкал C, D и A, B счетной линейки следует перейти к возвышению в квадрат и к извлечению квадратного корня из чисел при помощи этих шкал. Сперва, конечно, следует предлагать ученикам следующие примеры: найти $(2)^2$; $(3)^2$; $(12)^2$ и т. д. и $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$ и т. д. Затем уже перейти к действиям с дробными числами, например:

$$(1{,}5)^2;\ (0{,}3)^2;\ (1{,}6)^2;\ \ldots.$$

и

$$\sqrt{1{,}4};\ \sqrt{1{,}8};\ \sqrt{13{,}2}\ \text{и т. д.}$$

Если в классе имеется школьная демонстрационная логарифмическая линейка, то вызванный ученик находит соответствующий

результат, а остальные учащиеся производят аналогичные вычисления на своих линейках.

Возвышение в квадрат чисел и извлечение квадратного корня из чисел следует закончить упражнениями следующего вида: Найти x, если

$$x=\sqrt{4{,}8}+1{,}25^2-\sqrt{0{,}75}+\sqrt{1{,}25}-2{,}31^2.$$

Мы рекомендуем все вычисления на линейке на первых порах контролировать вычислениями при помощи таблиц; затем, когда ученики уже приобретут некоторые навыки, а главное «уверуют» в линейку, вычисления при помощи таблиц можно значительно сократить. Однако следует помнить, что для тех случаев, когда требуется большая точность, вычисления лучше производить при помощи таблиц.

Ознакомление с нахождением кубов чисел и с извлечением кубического корня из чисел проводится примерно по тому же плану, что и возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня из чисел.

Наиболее трудным вопросом является умножение и деление чисел при помощи счетной линейки. Изложение этого вопроса следует начинать с описания устройства шкал C и D. Далее необходимо проделать с учениками упражнения на нахождение числа на данных шкалах и на чтение числа, соответствующего данному штриху. На этом следует задержаться до тех пор, пока ученики не станут без ошибок решать прямую и обратную задачу.

Конечно, умножение и деление следует начинать с таких чисел, результат действия над которыми может быть найден сразу, например:

$$2\cdot3;\ 4\cdot6;\ 28:4;\ 36:9 \text{ и т. д.}$$

Затем следует перейти к более сложным примерам.

Материал о счетной линейке в учебнике алгебры А. Н. Барсукова (Учпедгиз, 1964) изложен вполне удовлетворительно. Добавим только следующее: в вычислениях при помощи счетной линейки предварительно следует пользоваться «прикидкой результата», что предостерегает от ошибок.

Мы не рекомендуем в VIII классе давать понятие о порядке числа.

ГЛАВА VI

УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ В VIII КЛАССЕ

§ 22. Квадратные уравнения

Следует дать определение: «уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \text{ где } a \neq 0,$$

левая часть которого есть многочлен второй степени относительно переменной x, а правая часть нуль, называется уравнением второй степени или квадратным уравнением с одним неизвестным». (Ученики часто ошибочно считают квадратным уравнением всякое уравнение, в котором неизвестное встречается во второй степени, например:

$$\frac{1}{x^2-2}+x-2=0.)$$

Еще раз следует напомнить ученикам, что о степени уравнения можно говорить только тогда, когда левая часть есть полином.

Некоторые авторы учебников называют a старшим коэффициентом. Мы предпочитаем следующие названия: a — коэффициент при неизвестном во второй степени, b — коэффициент при неизвестном в первой степени; c — свободный член.

Заметим, что всегда можно считать $a>0$, ибо если $a<0$, то можно переменить знаки у всех членов на противоположные.

Наиболее экономный путь изучения квадратного уравнения — это сразу вывести формулу для корней уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

затем рассмотреть частные случаи, когда $a=1$; $b=0$ или $c=0$ и т. д. Но по чисто методическим соображениям обычно начинают изложение с частных случаев: неполных квадратных уравнений, приведенного квадратного уравнения и, наконец, общего вида квадратного уравнения.

В методической и учебной литературе по алгебре существуют два способа вывода формулы для корней квадратного уравнения. 1) разложение левой части уравнения, если оно имеет действительные решения, на множители, 2) выделение полного квадрата и т. д.

Сторонники первого способа (В. В. Репьев, К. С. Богушевский, К. П. Сикорский) считают, что он имеет ряд преимуществ, а именно:

1) он является общим способом, если только уравнение имеет действительные корни;

2) подготавливает учащихся к разложению на множители трехчлена второй степени;

3) преобразования, применяемые в этом способе, находят применение при изучении квадратной функции;

4) кроме того, решение квадратного уравнения разложением на множители освобождает от необходимости рассматривать четыре возможных комбинации, с которыми приходится иметь дело при извлечении квадратного корня из обеих частей уравнения.

Второй способ встречается в учебнике А. Н. Барсукова. Многие учителя школы предпочитают этот способ первому. Какой из способов выбрать — дело вкуса учителя. Нам кажется, что оба эти способа не исключают друг друга и могут быть использованы в школе.

К понятию квадратного уравнения следует подойти исходя из конкретных задач, например, пользуясь формулами из физики или из геометрии.

Часто приводят задачу, а решение откладывают на более позднее время, когда необходимые правила уже установлены. Мы считаем целесообразным показать и решение предложенной задачи, хотя бы более громоздким способом, например: «Найти основание прямоугольника, площадь которого равна 24 *см*², а периметр 20 *см*» (стороны прямоугольника принимают только целые значения). Эту задачу можно решить различными способами, в частности при помощи таблиц. Имеем уравнение

$$x(10-x)=24.$$

Составим таблицу 9.

Таблица 9

x	$10-x$	Площадь
1	9	9
2	8	16
3	7	21
4	6	24
5	5	25
6	4	24
7	3	21
8	2	16
9	1	9

Из таблицы следует, что основание равняется 4 или 6 *см*. Когда будет выведена формула для корней квадратного уравнения, снова придется вернуться к этой задаче и показать, что решение при помощи формулы значительно проще.

Последовательность изложения темы «Квадратные уравнения» примерно может быть следующей:

1) $ax^2+bx=0$, 3) $x^2+px+q=0$,
2) $ax^2+c=0$, 4) $ax^2+bx+c=0$.

Как уже было указано, решение каждого типа квадратного уравнения желательно начинать с задач практического характера или задач с геометрическим содержанием.

Начнем с 1-го типа. Можно предложить следующую задачу: «Площадь клумбы, имеющей форму квадрата, в два раза меньше площади второй клумбы, имеющей форму прямоугольника, у которого высота равна стороне квадрата, а основание на 3 *м* больше высоты. Найти сторону квадратной клумбы».

Решение. Обозначим сторону квадрата через x, тогда

$$2x^2=x\,(x+3),$$

или после упрощения

$$x^2-3x=0.$$

Вынося множитель x за скобки, получим

$$x\,(x-3)=0.$$

Необходимо напомнить учащимся, что если произведение двух сомножителей равно нулю, то необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из сомножителей равнялся нулю, то есть

$$x=0,\ x-3=0,$$

следовательно, $x_1=0$; $x_2=3$.

Подставляя найденные значения в уравнение, убеждаемся, что 0 и 3 являются корнями уравнения, но ответом к задаче служит $x_2=3$ *м*.

Далее следует решить следующие уравнения:

$$x^2+5x=0;\ 3x^2-2x=0;\ x^2-5x=0 \text{ и т. д.}$$

и, наконец,

$$ax^2+bx=0.$$

Корнями последнего уравнения будут $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

Вывод: квадратное уравнение вида $ax^2+bx=0$ всегда имеет два корня, один из которых равен 0.

Рассмотрим теперь уравнение вида $ax^2+c=0$.

Можно предложить ученикам следующую задачу: «Учетверенный квадрат некоторого числа равняется 625. Найти число».

Решение. Обозначим искомое число через x. Тогда

$$4x^2=625, \text{ или } 4x^2-625=0.$$

$(2x+25)\cdot(2x-25)=0$, откуда $x_1=-\frac{25}{2}$; $x_2=\frac{25}{2}$,

то есть искомое число $-\frac{25}{2}$ или $\frac{25}{2}$.

При разложении на множители левой части уравнений, например:

$$9x^2-4=0;\ 49x^2-25=0 \text{ и т. п.,}$$

никаких затруднений не возникает. Но многие ученики не могут сразу разложить на множители левую часть уравнения

$$5x^2-3=0.$$

Далее, разложение на множители левой части уравнения при $c>0$ (всегда предполагается, что $a>0$) невозможно, поэтому следует сказать учащимся, что уравнение вида $ax^2+c=0$ не всегда имеет решение.

Сперва на числовых примерах следует показать решение уравнения вида $x^2+px+q=0$ (приведенное уравнение), например решение уравнения

$$x^2+5x+6=0.$$

Член, содержащий неизвестное в первой степени, представим в виде суммы двух слагаемых

$$x^2+3x+2x+6=0$$

и полученное выражение разложим на множители

$$(x^2+3x)+(2x+6)=0,$$
$$x(x+3)+2(x+3)=0,$$
$$(x+3)(x+2)=0, \text{ откуда } x_1=-3;\ x_2=-2.$$

Не всегда сразу учащиеся догадываются, как можно представить левую часть уравнения

$$x^2-3x-18=0$$

в виде произведения двух множителей. Теорема Виета, при помощи которой в некоторых случаях легко найти корни уравнения, изучается позднее.

Значительно сложнее для учащихся решение уравнения

$$x^2-6x+7=0,$$

корни которого

$$x_1=3+\sqrt{2} \text{ и } x_2=3-\sqrt{2}.$$

Если уравнение имеет мнимые корни, то разложение на множители в области действительных чисел вообще невозможно.

Еще больше трудностей возникает при решении уравнения вида:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Поэтому некоторые учителя предпочитают второй способ вывода формулы для корней квадратного уравнения.

Общая идея заключается в следующем: прежде всего свободный член переносится в правую часть уравнения с противоположным знаком.

Решая уравнение

$$ax^2+c=0,$$

получим $x^2=-\frac{c}{a}$,

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Когда $c>0$, то учащиеся сразу делают вывод, что уравнение корней не имеет.

Для вывода формулы корней квадратного уравнения вида

$$x^2+px+q=0$$

поступают так: переносят свободный член в правую часть уравнения, изменив знак у него на противоположный:

$$x^2+px=-q.$$

Прибавляют к обеим частям уравнения такое выражение, чтобы левая часть уравнения была полным (точным) квадратом

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q.$$

Примечание. Прежде чем перейти к выводу формулы корней уравнения, необходимо повторить, что нужно добавить к выражению, чтобы получить точный квадрат, например:

$$x^2+6x,$$

$$x^2-8x,$$

$$x^2+3x,$$

$$x^2-5x,$$

$$x^2+2m \text{ и т. д.}$$

Далее имеем:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Вывод формулы корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ не представляет труда; достаточно разделить все уравнение на a.

Как только ученики усвоят вывод формулы для корней квадратного уравнения, следует уже решать квадратные уравнения по формуле.

Понятие о дискриминанте уравнения $D=b^2-4ac$ следует дать и при этом указать, что, если $D=b^2-4ac>0$, уравнение имеет два различных корня, $D=b^2-4ac=0$, уравнение имеет два равных корня (двукратный корень), $D=b^2-4ac<0$, уравнение не имеет решений (корней).

Аналогично, если $\frac{p^2}{4}-q>0$, уравнение имеет два различных корня, $\frac{p^2}{4}-q=0$, уравнение имеет два одинаковых корня (равные корни; двукратный корень), $\frac{p^2}{4}-q<0$, уравнение не имеет решений (нет корней). Следует указать, что формула для корней квадратного уравнения

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

является общей.

Если $c=0$, то

$$x_1=\frac{-b+b}{2a}=0, \quad x_2=-\frac{b}{a},$$

то есть мы получили корни уравнения вида $ax^2+bx=0$.

Если $b=0$, то корни уравнения будут

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}, \text{ или } x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}},$$

то есть получаются корни уравнения $ax^2+c=0$, когда $c<0$ (если $c>0$, уравнение не имеет решения).

Примечание. Следует обратить внимание учащихся на тот случай, когда коэффициент при неизвестном в первой степени есть четное число, то есть когда уравнение имеет вид

$$ax^2+2kx+c=0.$$

В этом случае формула для корней квадратного уравнения примет вид

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a},$$

или

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Вычисления в этом случае значительно проще.

Необходимо обращать внимание на уравнения, корни которых не являются рациональными числами и, следовательно, находятся приближенно с некоторой точностью.

Ученики самостоятельно могут вывести теорему Виета. Ее необходимо использовать для решения уравнений с небольшими по абсолютной величине целыми коэффициентами.

Желательно познакомить учащихся и с обратной теоремой: *если два числа* x_1 и x_2 *удовлетворяют условию*:

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1\cdot x_2=q,$$

то эти числа являются корнями уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Возможно следующее доказательство.

Из равенств $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$ исключаем x_2; $x_2=-x_1-p$. Тогда

$$x_1(-x_1-p)=q,$$

или

$$x_1^2+px_1+q=0,$$

то есть x_1 является корнем уравнения $x^2+px+q=0$.

Если из данных равенств исключить x_1, то получим

$$x_2^2+px_2+q=0,$$

то есть x_2 есть корень того же уравнения.

Укажем на одну ошибку, которую часто делают восьмиклассники.

Когда дано квадратное уравнение, например:

$$2x^2-8x+15=0,$$

они, применяя теорему Виета, находят корни 3 и 5, забывая, что теорема Виета справедлива для уравнения, у которого коэффициент при $x^2=1$.

Упражнений на теорему Виета имеется достаточно в задачнике П. А. Ларичева.

Необходимо обратить внимание на следующие упражнения:

1. В уравнении $x^2-5x+q=0$ разность корней равна 1. Найти корни уравнения.

2. В уравнении $2x^2-11x+q=0$ найти q, если $2x_1-x_2=2$, где x_1 и x_2 корни уравнения.

3. Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ суть x_1 и x_2. Составить новое квадратное уравнение, корни которого $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

4. α и β корни уравнения $x^2-5x+3=0$. Не решая квадратного уравнения, найти

$$\alpha^2+\beta^2 \text{ и } \alpha^3+\beta^3.$$

Указание: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$;

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$ и т. д.

Полное исследование квадратного уравнения не включено в программу для восьмилетней школы.

Однако после изучения теоремы Виета можно предложить ученикам заполнить следующую таблицу:

Таблица 10

D	Квадратное уравнение	$x^2 + px + q = 0$
$p^2 - 4q > 0$	Уравнение имеет два различных корня	$p<0$, $q>0$, оба корня положительные; $p>0$, $q>0$, оба корня отрицательные; $p<0$, $q<0$, корни разных знаков; положительный корень больше абсолютной величины отрицательного корня; $p>0$, $q<0$, положительный корень меньше абсолютной величины отрицательного корня;
$p^2 - 4q = 0$	Уравнение имеет два равных между собой корня	Если $p<0$, корни положительные; $p>0$, корни отрицательные; Если $q=0$, один корень равен 0, другой равен $-p$.
$p^2 - 4q < 0$	Уравнение не имеет корней	

Решение задач на составление квадратных уравнений не имеет принципиальных отличий от решения задач на составление уравнений 1-й степени (см. § 18).

Если при решении уравнения все его члены умножались на выражение, которое содержало неизвестное (неизвестное было в знаменателе), то обязательно сделать проверку, являются ли найденные корни корнями составленного по условию задачи уравнения.

Некоторые методисты (К. С. Богушевский, К. П. Сикорский) рекомендуют и для задач на квадратные уравнения применять табличную схему.

Приведем пример.

Задача. «Тепловоз, пройдя первый перегон в 24 *км*, был задержан на некоторое время, а потому следующий перегон проходил со скоростью, большей прежней на 4 *км/ч*.

Несмотря на то что второй перегон был длиннее первого на 14 *км*, тепловоз прошел его за время только на 10 *мин* большее, чем потребовалось на прохождение первого перегона. Определить первоначальную скорость тепловоза» [1].

[1] См. [207], задача № 1696.

Решение. Составим следующую схему:

Таблица 11

	Расстояние в км	Скорость движения в км/ч	Время движения в ч
Первая часть пути	24	x	$\frac{24}{x}$
Вторая часть пути	38	$x+4$	$\frac{38}{x+4}$

По условию задачи

$$\frac{38}{x+4}-\frac{24}{x}=\frac{1}{6},$$

откуда

$$x^2-80x+576=0,$$

$$x_1=72,\ x_2=8.$$

Так как скорость тепловоза вряд ли равняется 8 *км/ч*, то второе решение не будем принимать во внимание.

Проверка. $\frac{38}{72+4}-\frac{24}{72}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$

Мы считаем, что таблица-схема в некоторых случаях полезна, но не обязательно требовать составлять ее при решении каждой задачи.

К теме «Квадратные уравнения» относится и графическое решение уравнений Но графическое решение уравнений может быть отнесено и к теме «Функции».

§ 23. Системы уравнений высших степеней

В программе VIII класса из систем уравнений высших степеней рассматривается только система уравнений, состоящая из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени. Таким образом исключаются все искусственные способы решения систем уравнений высших степеней.

Если дано одно уравнение второй степени и одно уравнение первой степени с двумя неизвестными, например:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x+y=3,\end{cases}$$

то наиболее естественный прием решения заключается в следующем: из второго уравнения выражается одно неизвестное через другое и найденное значение подставляется в первое уравнение:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y=3-x,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x^2+(3-x)^2=5,\\ x+y=3.\end{cases}$$

Затем решается полученное квадратное уравнение относительно x и полученное значение x подставляется в уравнение первой степени.

Однако с некоторыми простейшими искусственными приемами решения системы все же следует познакомить учеников.

1) Применение теоремы Виета для системы уравнений.

Пусть дана система

$$\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3. \end{cases}$$

x и y можно рассматривать как корни некоторого квадратного уравнения, коэффициент которого при неизвестном в первой степени равен -3, а свободный член 2,

$$z^2-3z+2=0.$$

Решая это уравнение, получим

$$z_1=2;\ z_2=1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Можно использовать теорему Виета для решения следующей системы:

$$\begin{cases} x-y=4, \\ xy=5. \end{cases}$$

Достаточно положить $-y=z$, тогда

$$\begin{cases} x+z=4, \\ xz=-5. \end{cases}$$

2) Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Решение этой системы может быть сведено к применению теоремы Виета. Возведем обе части второго уравнения в квадрат и вычтем первое уравнение, тогда получим

$$\begin{cases} 2xy=4, \\ x+y=3. \end{cases}$$

3) Можно предложить учащимся решить следующую систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$$

Помножив обе части второго уравнения на 2 и сложив его с первым уравнением, получим

$$\begin{cases}(x+y)^2=25,\\ xy=6\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x^2+y^2=13\\ x^2y^2=36\end{cases} \text{ и т. д.}$$

§ 24. Функции и графики

Последняя тема курса алгебры в VIII классе носит название «Функции и графики». В объяснительной записке к программе сказано: «В этой теме должна быть введена функциональная терминология, более глубоко изучена линейная и квадратная функция . . .»

Понятие о переменных величинах дано ранее; в этой теме его надо только повторить.

Необходимо перечислить способы задания функций: 1) табличный, 2) графический, 3) аналитический (при помощи формулы), 4) словесный — и привести примеры функций из физики, техники, сельского хозяйства.

В этой теме можно дать определение функции с теоретико-множественной точки зрения, то есть подчеркнуть, что любому значению аргумента из области допустимых значений соответствует некоторое значение функции. Вопрос о введении символической записи $y=f(x)$ в VIII классе до сих пор не решен окончательно. Некоторые методисты считают, что дети сравнительно свободно справляются с математической символикой и абстрактное мышление доступно им в младшем возрасте. Поэтому они предлагают уже в восьмилетней школе вводить следующие символы; $a \in M$ (элемент a принадлежит множеству M); $A \subset B$ (A является частью множества B) и т. д. Символическая запись функции $y=f(x)$, по их мнению, вполне доступна ученикам VIII класса и поэтому может быть введена.

Изучение всякой функции желательно проводить по следующему плану:

1) область задания функции (область изменения аргумента),
2) область изменения функции,
3) четность и нечетность функции,
4) возрастание и убывание функции,
5) максимум и минимум функции,
6) выпуклость и вогнутость, точки перегиба,
7) корни функции,
8) непрерывность функции,
9) периодичность функции,
10) построение графика функции.

Возможны два подхода к изучению функции: сначала строится по уравнению график функции, затем изучаются аналитическим

путем ее свойства, при втором способе изучают аналитическим путем свойства функции, которые поясняются графиком функции.

В восьмилетней школе аналитическое исследование функции представляет слишком большие трудности для учащихся. Исходным а часто и единственным способом должен служить график функции, построенный по точкам, и свойства функции разбирают при рассмотрении графика. Более того, в VIII классе многие свойства функции (пп. 6, 8, 9) вовсе не рассматривают.

Следует подробно остановиться на линейной функции

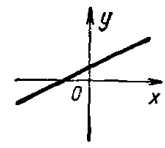
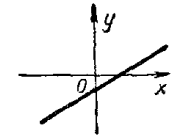
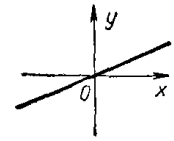
$$y=ax+b$$

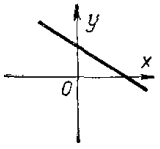
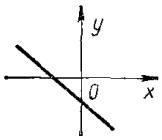
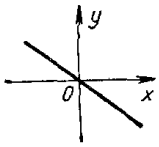
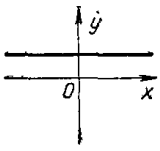
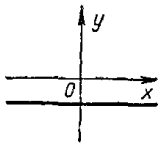
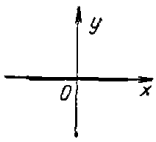
и доказать, что график линейной функции есть прямая линия и всякой прямой на плоскости соответствует линейная функция.

Необходимо указать, что независимо от значений a и b область задания функции есть любое значение x.

Полезно повторить все свойства линейной функции и снова заставить учащихся заполнить следующую таблицу:

Таблица 12

Свойства функции $y=ax+b$			График
$a>0$	возрастает	если $b>0$	
		если $b<0$	
		если $b=0$	

Свойства функции $y=ax+b$			График
$a<0$	убывает	если $b>0$	
		если $b<0$	
		если $b=0$	
$a=0$	сохраняет постоянное значение	$b<0$	
		$b<0$	
		$b=0$	

Наиболее трудным является случай, когда прямая параллельна оси OY. Соответствующее уравнение прямой будет $x=m$, где m может быть больше и меньше 0. Уравнение оси OY будет $x=0$ (рис. 38).

Из рассмотрения графика линейной функции должны понять, что, когда

$a>0$, функция возрастает,

$a<0$, функция убывает,

$a=0$, функция сохраняет постоянное значение.

Линейная функция не имеет ни максимума, ни минимума.

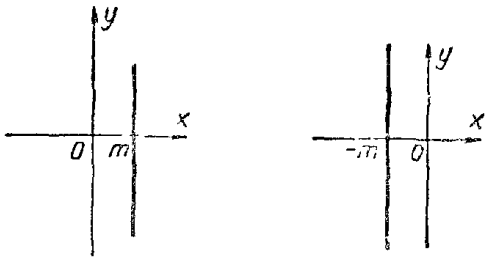


Рис 38

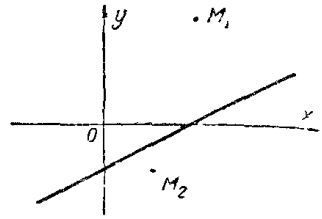


Рис. 39

Остановимся еще на одном вопросе. Всякая прямая делит плоскость на две части. Ранее было доказано, что координаты всякой точки, лежащей на прямой, удовлетворяют уравнению прямой и если координаты точки удовлетворяют уравнению прямой, то точка лежит на прямой. Если взять точку $M_1(x_1; y_1)$, лежащую над прямой (в верхней полуплоскости), и подставить координаты точки M_1 вместо x и y, то получим $y_1 - ax_1 - b > 0$.

Если же взять точку $M_2(x_2; y_2)$, лежащую под прямой (в нижней полуплоскости), и подставить вместо x и y координаты точки M_2, то получим $y_2 - ax_2 - b < 0$.

Пример. Пусть дано уравнение прямой $y - \frac{1}{2}x + 1 = 0$. Для точки M_1 (2; 3) (рис. 39) имеем $3 - \frac{1}{2}\cdot 2 + 1 > 0$. Для точки M_2 (1; -1) получим $-1 - \frac{1}{2} + 1 < 0$.

Затем следует рассмотреть функцию $y = \frac{a}{x}$.

График данной функции, как было указано ранее, ученики могут построить по точкам (рис. 40).

Непосредственно из чертежа можно вывести:

1) область задания функции — любое значение x, кроме $x=0$,

2) область изменения $y = \frac{a}{x}$;

когда $a > 0$, для первой ветви сколь угодно большие значения y до 0 и для второй ветви — от 0 до отрицательных значений y, сколько угодно больших по абсолютной величине.

Примечание. Для сокращения записи мы в дальнейшем будем пользоваться символами $+\infty$ и $-\infty$, введение которых в VIII классе, по мнению некоторых методистов, несколько преждевременно.

3) при $a > 0$ функция убывает, стремясь к 0, при возрастании x от 0 до $+\infty$. Когда x изменяется от $-\infty$ до 0, то функция убывает от 0 до $-\infty$.

Таким образом, при $a > 0$ функция все время убывает, при $x = 0$ функция не определена.

При $a < 0$ функция возрастает при изменении x от $-\infty$ до 0 и при изменении x от 0 до $+\infty$, то есть функция все время возрастает, при $x = 0$ она не определена.

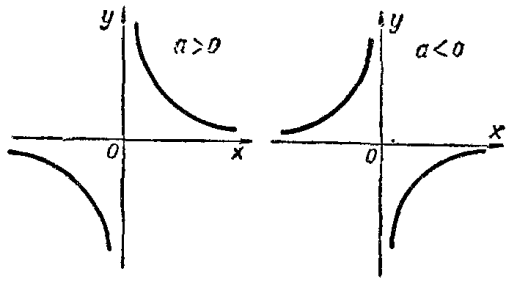


Рис. 40

Так как в геометрии уже дано понятие о симметрии, то следует сказать, что графики функций $y = ax$ и $y = \frac{a}{x}$ симметричны относительно начала координат.

Полезно заставить учащихся построить графики следующих функций: $y = \frac{1}{x-2}$; $y = \frac{2}{x+3}$ и т. д. и описать свойства этих функций.

Изучение квадратичной функции начинается с наиболее простого вида этой функции, то есть с функции $y = ax^2$. В этом случае значение функции пропорционально квадрату значений независимой переменной.

Сперва рассматривается частный случай (рис. 41), когда $a = 1$, то есть функция $y = x^2$. Легко устанавливается, что:

1) функция определена для любого значения аргумента, так как каждое число может быть возведено в квадрат;

2) функция может принимать только положительные значения и 0;

3) График функции, кроме точки (0; 0), расположен над осью OX, и ось OY является осью симметрии графика функции (график данной функции называется параболой.

В школьной практике вместо «парабола обращена вогнутостью в сторону положительных y» говорят, что парабола «обращена вогнутостью вверх»);

4) функция $y = x^2$ при изменении x от 0 до $+\infty$ возрастает, а при изменении x от $-\infty$ до 0 убывает до 0;

5) при $x = 0$ функция достигает минимума.

После этого следует перейти к рассмотрению функции $y=ax^2$, где $a\neq 1$. На одном чертеже строятся графики функций для различных значений $a>0$, например:

$$y=x^2;\ y=2x^2;\ y=\frac{1}{2}x^2.$$

Ученики легко усваивают, что эти функции обладают теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. Различие только в том, что при $a>1$ графики функций быстрее поднимаются вверх, а при $0<a<1$ — медленнее.

При $x=0$ функция $y=ax^2$ достигает наименьшего значения, наибольшего значения функция не имеет.

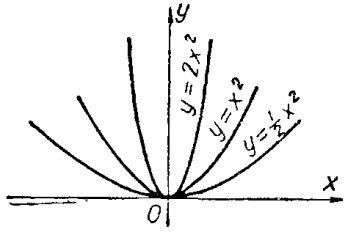


Рис. 41

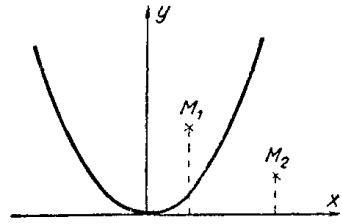


Рис. 42

Для построения этих графиков нет необходимости составлять заново таблицу значений. Например, имея график функции $y=x^2$, для нахождения графика функции $y=2x^2$ достаточно уменьшить масштаб на оси OY в два раза и поставить соответствующие пометки.

На другом чертеже сами учащиеся строят графики функции $y=ax^2$ для различных значений a $(a<0)$.

Необходимо установить общность и различие свойств функции $y=ax^2$ при $a>0$ и $a<0$.

Необходимо обратить внимание учеников на то, что функция $y=ax^2$ при $a<0$ принимает наибольшее значение при $x=0$ и не имеет наименьшего значения, что при $a<0$ график функции обращен вогнутостью вниз.

Можно указать, что если точка расположена «внутри» параболы, то при подстановке координат в уравнение параболы вместо x и y получим, что разность $y-ax^2$ больше нуля, а если точка взята «вне параболы», то разность будет меньше 0, например (рис. 42), дана функция

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ \text{или}\ y-\frac{1}{2}x^2=0.$$

Для точки M_1 (1; 2) имеем: $2-\frac{1}{2}\cdot 1>0$;

для точки M_2 (3; 1) $1-\frac{1}{2}\cdot 3^2<0$.

Полезны упражнения следующего рода: построить график функ-

ции $y=-ax^2$, если дан график функции $y=ax^2$ (воспользоваться симметричностью относительно оси OX данных графиков).

Изучение функции $y=ax^2+c$ и построение ее графика не вызовет затруднений, если сравнить ее с функцией $y=ax^2$. Характер изменения функции $y=ax^2+c$ остается тот же самый. При $a>0$ функция имеет минимум при $x=0$; при $a<0$ функция имеет максимум при $x=0$. Различие будет в том, что вершина параболы смещается вдоль оси OY в зависимости от знака c.

Полезно предложить учащимся начертить таблицу для различного расположения графиков (рис. 43).

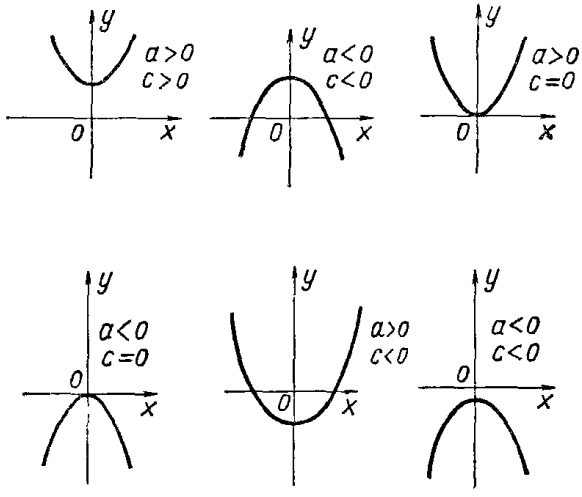


Рис. 43

Особенно существенным является вопрос о корнях уравнения

$$ax^2+c=0,$$

то есть тех значений аргумента, при которых функция принимает значение, равное 0.

Ранее было выведено, что корни данного уравнения определяются по формуле

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Было предположено, что $a>0$; сейчас мы это ограничение снимем и будем считать только $a\neq 0$. Исследуя эту формулу, учащиеся убедятся в том, что:

1) если a и c разных знаков, то уравнение имеет два корня, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку. График функции, то есть парабола, пересекает ось OX в двух точках;

2) если $c=0$, то уравнение имеет два корня, равных 0. Парабола касается оси OX своей вершиной;

3) если a и c одного знака, то уравнение не имеет корней. Парабола не пересекает ось OX. Здесь необходимо обратить внимание учащихся на то, как парабола расположена в зависимости от знака a.

После изучения функции вида $y=ax^2+c$ переходят к изучению функции, представляющей полный квадрат двучлена, то есть к функции вида

$$y=a(x+m)^2.$$

Этот промежуточный этап облегчает понимание сдвига параболы вправо или влево вдоль оси OX. Останавливаться очень подробно на функции данного вида нет большой необходимости. Достаточно проделать с учащимися несколько примеров следующего вида:

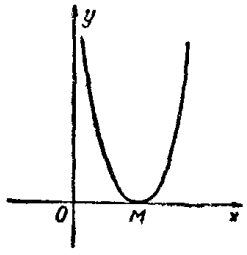


Рис 44

$$y=2x^2-12x+18$$

или

$$y=2(x-3)^2.$$

Ученики должны ясно представлять себе, что парабола обращена вогнутостью вверх ($a=2>0$), вершина параболы сдвинута вдоль оси OX на расстояние, равное 3 единицам, в точке M (3, 0) парабола касается оси OX и при $x=3$ функция достигает минимума (рис. 44). Аналогично исследуется и функция

$$y=-3x^2-12x-12.$$

Далее следует перейти к рассмотрению квадратичной функции общего вида:

$$y=ax^2+bx+c.$$

Некоторые учителя начинают с рассмотрения частных примеров, но в хорошо подготовленных классах можно сразу приступить к исследованию функции наиболее общего вида, тем более что идея та же, что и при выводе формулы квадратного уравнения. Рассуждения примерно следующие.

Выносим коэффициент при x^2 за скобки

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

добавляем и отнимаем в скобках такое выражение, чтобы первые два члена с добавленным выражением представляли полный квадрат, то есть в данном случае прибавим и отнимем $\frac{b^2}{4a^2}$, тогда

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

или

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Второе слагаемое — постоянное число, первое слагаемое изменяется в зависимости от изменения x.

Если $a>0$, первое слагаемое положительно при $x\neq\frac{-b}{2a}$ и равно 0, когда $x=-\frac{b}{2a}$.

Следовательно, функция принимает наименьшее значение при $x=-\frac{b}{a}$, которое будет равняться $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Наинизшей точкой параболы при $a>0$ является вершина параболы, следовательно, координаты вершины параболы будут

$$x_0=-\frac{b}{2a};\ y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Если $a<0$, то первое слагаемое либо отрицательно, либо 0. Отсюда следует, что наибольшее значение функции будет при

$$x=-\frac{b}{2a},$$

то есть наибольшее значение функции будет равно $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

При $a<0$ наивысшей точкой параболы будет вершина, координаты которой будут

$$x_0=-\frac{b}{2a};\ y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Общий вывод: при $x=-\frac{b}{2a}$ функция достигает минимума при $a>0$ и максимума при $a<0$.

Зная координаты вершины параболы и знак коэффициента a, легко представить, как расположена парабола. Полезно проделать с учениками несколько упражнений следующего рода: построить график функции

$$y=2x^2-4x-1.$$

Решение. Координаты вершины параболы будут

$$x_0=-\frac{-4}{4}=1;\ y_0=-\frac{16-4\cdot2}{4}=-2;$$

так как $a=2>0$, то парабола вогнутостью обращена вверх.

Далее следует найти несколько точек параболы, давая x произвольные значения, например $x=0$; $x=2$, и соответствующие значения y (рис. 45). Ученики должны самостоятельно описать свойства данной функции, исходя из геометрического рассмотрения соответствующего графика.

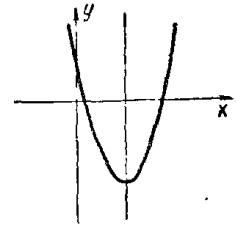
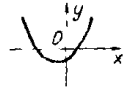
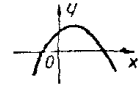
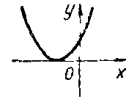
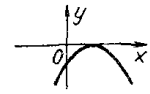
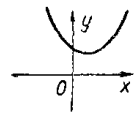
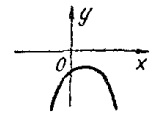


Рис. 45

Необходимо обратить их внимание на то, что прямая, проходящая через вершину параболы и параллельная оси OY, будет осью симметрии параболы.

Исследование квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ полезно увязать с дискриминантом соответствующего квадратного уравнения. В результате исследования ученики могут составить следующую таблицу.

Функция $y=ax^2+bx+c$
координаты вершины $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{b^2-4ac}{4a}$

Дискриминант	$a>0$	$a<0$
$b^2-4ac>0$		
$b^2-4ac=0$		
$b^2-4ac<0$		

Мы не рассматривали знаки b и c; в зависимости от знаков их вершина параболы сместится вправо или влево, вверх или вниз. Полезно сравнить данную таблицу с предыдущими и заставить учеников начертить все возможные случаи, это полезное, хотя весьма трудоемкое, упражнение.

Необходимо проделать ряд упражнений на нахождение координат вершины параболы, а следовательно, максимума и минимума следующих функций:

$$y=ax^2+bx+\frac{b^2}{4};\quad y=ax^2+bx;\quad y=ax^2+c.$$

Необходимо обратить внимание учеников на следующее: при решении квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

мы имели право переменить знаки у всех членов на противоположные. Если в уравнении квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c$$

переменить знаки на противоположные у всех членов только в правой части, то корни функции получатся те же самые, но график

функции будет расположен несколько иначе; абсцисса вершины параболы будет та же самая, ордината вершины параболы, сохраняя свою абсолютную величину, изменит знак на противоположный, а сама парабола, если a было больше 0, вогнутостью будет направлена вниз, а не вверх.

Пример: на рисунке 46 начерчены графики функций $y=2x^2-6x+4$ и $y=-2x^2+6x-4$.

Хорошее понимание свойств функции и ее графика позволяет учащимся сознательно ответить на ряд вопросов, например, начиная с каких значений аргумента функция $y=3x^2-2x+5$ будет возрастать; при каких значениях аргумента значения функции будут положительны? И т. п.

Зная, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции, ученики смогут решать задачи на максимум и минимум, например:

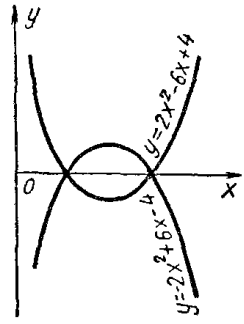


Рис. 46

1. Отрезок длиной в 100 *м* разделить на два таких отрезка, чтобы площадь прямоугольника, сторонами которого являются эти отрезки, была наибольшей.

2. Отрезок длиной в 24 *м* разделить на такие две части, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих отрезках, была наименьшей.

3. На какие два слагаемые следует разложить число a, чтобы произведение их было наибольшим?

4. Какой из всех треугольников, сумма основания и высоты которого равны l, имеет наибольшую площадь? Найти значение этой площади.

Сделаем несколько замечаний относительно квадратичной функции и ее графика.

1) Определение параболы не дается. На кружковых занятиях можно дать определение параболы как геометрического места точек и познакомить членов кружка с различными способами построения параболы.

2) Сделано допущение, что график всякой квадратичной функции есть парабола. Следует сказать ученикам, что это положение может быть доказано, но с этим они познакомятся в старших классах.

Изучение функций $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$ не представит труда. По точкам строятся графики этих функций (рис. 47).

Из чертежа и небольшого исследования можно сделать следующие выводы:

1) Область задания функций от $-\infty$ до $+\infty$, ибо всякое число можно возвести в куб и из всякого числа можно извлечь кубический корень.

2) Область изменения функций будет $-\infty \ldots +\infty$.

3) Функции возрастающие, максимума и минимума они не имеют

Сделаем несколько общих замечаний относительно изучения функций.

1) Необходимо придерживаться определенной терминологии и добиваться ясного понимания каждого термина.

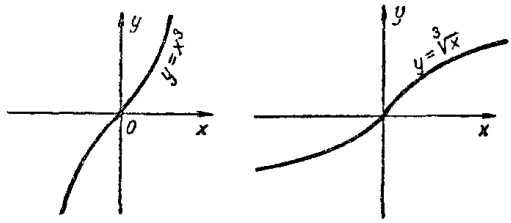


Рис 47

Иногда вместо «область изменения аргумента» говорят· «область допустимых значений функции» или «область задания функции». Необходимо разъяснить все термины, показать их равносильность и в дальнейшем пользоваться только одним из них. Нельзя допускать смешения терминов: учащиеся часто путают область изменения функции с областью задания функции.

2) Построение графиков, особенно на доске, отнимает много времени; чертежи часто получаются искаженными и нуждаются в исправлении. Чтобы избежать этого, необходимо иметь в классе доску, разграфленную в клеточку (желательно 5×5 *см*^{2}). В крайнем случае можно пользоваться большим листом бумаги с нанесенной координатной сеткой того же масштаба.

Для выполнения чертежа на доске желательно использовать цветные мелки.

В некоторых школах имеются шаблоны кривых, изготовленные из фанеры или плотного картона, что значительно ускоряет построение графиков.

Ученики должны сами изготовить шаблоны различных кривых (парабола, гипербола), выполненные в масштабе 1 *см* или 0,5 *см*, и пользоваться ими при вычерчивании графиков. Желательно, чтобы все графики вычерчивались на миллиметровой бумаге.

Необходимо добиваться, чтобы учащиеся умели тщательно и возможно точнее выполнять построение отдельных графиков, особенно при решении уравнений, нахождении приближенного значения квадратного и кубического корня и т. д. Для этого ученики должны уметь целесообразно изменять масштабы, помня, что привычный вид кривой при этом несколько изменяется.

При построении графиков для нахождения числовых значений функций широко следует пользоваться и счетной (логарифмической) линейкой.

§ 25. Графическое решение уравнений

Как уже было указано, построение графиков желательно проводить на миллиметровой бумаге, широко используя шаблоны.

Графическое решение уравнений основано на следующем: решить уравнение $f(x)=\varphi(x)$ — значит найти абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y=f(x) \text{ и } y=\varphi(x).$$

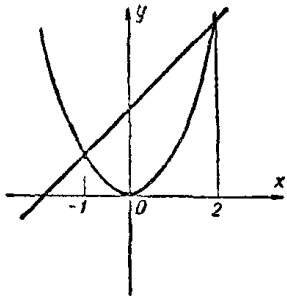


Рис. 48

Графическое решение систем линейных уравнений было рассмотрено в параграфе о линейных уравнениях. Остановимся на решении квадратных уравнений.

Как известно, квадратное уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0$$

всегда может быть сведено к виду

$$x^2+px+q=0.$$

Возможны три приема решения.

I способ. Преобразуем уравнение

$$x^2=-px-q.$$

Построим график функции $y=x^2$ (парабола) и график функции $y=-px-q$ (прямая линия). Найдем точки пересечения графиков (рис. 48). Абсциссы точек пересечения и будут корнями квадратного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $x^2-x-2=0$.

Решение. Абсциссы точек пересечения графика функции $y=x^2$ и прямой $y=x-2$ будут корнями квадратного уравнения, то есть $x_1=-1$ и $x_2=2$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2-3x+5=0$.

Решение. Графики функции $y=x^2$ и $y=3x-5$ не пересекаются; уравнение не имеет решения (рис. 49).

Пример 3. Решить уравнение $x^2-4x+4=0$.

Решение. Парабола ($y=x^2$) и прямая ($y=4x-4$) имеют одну общую точку касания. Абсцисса этой точки, равная 2, является двукратным корнем уравнения (рис 50)

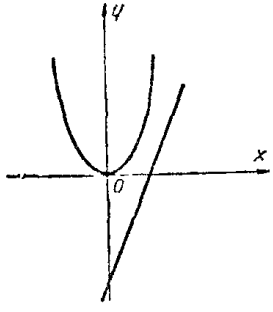


Рис. 49

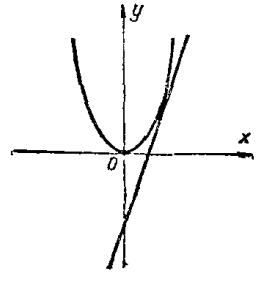


Рис. 50

II способ. Так как $x \neq 0$, разделим уравнение на

$$x+p+\frac{q}{x}=0,$$

или

$$x+p=-\frac{q}{x}.$$

Найдем точку пересечения графиков: прямой линии $y=x+p$ и гиперболы $y=-\frac{q}{x}$. Абсциссы точек пересечения и будут корнями квадратного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $x^2-x-2=0$.

Решение. Имеем $x-1=\frac{2}{x}$. Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y=x-1$ и гиперболы $y=\frac{2}{x}$.

Абсциссы $x_1=-1$ и $x_2=2$ будут корнями квадратного уравнения (рис 51).

Пример 5. Решить уравнение $x^2-3x+5=0$ (рис. 52).

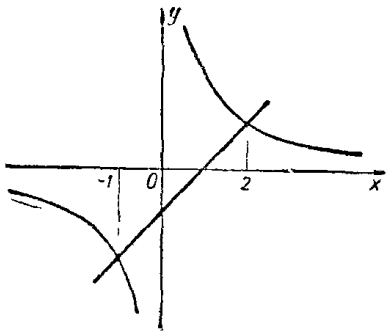


Рис. 51

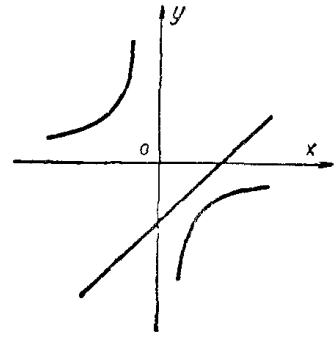


Рис. 52

Решение. $x-3=\frac{-5}{x}$. Графики функций $y=x-3$ и $y=-\frac{5}{x}$ не пересекаются; квадратное уравнение не имеет решения.

Пример 6. Решить уравнение $x^2-4x+4=0$.

Решение. Находим точки пересечения графиков $y=x-4$ и $y=-\frac{4}{x}$. Прямая касается гиперболы в точке с абсциссой, равной 2. Следовательно, 2 *является двукратным корнем уравнения* (рис. 53).

III способ. Данный способ применим и для уравнения вида $ax^2+bx+c=0$. Находим координаты вершины параболы $x_0=-\frac{b}{2a}$; $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Затем строим параболу $y=ax^2$, вершина которой находится в точке $(x_0;\ y_0)$. Абсциссы точек пересечения

параболы с осью OX будут корнями уравнения. Данный способ удобен, когда у учащихся имеется набор шаблонов параболы.

Пример 7. Решить уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. Координаты вершины будут $x_0 = \frac{3}{4}$; $y_0 = -\frac{25}{8}$. Парабола пересечет ось OX в точках с абсциссами $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$. Следовательно, $-\frac{1}{2}$ и 2 — корни уравнения (рис. 54).

После этого ученики усвоят идею решения квадратного уравнения, корни которого целые числа или дроби несложного вида.

Следует предложить ряд упражнений, когда корни вычисляются приближенно, например: решить уравнение

$$x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Заметим, что до тех пор, пока ученики не убедятся в правомощности графического решения, следует те же уравнения решать аналитически.

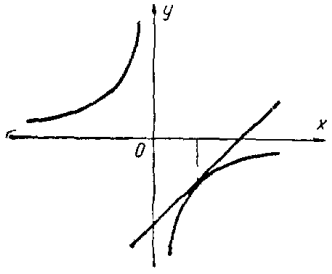


Рис. 53

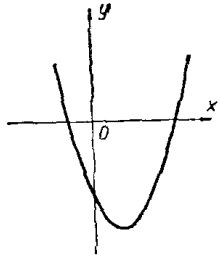


Рис. 54

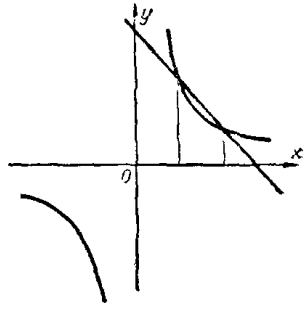


Рис. 55

Представляет интерес и графическое решение системы уравнений высших степеней с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решениями данной системы будут координаты точек пересечения соответствующих графиков. Приведем несколько примеров.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Решение. Графиками данных уравнений будут гипербола и прямая. Координаты точек пересечения этих графиков будут M_1 (1; 2); M_2 (2; 1) (рис. 55):

Решения системы $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1. \end{cases}$

Пример 9. Решить систему $\begin{cases} y=x^2, \\ x-y=1. \end{cases}$

Решение. Парабола и прямая линия не пересекаются (рис. 56); система не имеет решения.

Пример 10. Решить систему $\begin{cases} y=x^2, \\ xy=1. \end{cases}$

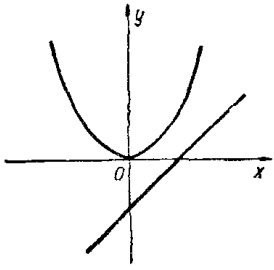


Рис. 56

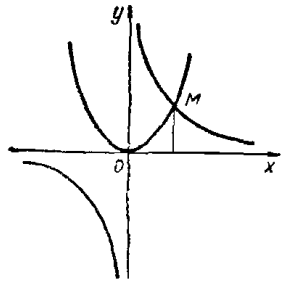


Рис. 57

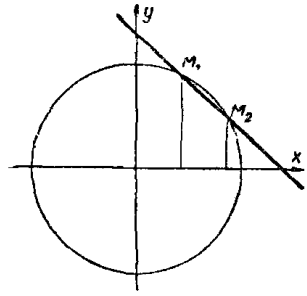


Рис. 58

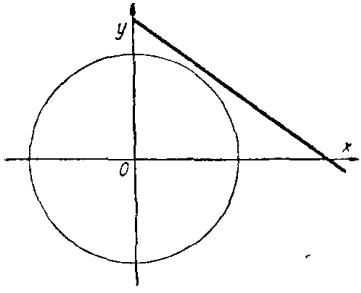


Рис. 59

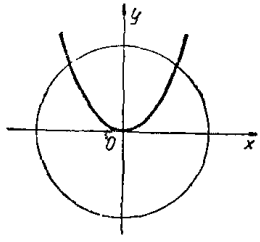


Рис. 60

Решение. Парабола с гиперболой пересекаются в одной точке M (1; 1). Система имеет решения $x=1$; $y=1$ (рис. 57).

Пример 11. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7. \end{cases}$

Решение. График первого уравнения есть окружность радиуса 5 ед. и с центром в начале координат; график второго уравнения — прямая линия (рис. 58). Координаты точек пересечения будут M_1 (3; 4) и M_2 (4; 3), решения системы:

$$x_1=3, \quad x_2=4,$$
$$y_1=4; \quad y_2=3.$$

Пример 12. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 6x-7y=42. \end{cases}$

Решение. Окружность и прямая не пересекаются (рис. 59); система не имеет решения.

Пример 13. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2. \end{cases}$

Решение. Окружность и парабола пересекаются в двух точках (рис. 60).

Несколько примеров имеется в задачнике алгебры П. А. Ларичева. Учителю следует пользоваться другими пособиями или составлять самому задачи, что не представляет особого труда.

В § 3 уже было сказано, что в школах сравнительно мало еще делается для того, чтобы учащиеся хорошо усвоили графический метод решения различного вида задач и осознали силу этого метода, особенно в тех случаях, когда их знания не позволяют применить аналитические приемы. Приведем ряд упражнений.

Задачи на составление уравнений по графикам.

1. На прямой линии лежат две точки A (1,5; 2,5) и B (4; 3,5). Лежащая на той же прямой промежуточная точка C имеет абсциссу 3. Определить ее ординату.

Решение. Написав уравнение прямой $y=ax+b$, находим коэффициенты a и b, пользуясь заданными координатами двух точек; затем определяем в полученном уравнении y по $x=3$.

2. Парабола проходит через точку $A(-2;\ -1)$, и ее вершина имеет координаты (0; 3). Составить уравнение параболы.

Решение. Так как вершина параболы лежит на оси ординат, то уравнение имеет вид $y=ax^2+c$, где $c=3$. Координаты точки A ($x=-2$; $y=-1$) удовлетворяют уравнению $y=ax^2+c$, и потому $-1=4a+3$, откуда $a=-1$; уравнение параболы $y=-x^2+3$.

3. Квадратичная функция достигает наименьшего значения $y=0$ при $x=1$, и график ее проходит через точку A (2; 3). Написать уравнение.

Рассуждения при решении задачи аналогичны рассуждениям в предыдущей задаче.

Часть четвертая
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА I
ГЕОМЕТРИЯ КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

§ 1. Цели преподавания геометрии

Преподавание геометрии в школе способствует достижению тех целей, которые стоят перед всеми математическими дисциплинами и которые были рассмотрены выше [1].

Однако геометрия имеет свои особенности, чем и определяются задачи, возникающие перед учителем при обучении школьников. В объяснительной записке к программе по геометрии восьмилетней школы, утвержденной в 1960 г, сказано: «Целью изучения геометрии в восьмилетней школе является ознакомление со свойствами фигур на плоскости, развитие пространственных представлений и пространственного воображения. Одновременно с этим должны приобретаться практические навыки и умения, куда относится умение выполнять измерения и решать различные геометрические задачи, включая задачи практического содержания» [2].

Геометрические знания, таким образом, должны помочь ученикам решать задачи производственного характера, узнавать геометрические фигуры в какой-либо реальной конструкции, быстро ориентироваться в чертежах, изображающих конкретные детали механизмов, проводить измерения, необходимые для изготовления этих деталей, и т. п. Обучение геометрии — важная часть политехнического обучения.

В то же время при изучении геометрии ученики должны овладеть умением логически обосновать, что многие зависимости, обнаруженные путем рассмотрения отдельных частных случаев, имеют общее значение и распространяются на все фигуры определенного вида, а кроме того, выработать потребность в логическом обосновании зависимостей. Объяснительная записка

[1] См. ч I, § 1.
[2] См. [6].

к программе по математике указывает: «В процессе преподавания математики необходимо проводить систематическую и целенаправленную работу по развитию логического мышления учащихся» [1]. Это указание особенно важно осуществлять в преподавании геометрии, которая дает богатые возможности для такой работы.

Правильно построенное преподавание должно воспитать у школьников стремление творчески применять геометрические знания на практике, что впоследствии может привести к плодотворным поискам конкретных рационализаторских усовершенствований в их производственной деятельности.

Цели, положенные в основу преподавания какого-либо предмета, определяют в значительной мере содержание и построение школьного курса, а также и методику его преподавания.

§ 2. Научный и школьный курс геометрии

Геометрия как наука прошла долгий путь развития от первых практических правил для вычисления площадей и объемов, относящихся к глубокой древности, до оформления науки в стройную, строго логическую систему. Первые попытки привести геометрические знания в систему, установить логические связи между отдельными предложениями осуществлены на много веков раньше, чем была поставлена подобная задача для других математических дисциплин. Создание систематического курса геометрии Евклидом относится к III в. до н. э. В течение двух тысячелетий «Начала» Евклида считались безупречными в логическом отношении и служили образцом для построения учебников геометрии.

Только во второй половине XIX в., когда основания геометрии были подвергнуты глубокому анализу, что оказалось возможным главным образом благодаря работам великого русского геометра Н. И. Лобачевского, были выявлены те требования, которым должно удовлетворять строгое логическое построение математической дисциплины.

В настоящее время научный курс геометрии является строго дедуктивным. В его основу положена некоторая система аксиом и определенное число основных, или первоначальных, понятий Содержание этих понятий раскрывается в аксиомах. Все дальнейшее изложение курса осуществляется чисто логическим путем: каждому вновь вводимому понятию дается определение, каждое новое предложение доказывается, то есть логически выводится на основании аксиом, ранее доказанных теорем и определений. В таком курсе нигде не обращаются к опыту или непосредственной очевидности [2].

---

[1] См [6], стр 6

[2] См. ч. I, § 2.

Требование, чтобы каждое предложение, если оно может быть логически выведено, было доказано, приводит к наличию очень отвлеченных, формальных доказательств фактов, не вызывающих сомнений. Например, доказывается теорема: *Для данного отрезка существует одна и только одна середина.* С другой стороны, требование внесения в число аксиом всякого предложения, которое само не может быть доказано, но необходимо для доказательства какой-либо теоремы, приводит к формулировкам аксиом, очень сложных по конструкции (например, аксиома непрерывности), или к предложениям, которые по своей очевидности для лиц, не искушенных в логических тонкостях, представляются бессодержательными (например, аксиома о расположении точек на прямой: «Если A предшествует B, то B не предшествует A»).

Понимание такого строго аксиоматически построенного курса требует от человека высокого логического развития и поэтому ясно, что преподавание чисто дедуктивного, или аксиоматического, курса геометрии не может быть осуществлено в средней школе.

С современной научной точки зрения курс геометрии Евклида уже не является безупречным, так как в нем не дается перечисления всех аксиом, необходимых для его обоснования, и в некоторых случаях используется очевидность. Небезупречны некоторые определения, данные Евклидом, так как он не вводит основных понятий, считая, что всякое понятие должно быть определено. Все же построение геометрии и на этом уровне строгости дает стройную систему и может дать представление о логической зависимости одних геометрических фактов от других.

Школьный курс геометрии, сложившийся под влиянием «Начал» Евклида, претерпевая значительные изменения как в отношении объема даваемого в нем материала, так и в отношении расположения отдельных тем, сохранил в основном тот же дедуктивный характер. Если рассмотреть распространенные учебники геометрии для средней школы XIX и начала XX в. (русские и иностранные) [1], то мы найдем в них следующие общие черты: материал располагается в систематическом порядке, в таком, чтобы следующие предложения могли быть логически выведены из предыдущих; даются понятия аксиомы и теоремы; излагаются дедуктивные доказательства теорем, однако не вводится система аксиом и некоторые геометрические факты принимаются без доказательства как очевидные. Так, например, при доказательстве теоремы о том, что диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам, само существование точки пересечения не обосновывается; также считается

[1] См., например, [231], [248].

очевидным, что прямая, проходящая через две точки, из которых одна лежит вне круга, а другая внутри круга, пересечет окружность и т. д.

Определения геометрических понятий даются, но эти определения в некоторых случаях не являются логически строгими, представляя собой описания. Такой курс геометрии называют обычно «систематическим» курсом, противопоставляя его курсу наглядной геометрии, называемому «пропедевтическим».

В дореволюционной средней школе ученики начинали изучение геометрии сразу с систематического курса. На отсутствие предварительной подготовки как недостаток в изучении геометрии указывали многие учителя математики еще в конце XIX и особенно в начале XX в.

Один из выдающихся русских методистов С. И. Шохор-Троцкий так говорил на I Всероссийском съезде преподавателей математики в 1911 г.: «Вся беда в том, что то количество и качество пространственных восприятий и представлений, которое находится в распоряжении всякого приступающего к занятиям геометрией, считается достаточным для прохождения с ним курса Евклидовой геометрии. Между тем, эти восприятия и представления недостаточны и в количественном и в качественном отношениях для достижения цели. А та высота логического усилия, на которую учитель хочет сразу поднять учащихся, для них недоступна. Учащиеся либо выучивают слова, либо падают духом, и дело кончается тем, что у учащихся по геометрии оказывается и мало познаний и мало навыков, что геометрия для них не была ни школой мышления и логического доказательства, ни школой пространственного воображения».

Отдельные попытки изучения с учениками вводного курса наглядной геометрии были осуществлены до революции преимущественно в частных учебных заведениях; в 1911 г. начальный курс геометрии был введен в кадетских корпусах. Большое внимание курсу наглядной геометрии было уделено на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (в 1911 и в 1913 гг.) [1]. Над содержанием и методикой преподавания такого курса еще до Октябрьской революции работали русские методисты-математики, продолжавшие эту работу и в советское время. Назовем из них А. М. Астряба, И. Н. Кавуна, А. Р. Кулишера [2].

[1] См. [174]. Доклад А. Р. Кулишера, «Начальный, пропедевтический курс геометрии в средней школе Его цели и осуществление»

[2] Отметим, что в 60—70 гг. XIX в. появились первые русские учебники наглядной геометрии для городских училищ, двухклассных училищ и других школ. К ним относятся: Фандер Флит, Курс элементарной геометрии, 1867; М О Косинский, Наглядная геометрия, 1871; З. Б. Вулих, Подготовительный курс геометрии для IV отделения женских учебных заведений, 1872; см. Н. М. Бескин, Методика геометрии, гл XIII (написана А. М. Астрябом) и А. В. Ланков, К истории развития передовых идей в русской методике математики, Учпедгиз, 1951.

Введение после Великой Октябрьской революции пропедевтического курса геометрии в школьную программу по математике вызвано не только необходимостью подготовки школьников к сознательному усвоению основного (систематического) курса геометрии, но и стремлением осуществить связь преподавания математики с жизнью, практической деятельностью людей, техникой, а также с другими школьными предметами. Знакомство с геометрическими плоскими и пространственными фигурами, умение вычислять площади и объемы, производить измерения, разбираться в плане местности и др. необходимы и в трудовой деятельности, и в быту, тогда как в систематическом курсе геометрии многие из этих вопросов рассматриваются только в старших классах средней школы

Начальный (пропедевтический) курс геометрии был включен уже в первые примерные программы по математике Наркомпроса, изданные в 1918 г., а затем и во все последующие. Практическое ознакомление учащихся с некоторыми геометрическими фигурами давалось уже на уроках арифметики на первом и втором годах обучения, а затем изучение курса наглядной геометрии продолжалось до пятого года обучения. Содержание и объем курса наглядной геометрии неоднократно изменялся. В более ранних программах он охватывал большой круг вопросов. Так, например, по программе 1921 г. ученики в IV и V классах изучали площадь параллелограмма и правильного многоугольника, длину окружности, площадь круга, объем прямой призмы и цилиндра, сведения об углах и их измерении, свойства смежных и вертикальных углов, параллельные прямые, понятие об осевой симметрии, равенстве треугольников, подобие треугольников и применение этих знаний к съемке планов на местности и измерению высоты предметов.

Программы были перегружены материалом и в последующие годы неоднократно изменялись в сторону сокращения.

Начиная с 1937/38 учебного года геометрический материал, содержащий преимущественно вычисление площадей и объемов, был включен в программу по арифметике III, IV и V классов.

По вопросу о содержании вводного или пропедевтического курса геометрии и о том, в каком классе начинать систематический курс, существуют различные мнения, но необходимость начинать обучение с курса наглядной геометрии в настоящее время можно считать общепризнанной [1].

В десятилетней средней школе изучение систематического курса геометрии начиналось в VI классе и проходило в течение пяти лет. Несмотря на некоторые изменения школьной программы, в основном содержание оставалось прежним: изучение планиметрии заканчивалось в IX классе и в нем же начиналось изу-

[1] См: «Математика в школе», 1948, № 1, 6, 1949, № 1; 1959, № 6.

чение стереометрии; многогранники, круглые тела и объемы тел изучались только в X классе. При таком построении курса геометрии ученики, оканчивающие семилетнюю школу, совсем не были знакомы со стереометрией, их сведения об измерении площадей и объемов ограничивались тем, что они узнали в V классе; в то же время их знания по планиметрии не имели законченного характера.

Дальнейшее укрепление связи школы с жизнью привело к созданию новой программы по геометрии для восьмилетней школы, так как механическое присоединение к программе семилетней школы материала, даваемого в VIII классе десятилетки, не могло разрешить вопроса. Содержание новой программы будет рассмотрено в следующем параграфе.

§ 3. Содержание курса геометрии восьмилетней школы

Программа по геометрии восьмилетней школы, утвержденная Министерством просвещения РСФСР в 1960 г., и по содержанию, и по системе построения значительно отличается от программы предыдущих лет. Для осуществления более тесной связи изучения геометрии с жизнью и трудом, лучшей подготовки учащихся к практической деятельности вопросы измерения в восьмилетней школе значительно расширены; в частности, включены вычисление площади поверхности конуса, шара; вычисление объема пирамиды и круглых тел. Для развития пространственного воображения учеников и их умения разбираться в пространственных конструкциях в программу включены некоторые понятия стереометрии. Характерно то, что все эти вопросы не сосредоточены в одной какой-либо теме, а распределены почти по всему курсу математики.

Первое знакомство с некоторыми геометрическими плоскими фигурами и телами, проведение измерений дается, как это было и раньше, еще в начальных классах школы и продолжается на уроках арифметики в V классе в связи с решением арифметических задач. В дальнейшем вопросы измерения рассматриваются в курсе геометрии VII и VIII классов. Исключение из программы по математике восьмилетней школы понятия об иррациональном числе и несоизмеримых отрезках, понимание которых требует значительного математического развития, упростило изучение вопросов меры, которые и в VIII классе рассматриваются в области положительных рациональных чисел.

Очевидно, что в восьмилетней школе не могут быть логически обоснованы выводы, требующие теории пределов или другой столь же сложной теории, как, например, вывод формулы длины окружности, площади круга, объема пирамиды, шара и др. Способы вычисления в этих случаях могут быть только иллюстрированы на частных примерах, то есть даны на уровне

наглядной геометрии. Также рассматриваются и другие соотношения в пространстве.

В восьмилетней школе в системе изучается лишь планиметрия. В современную программу по геометрии включены основные вопросы курса планиметрии десятилетней школы (с сокращениями). Этот курс и должен дать учащимся понятие о дедуктивных доказательствах, о логических зависимостях между геометрическими предложениями. Как и в предыдущих программах VIII класса, в курс геометрии включены тригонометрические функции острого угла и решение прямоугольных треугольников. Тригонометрические соотношения дают новый способ решения геометрических задач и имеют большое значение в практических применениях.

Содержание программы геометрии восьмилетней школы.

I. Геометрический материал, включенный в программу начальных классов.

В I и II классах на уроках арифметики дети знакомятся с мерами длины; измеряют и строят отрезки прямой, строят (по клеточкам) квадрат и прямоугольник.

III класс.

Прямая и отрезок.

Углы: прямой, острый, тупой.

Построение прямого угла с помощью линейки и чертежного угольника.

Прямоугольник и квадрат. Свойства их сторон и углов. Решение задач на вычисление суммы сторон прямоугольника и квадрата.

IV класс.

Измерение площадей (18 часов). Площадь прямоугольника и квадрата. Таблица квадратных мер.

Измерение объемов (16 часов). Куб. Единицы измерения объемов. Вычисление объема тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда.

Программа предусматривает решение задач практического характера. В III и IV классах проводятся измерения на местности. В IV классе проводится построение на местности квадрата и прямоугольника. На уроках природоведения ученики знакомятся с планом, чертят план комнаты.

В объяснительной записке указывается на необходимость практической деятельности учащихся: моделирование, вырезывание, наклеивание, перегибание листа бумаги, черчение, измерительные работы.

II. Содержание геометрического материала в программе по арифметике V класса.

1. Прямой угол. Понятие о градусе и минуте. Транспортир.

2. Прямоугольник и квадрат. Периметр прямоугольника и квадрата. Площадь прямоугольника и квадрата.

3. Прямоугольный параллелепипед и куб. Площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда и куба.

4. Треугольник. Периметр и площадь треугольника.

Эти вопросы распределены по разным темам курса арифметики.

Программа предусматривает решение задач практического содержания по готовым данным и по данным, полученным путем измерения. Отводится 8 часов на работы по измерению на местности (провешивание прямых, измерение расстояний, построение прямоугольного участка при помощи эккера и вычисление его площади).

III. Содержание программы по геометрии VI—VIII классов. (Для удобства обозрения разбиваем его на 3 группы.)

А. Курс планиметрии в систематическом порядке.

VI класс

1) Основные понятия. Прямая линия. Луч. Отрезок. Угол. Окружность. Градусное измерение дуг и углов.

2) Треугольник. (Включает осевую симметрию.)

3) Параллельность. (Включает сумму внутренних углов треугольника и следствия.)

VII класс

1) Четырёхугольники. (Включает центральную симметрию.)

2) Окружность. (Включает измерение некоторых углов в круге.)

VIII класс

1) Пропорциональные отрезки. Подобие фигур.

2) Тригонометрические функции острого угла.

3) Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники.

Б. Вопросы измерения.

VII класс.

1. Площадь прямоугольника, квадрата, параллелограмма, треугольника, трапеции (включает теорему Пифагора).

2. Вычисление площади поверхности прямой призмы.

3. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, треугольной и четырехугольной прямой призмы.

Эти вопросы составляют отдельную тему. Кроме того, в тему «Окружность» включены:

4. Длина окружности и дуги в $n°$. Площадь круга и сектора в $n°$.

5. Поверхность и объем цилиндра.

VIII класс.

(Включено в тему «Вписанные и описанные многоугольники».)

1. Площадь правильного многоугольника.

2. Решение задач на вычисление площадей поверхности и объемов различных геометрических тел.

В. Элементарные сведения по стереометрии.

Изучение свойств геометрических тел и знакомство учащихся с основными стереометрическими понятиями (взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, перпендикуляр к плоскости, угол прямой с плоскостью, параллельность и перпендикулярность плоскостей, двугранный угол).

Введение этих понятий не выделяется в особую тему, они раскрываются при рассмотрении конкретных геометрических тел.

В программе каждого класса указано, какие должны быть проведены измерительные работы, в частности работы на местности. В объяснительной записке поясняется, что на протяжении всего курса решаются все виды геометрических задач.

§ 4. О порядке построения курса планиметрии

В объяснительной записке к программе по геометрии сказано: «...в восьмилетней школе изучается систематический курс планиметрии, включающий наиболее важные вопросы его...» [1]

Система построения курса планиметрии может быть различна. Учителю необходимо знать различные учебные пособия, познакомиться с последовательностью изложения материала в каждом из них, с применяемыми способами обоснований геометрических зависимостей, выяснить достоинства и недостатки каждого способа построения.

Выше мы уже показали, что школьный систематический курс геометрии не может быть строго логическим. Выясним, какие же требования могут быть предъявлены к построению систематического курса для восьмилетней школы.

Прежде всего, в какой мере может быть осуществлен принцип научности? Очевидно, что, хотя допустимо установить какое-нибудь положение без доказательства, никогда нельзя давать недоброкачественные, то есть неверные, доказательства. Если

[1] См. [6].

мы хотим, чтобы ученики в результате обучения геометрии усвоили логическую зависимость между установленными предложениями, расположение материала должно позволять логически обосновать последующие предложения при помощи предыдущих.

С другой стороны, педагогический принцип доступности требует, чтобы логическое содержание курса усложнялось постепенно. Два указанных требования нередко находятся в противоречии друг с другом. Можно подобрать упражнения в порядке возрастающей трудности, но соблюсти тот же принцип в расположении теорем какого-либо раздела нельзя, не нарушив их логической зависимости. Известно, что геометрические образы в теме «Четырехугольники» более наглядны и доказательство большинства теорем этой темы доступнее для учащихся, чем содержащиеся в теме «Параллельность». Однако эти темы переставить нельзя, так как и для определения многих видов четырехугольника, и для доказательства многих теорем приходится ссылаться на параллельность прямых.

При выборе порядка изложения геометрического материала следует учитывать еще одно педагогическое требование: принцип систематичности. Учащиеся легче воспримут и усвоят материал, если им будет понятна его последовательность. Этого нельзя достигнуть, соблюдая только последовательность, вытекающую из возможности логического обоснования каждого вводимого предложения. Какая-нибудь новая теорема может быть логически доказана в данном месте курса, но если ее появление для учащихся ничем не обусловлено, то они воспринимают ее формально. Известно, что если внимание ученика как бы перебрасывается от одного вопроса к другому, между которыми он не находит внутренней связи, то даже если он поймет приводимые доказательства, усвоение материала не будет прочным. Если ученик не воспринял системы изложения, то он легко забывает и логические связи между отдельными предложениями.

Учителям хорошо известно, что при повторении пройденного ученики нередко доказывают какую-либо теорему на основании предложения, являющегося ее следствием. Зависимость между геометрическими предложениями хорошо воспринимается учащимися, если расположение материала отражает внутреннюю логику развития геометрических понятий. В этом случае возрастает и активность мысли учащихся, которые, последовательно изучая какое-либо понятие, отыскивают его свойства, а затем и их логическое обоснование. Так, например, учащиеся легко воспринимают последовательность темы «Четырехугольники», где система изучения им вполне понятна [1].

Одним из первых, поставивших задачу дать такое расположение материала учебника геометрии, чтобы его последова-

[1] См § 20.

тельность естественно воспринималась учащимися, был известный русский методист математик Н. А. Извольский [1].

Стремление наилучшим образом удовлетворить как научным, так и педагогическим требованиям вызывает различные системы построения курса геометрии в учебной и методической литературе.

Содержание школьных программ и учебников меняется также в зависимости от того, какие идеи геометрии как науки признаются наиболее важными и актуальными как с точки зрения их значимости в современной науке, так и в связи с возможностью практических применений теоретических знаний. Так, в настоящее время одной из ведущих идей геометрии как науки является *идея геометрического преобразования;* такие понятия, как равенство (конгруэнтность) фигур, подобие, осевая и центральная симметрия, рассматриваются как геометрические преобразования [2].

В старых учебниках геометрии мы не находим никаких упоминаний о геометрических преобразованиях [3]. При переработке своего учебника «Элементарная геометрия» в начале двадцатых годов А. П. Киселев включил в него некоторые геометрические преобразования, в частности осевую симметрию. В 1938 г. геометрия Киселева была переработана Н. А. Глаголевым, под редакцией которого вышли все последующие издания. Н. А. Глаголев ставил своей целью «выдвинуть на первый план основные геометрические идеи о движении, о симметрии, о подобии, как геометрическом преобразовании...» [4], но построение курса геометрии оставалось прежним.

Большое внимание геометрическим преобразованиям уделено в курсе элементарной геометрии Н. А. Глаголева. В ней понятия осевой и центральной симметрии применяются для доказательства ряда теорем, а подобие фигур излагается на основе геометрического преобразования гомотетии [5].

Для осуществления требования практического применения знаний в курс планиметрии был включен раздел прямолинейной тригонометрии: тригонометрические функции острого угла и решение прямоугольных треугольников [6].

Мы не имеем возможности дать анализ учебной литературы и рассмотреть разнообразные изменения в структуре курса гео-

---

[1] См. [240].

[2] См. [262].

[3] См. [248], изд. до 1920 г.

[4] Предисловие Н. А. Глаголева к учебнику геометрии А. П. Киселева, ч. I, планиметрия.

[5] См. [227].

Опыт осуществления органической связи понятия симметрии с общим развитием курса геометрии мы находим в курсе элементарной геометрии Н. Душина, изд. 1923 г., Харьков.

[6] См. [248], изд. после 1923 г.

метрии у разных авторов. Остановимся только на некоторых вопросах, имеющих наиболее актуальное значение.

Прежде всего отметим, что можно осуществить систематическое построение курса геометрии без разграничения планиметрии и стереометрии. Такое слияние двух различных разделов носит название фузионизма. Преподавателю полезно познакомиться с таким построением, так как это поможет ему установить аналогию в геометрических соотношениях на плоскости и в пространстве. Лучше всего обратиться к систематическому курсу геометрии С. А. Богомолова [1].

Такое слияние планиметрии и стереометрии в школьном учебнике мы находим у Душина [2]. Мы не будем останавливаться на этом построении, оно не применяется в школе.

Не будем также рассматривать учебники, которые при систематическом изложении планиметрии разграничивают геометрию положения и геометрию меры. Так построен учебник Н. А. Извольского [3]. Его учебник имеет две части: «Чистая геометрия» и «Измерительная геометрия»; вопросы измерения излагаются после теоретического обоснования. Этот порядок неприменим в нашей школе, так как отрывает изучение геометрии от применения ее к решению практических задач; к тому же теоретическое обоснование измерения в восьмилетней школе не дается [4].

Рассмотрим подробнее порядок расположения тем «Треугольник» и «Параллельность». Он различен во многих распространенных учебниках, а также менялся и в школьной программе. Следует выяснить, чем вызвано стремление некоторых авторов учебников и методистов изменить традиционное расположение этих тем и какие затруднения при этом возникают.

В «Началах» Евклида теоремы, в доказательствах которых нет ссылки на аксиому о параллельных, расположены впереди. Начиная с геометрии Лежандра (конец XVIII в.) и потом в русских наиболее распространенных учебниках А. Ю. Давидова и А. П. Киселева сложилась традиция следовать в расположении материала за «Началами» Евклида. После того как отрицание аксиомы о параллельных привело Н. И. Лобачевского к построению новой, неевклидовой геометрии, выделение теорем, не зависящих от аксиомы Евклида, дало возможность лучше выяснить построение неевклидовой геометрии и ее особенности [5]. Однако эти соображения имеют чисто теоретический характер и не могут иметь значения для выбора системы построения курса геометрии восьмилетней школы. В этом случае следует руководствоваться педагогическими требованиями.

---

[1] См. [223].
[2] См. [237].
[3] См [240].
[4] См [322].
[5] См. [253].

Основной причиной, заставляющей искать иного расположения материала, является трудно воспринимаемый учениками порядок теорем в теме «Треугольник» при традиционном изложении [1]. Тема, естественно, начинается с определения треугольника и его элементов; затем рассматривается классификация треугольников по сторонам и углам, даются определения линий в треугольнике, свойства равнобедренного треугольника (свойства биссектрисы угла при его вершине и свойства углов при его основании). Дальше рассматриваются три признака равенства треугольников, теорема о внешнем угле и следствие из нее о других острых углах в тупоугольном и прямоугольном треугольниках. Затем доказываются остальные теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника и основанное на этих теоремах свойство каждой стороны треугольника. После этого идут теоремы о перпендикуляре, наклонных и их проекциях, а затем признаки равенства прямоугольных треугольников [2].

В чем недостатки такого расположения материала?

1) Естественно было бы сразу после определения какой-либо фигуры рассмотреть свойства ее основных элементов, в данном случае сторон и углов (как это делается в теме «Четырехугольники»). Если в соответствии с указанием в программе принять без доказательства, что отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то свойство сторон любого треугольника может быть установлено сразу после определения, но свойство его углов нельзя обосновать, так как доказательство теоремы о сумме углов треугольника основывается на свойстве углов, образующихся при пересечении прямой двух параллельных прямых.

2) После классификации треугольников при доказательстве теоремы о свойстве биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника устанавливается свойство углов при основании равнобедренного треугольника. Теорема о том, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы,— одна из четырех взаимосвязанных теорем о соотношении между сторонами и углами треугольника. Эти четыре теоремы естественно было бы рассмотреть одновременно, и ученики, пользуясь подвижными моделями и чертежами, могут довольно легко воспринять все соотношения между сторонами и углами. Однако все эти теоремы, кроме первой, доказываются на основании свойства внешнего угла треугольника, а оно дается после признаков равенства.

3) Особенно много педагогических трудностей возникает

---

[1] См. [248].

[2] При изложении порядка теорем по учебнику А. П. Киселева нами опущены «Осевая симметрия», так как она не связана с разработкой темы, и те теоремы, которые не включены в программу восьмилетней школы.

при изучении теоремы о свойстве внешнего угла треугольника. Само ее появление нарушает естественную последовательность в изучении треугольников, так как равенство треугольников еще не закончено; цель сравнения величины внешнего угла с внутренними углами не ясна учащимся; доказательство теоремы воспринимается учениками с трудом и большей частью формально, так как целевая установка сложного дополнительного построения остается им непонятной [1]. Формальность усвоения доказательства теоремы о свойстве внешнего угла треугольника легко проверить, если предложить ученикам для доказательства теоремы провести построение при другой вершине.

4) Большие затруднения возникают и при установлении логической зависимости между теоремами в дальнейшем. Как известно, после теоремы о сумме углов треугольника доказывается, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, откуда следует, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним. Однако сама теорема о сумме углов треугольника при традиционном изложении зависит от теоремы о внешнем угле (предлагаем проверить цепь логических связей). Можно сказать, что это вопросы слишком тонкие, и их не стоит поднимать в VI классе. Но тем не менее, чем яснее логическая зависимость между теоремами, следующими одна за другой, тем легче воспринимается эта зависимость учениками, а это значительно повышает их умственное развитие.

5) Отсутствие в теме «Треугольник» теоремы о сумме углов создает еще одно затруднение: невозможность ввести численную величину угла. Ученики обосновывают, что все углы равностороннего треугольника равны, но не могут обосновать, что каждый из них равен 60°; устанавливают, что острые углы прямоугольного равнобедренного треугольника равны, но не могут вывести, что каждый из них равен 45°, хотя это наглядно обнаруживается путем перегибания бумажного треугольника (по двум средним линиям). Задачи на вычисление, связанные с углами треугольников, тоже не могут предлагаться в этой теме — их приходится отложить до окончания темы «Параллельность».

Все эти затруднения и вызвали у многих авторов перестановку тем «Параллельные прямые» и «Треугольники». Так, Н. А. Глаголев в предисловии к «Элементарной геометрии», в которой тема «Параллельные прямые» излагается раньше темы «Треугольник», поясняет эту перестановку стремлением придать изложению большую стройность [2].

Не подвергая анализу порядок изложения у различных ав-

[1] См § 7, стр 534.
[2] См [227].

торов, принявших эту систему (у каждого из них есть свои особенности[1]), покажем только, какова может быть последовательность темы «Треугольник», если параллельные прямые уже пройдены.

1) Определение треугольника.

2) Свойство сторон треугольника (если принять без доказательства, что отрезок прямой — кратчайшее расстояние между двумя точками).

3) Свойство углов треугольника. Теорема о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника.

4) Классификация треугольников (можно обосновать, что в прямоугольном и тупоугольном треугольниках два угла острые).

5) Линии в треугольнике. Теорема о биссектрисе угла при вершине равнобедренного треугольника.

6) Зависимость между сторонами и углами треугольника (все 4 теоремы и следствия из них).

7) Равенство треугольников.

Дальнейшее расположение материала зависит уже от построения темы «Равенство треугольников», которую мы рассмотрим ниже. Наибольшую стройность получит изложение, если сразу после общих признаков равенства рассмотреть признаки равенства прямоугольных треугольников как их следствия, а затем переходить к другим вопросам, обоснование которых опирается на пройденный материал, например: к теоремам о перпендикуляре к прямой, о наклонных и их проекциях.

Надо заметить, что изучение темы «Треугольник» после темы «Параллельность прямых» может проходить гораздо естественнее. В «Геометрии» Н. А. Глаголева раздел о параллельных включен в главу «Прямая линия» после ознакомления с пересекающимися прямыми, что тоже как бы подчеркивает определенную систему изучения понятия.

Однако против такого расположения материала в VI классе имеются существенные возражения. Основное возражение заключается в том, что возникают большие трудности при прохождении темы «Параллельность». Она изучается учениками, только приступившими к систематическому курсу геометрии, а между тем содержание этой темы сложнее, чем содержание темы «Треугольник»[2]. И. С. Петраков в статье «О новых программах» говорит: «В теме «Параллельность» изучаются понятия, связанные с бесконечными образами, что в конечном отношении трудно для учащихся». В статье поясняется, что треугольники ученики могут вырезать, начертить, сравнить между собой, но они не могут сделать этого, изучая параллельные прямые. К этому можно добавить, что шестиклассникам очень трудно усвоить доказательство первой теоремы о признаках парал-

[1] См [240], [226], [228], [258]

[2] См.: «Математика в школе», 1960, № 4.

лельности прямых, доказываемой поворотом полуплоскости вокруг точки, и что они еще не подготовлены к доказательству методом «от противного», которым им приходится пользоваться в этой теме.

Учитывая все эти трудности изучения параллельности прямых в VI кла́ссе, в программе тема «Треугольник», как мы знаем, предшествует теме «Параллельность».

Выше мы рассмотрели построение темы «Треугольники» в учебнике А. П. Киселева. Но порядок теорем и способ их доказательства и в том случае, если треугольники рассматриваются до параллельности прямых, тоже может быть различным. Останавливаться на несущественных расхождениях изложения темы в различных учебниках мы не будем, выясним только один основной вопрос.

Рассмотрим, как влияет на построение систематического курса планиметрии включение в него понятия осевой симметрии в том случае, если оно не является только «придатком», а органически связывается с остальным геометрическим материалом. Понятие осевой симметрии может быть введено при любом расположении тем «Треугольник» и «Параллельность». Так, в «Геометрии» Н. А. Глаголева оно вводится после темы «Параллельные прямые», что позволяет рассматривать осевую симметрию не только пересекающихся прямых, но и параллельных. Затем осевая симметрия используется при доказательстве многих теорем в разделе «Треугольники» [1].

Важнее выяснить, как может быть использовано понятие симметрии, если оно вводится в теме «Треугольник» до изучения параллельных прямых. Отметим прежде всего, что применение метода симметрии к доказательству теорем может существенно улучшить построение темы «Треугольник». Мы уже указывали на недостатки, вытекающие из необходимости включения теоремы о свойстве внешнего угла треугольника. Все предложения, доказывающиеся на основании этой теоремы, могут быть обоснованы, если систематически пользоваться осевой симметрией (зависимость между сторонами и углами треугольника, единственность перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, соотношения между наклонными и их проекциями и т. д.). Напомним, что с применением осевой симметрии могут быть доказаны и признаки равенства треугольников. Введение единого принципа доказательства многих теорем могло бы облегчить восприятие темы и показало бы значение хотя бы одного геометрического пребразования.

---

[1] В учебнике Н. А. Глаголева приводятся обычно два способа доказательства теорем. с использованием понятия симметрии и без него, так что эта книга очень полезна преподавателю для сравнения обоих способов доказательства.

Однако такое построение курса в настоящее время может быть проведено только в виде опыта, так как, хотя в программе восьмилетней школы и указано, что понятие осевой симметрии следует использовать для доказательства ряда теорем, учебного пособия, разработанного с учетом этого указания, нет [1].

Ниже (в § 18) излагается методика введения понятия симметрии, рассматривается применение этого понятия к доказательству теорем, приводятся упражнения, облегчающие усвоение доказательства, и указывается целесообразное расположение материала в теме «Треугольник».

Другие, более частные, вопросы о порядке изучения материала рассматриваются при изложении методики преподавания каждой темы.

В заключение следует сказать, что при любом построении курса геометрии имеются определенные трудности, которые учитель должен знать. Применение рационального метода обучения и является средством для преодоления этих трудностей. Как известно, общего рецепта, пригодного для проведения различных уроков, не может быть дано, и многое зависит от творческой работы самого учителя.

---

[1] Интересный материал об элементарном введении понятия осевой симметрии и его использовании для обоснования ряда предложений в средней школе Румынской Народной Республики можно найти в статье А. А. Столяра в журнале «Математика в школе», 1960, № 4; Подобный материал, но из польской средней школы — в статье Н. З. Гречкина в журнале «Математика в школе», 1960, № 3 См. также статью А. И. Фетисова в сборнике «О преподавании математики в восьмилетней школе», Изд. АПН РСФСР, М., 1961.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

§ 5. Геометрический материал в курсе арифметики V класса

1. Основным принципом обучения на первом его этапе является принцип наглядности. Все свойства геометрических фигур ученик воспринимает путем рассмотрения конкретных предметов, моделей, чертежей.

2. При ознакомлении с геометрическими фигурами должна быть максимально использована деятельность учащихся, то есть ученик не только рассматривает готовую модель или чертеж, но и сам их изготовляет. Выполнение чертежа или изготовление модели активизирует учеников и повышает сознательность и прочность усвоения. Если ученик сам начертит развертку параллелепипеда, вырежет ее, изготовит модель, то он, безусловно, сознательно усвоит свойства этого геометрического тела, число, форму и расположение граней, число ребер и др.

3. Очень важно, чтобы пятиклассник имел возможность ознакомиться с различными видами рассматриваемой геометрической фигуры, чтобы опыт его был разнообразен. Нельзя, например, рассматривая прямоугольник, ограничиться изображением прямоугольника определенного вида. Ученик должен наблюдать прямоугольники на различных предметах и рисунках, а также начертить в тетради несколько прямоугольников и в виде узкой полоски, и имеющих форму квадрата, и близких по форме к квадрату. Изображать прямоугольники надо в разных положениях, не только по клеточкам, но и пользуясь чертежным угольником и линейкой. Тогда у учащихся будут вырабатываться правильные представления, способствующие образованию отвлеченного понятия.

4. В результате такой работы, которая начинается еще в начальных классах, дети будут знать многие геометрические фи-

гуры, не заучивая их определений. В большинстве случаев логическое определение и не может быть дано, так как ученики раньше знакомятся с видовыми понятиями, чем с родовыми. Например, они знают прямоугольник до знакомства с параллелограммом, треугольник — до того как изучается ломаная линия и многоугольник. Учащиеся хорошо знают, что углы прямоугольника прямые, могут начертить прямой угол, но определение прямого угла не знают. Во всяком случае нельзя давать ученикам неправильные определения, которые потом придется изменять.

5. Очень большое внимание уделяется измерениям. Пятиклассники самостоятельно проводят измерения в классе, дома и на местности. При этом они должны получить навыки в обращении с измерительными приборами.

6. Геометрический материал тесно связан с курсом арифметики. Особенно большое значение имеет решение задач бытового и производственного характера, например: определить квартирную плату за комнату, составить смету на оклейку комнаты обоями, определить количество материала для изготовления ящика, определить вместимость ящика, найти площадь поверхности или объем определенной детали и т. п. При этом числа иногда даются учителем, иногда определяются самими учащимися в результате проведенных измерений. Задачи, в которых числовые данные получены в результате измерения, дают прекрасный материал для понимания приближенного значения числа, правил округления при вычислении и для закрепления этих правил.

Связь геометрического материала с преподаванием арифметики осуществляется и другим путем. Геометрические образы могут быть использованы для иллюстрации арифметических понятий, правил, законов действий, например: понятие дроби, сравнение дробей по величине, действия с дробями, распределительный закон умножения и т. п.[1].

7. Геометрический материал может дать хорошие примеры зависимостей между величинами. Выполняя соответственные чертежи и вычисления, учащиеся закрепляют приобретенные знания и в то же время наблюдают простейшие случаи функциональной зависимости. Примеры таких заданий: а) построить несколько прямоугольников с периметром, равным 20 *см*, последовательно увеличивая длину основания. Вычислить площадь каждого прямоугольника; б) так же построить несколько различных прямоугольников с одинаковой площадью, равной 16 *кв. см*, и найти периметр каждого; в) начертить несколько прямоугольников с основанием 2 *см*, последовательно увеличивая высоты, и вычислить площадь каждого и т. п. Последнее

[1] См. ч. II, Методика преподавания арифметики, рис. 15, 16, 17, 18, 19, 20 21.

задание может быть связано с построением столбчатых диаграмм; г) начертить несколько квадратов, увеличивая сторону первого квадрата в два, три, четыре раза, и сравнить площадь каждого квадрата с площадью первого квадрата (рис. 1).

Эти упражнения не должны носить чисто вычислительного характера, так как цель их — сохранить в памяти наглядные геометрические образы.

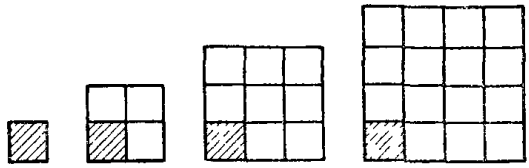


Рис. 1

8. Несмотря на то что при изучении наглядной геометрии выводы делаются на основании опыта и интуиции учащихся, эти выводы опираются на некоторые элементарные рассуждения. *Они заключают в себе элементы дедукции и должны* способствовать развитию логической мысли. Так, например, не давая вывода площади прямоугольника или объема прямоугольного параллелепипеда в общем виде, на частных примерах можно провести рассуждения, имеющие общее значение[1]. Еще в младших классах надо приучать учеников к тому, что основанием для вывода не должен являться единичный пример или отдельный опыт, приучать их к наблюдению различных случаев, сравнению, постепенному обобщению. Так, при измерении площади треугольника надо рассмотреть треугольники разного вида и их преобразование в прямоугольник[2].

Площадь прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Основным геометрическим материалом в курсе V класса является измерение площадей и объемов. Площадь прямоугольника и квадрата, объем куба и прямоугольного параллелепипеда (без этого термина) уже известны ученикам из курса IV класса, так что новым для них является только площадь треугольника. Однако в V классе необходимо проверить, насколько сознательно усвоили учащиеся способ вычисления площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда. Очень часто ученик говорит: «Надо умножить длину на ширину», но не может сказать, почему так надо сделать, не связывает с этим правилом никаких конкретных представлений. Поэтому повторение одного правила является совершенно недостаточ-

[1] См стр 492

[2] См. стр. 499—501.

ным. Не всегда правильны и ответы учащихся о соотношениях между квадратными единицами и особенно между кубическими. Так, например, говорят: «В 1 *куб. м* 1000 *куб. см*» и т. п. Это тоже вызывается отсутствием конкретных представлений. Формально заученное быстро забывается.

Пятиклассники оперируют уже не только с целыми, но и с дробными числами. В школе можно часто наблюдать, как, установив правило вычисления площади прямоугольника, длины сторон которого выражены в целых числах, учитель сразу предлагает ученикам решать задачи с дробными данными. Это чисто формальный прием, при котором учащиеся могут механически решать задачу, но это решение не связывать ни с каким конкретным представлением.

Рассмотрим, как может быть проведено в V классе измерение площадей и объемов. Еще в первой теме арифметики следует повторить с учениками метрическую систему мер и позаботиться о том, чтобы все ученики имели правильное представление о квадратных и кубических единицах. В каждой тетради должны быть вычерчены квадратный дециметр, разделенный на квадратные сантиметры, и квадратный сантиметр, разделенный на квадратные миллиметры. Для последнего чертежа можно использовать миллиметровую бумагу. На стене класса полезно вывесить изображение квадратного метра, разделенного на квадратные дециметры. Выяснить, имеются ли у пятиклассников конкретные представления об аре и гектаре, можно на экскурсии, организованной совместно с учителем географии. На уроке надо рассмотреть различные прямоугольники, как указывалось выше[1], ввести термины «основание» и «высота». Затем можно напомнить учащимся, как они составляли прямоугольники из квадратных единиц, то есть составить полоску из нескольких квадратных сантиметров и затем приложить одну к другой несколько полосок, как указано на рисунке 2. Учащимся очевидно, что площадь прямоугольника выражается числом квадратных единиц, из которых его можно составить. Если школьники хорошо помнят этот материал, то можно лишь показать готовый чертеж, где за единицу взят квадратный дециметр.

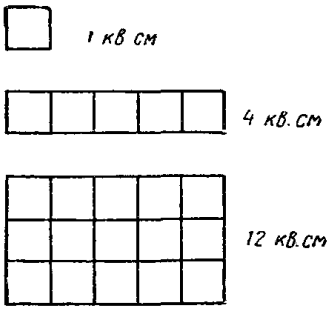


Рис. 2

Затем переходят к подсчету числа квадратных единиц, составляющих данный прямоугольник. Для этого надо выяснить, сколько квадратных единиц будет в одном ряду и сколько получится таких рядов. Учащиеся в тетрадях чертят прямоугольник по дан-

[1] См. § 5, стр. 489.

ным размерам основания и высоты и разбивают его на квадратные сантиметры. Дальше, отвечая на вопросы учителя, пятиклассники выясняют, что в одном ряду содержится столько квадратных сантиметров, скольким линейным сантиметрам равна длина основания, а количество рядов определяется числом линейных сантиметров, содержащихся в высоте прямоугольника, и записывают:

в одном ряду — 1 *кв. см*×5= 5 *кв. см*,
в трех рядах — 5 *кв. см*×3=15 *кв. см*.

Отдельные ученики могут провести подобные рассуждения для других прямоугольников, после чего делают общий вывод: площадь прямоугольника в квадратных единицах равна произведению чисел, измеряющих его основание и высоту в соответственных линейных единицах. Эта формулировка длинна; обычно говорят кратко: площадь прямоугольника равна произведению длин его основания и высоты. Но пятиклассник должен отчетливо понимать смысл формулировки и знать, в каких единицах выражаются длины основания и высоты, в каких — площадь. При вычислениях делают краткую запись, например $5\times3=15$ (*кв. см*).

Совершенно аналогично может быть рассмотрен вопрос об объеме прямоугольного параллелепипеда. В школе должна быть модель кубического дециметра, разделенного на 10 слоев, из которых каждый высотой в 1 *см*, причем один слой разделен на брусочки шириной в 1 *см* и один брусок разбит на кубические сантиметры. (Если такого пособия нет, то его можно изготовить в столярной мастерской школы.) Надо также иметь модели разнообразных по размерам и по форме прямоугольных параллелепипедов. Необходимо, чтобы каждый ученик изготовил модель прямоугольного параллелепипеда из плотной бумаги или картона; такая модель изготовлялась и в IV классе на уроках труда.

Учитель может уделить время на уроке для чертежа развертки параллелепипеда, а модель изготовить на внеклассных занятиях. Надо иметь также набор одинаковых кубов, в частности набор моделей кубических дециметров; такой набор может быть изготовлен учащимися коллективно. Модель кубического метра может быть изготовлена разборной из 12 деревянных узких метровых реек. Из них можно составить каркас куба.

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении площади прямоугольника, надо из равных кубиков сложить брусок, из нескольких брусков — слой и затем, накладывая слои один на другой, получить параллелепипед, как это показано на рисунке 3. Рассуждения тоже будут аналогичны.

Повторение и углубление пройденного в IV классе при прохождении темы «Натуральные числа» сопровождается реше-

нием задач с геометрическим содержанием, а также позволяет графически пояснять и иллюстрировать свойства арифметических действий [1].

В дальнейшем при введении понятия дроби надо знакомить пятиклассников не только с долями линейной единицы, но и с прямоугольными долями квадратной и кубической единиц [2]. Наглядные представления о долях этих единиц помогают ученикам осознать вычисление площади и объема в области дробных чисел.

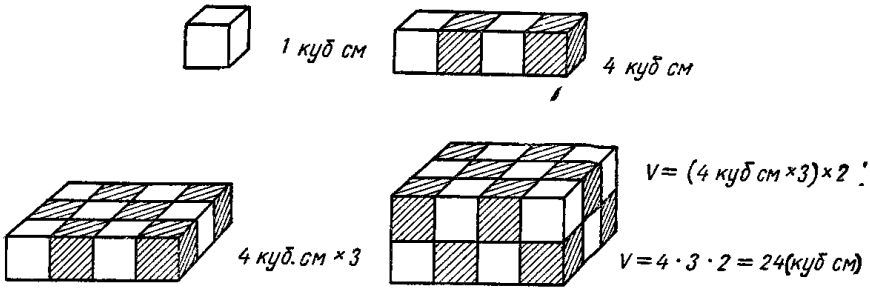


Рис. 3

Можно начать с составления прямоугольника из равных долей квадратной единицы. Рассматривается чертеж, на котором квадратная единица (например, квадратный дециметр) разделена на несколько равных прямоугольников. Например, на рисунке 4 квадратная единица разделена на 15 равных частей. Выделяем $\frac{1}{15}$ долю квадратной единицы; для учеников очевидно, что площадь этого маленького прямоугольника мы считаем равной $\frac{1}{15}$ кв. ед. Затем из таких долей квадратной единицы составляется полоска. На рисунке 4 взято 4 таких доли квадратной единицы, получился прямоугольник, площадь которого равна $\frac{4}{15}$ кв. ед. $\left(\frac{1}{15}\text{ кв. ед.} \times 4\right)$; затем прикладываем друг к другу две такие полоски и получаем прямоугольник, площадь которого равна $\frac{8}{15}$ кв. ед.

$$\left(\frac{1}{15}\text{ кв. ед.} \times 4\right) \times 2 = \frac{8}{15}\text{ кв. ед.}$$

Пятиклассники получают наглядное представление о площади прямоугольника, выраженной дробным числом. Полученное число показывает, из каких долей квадратной единицы можно составить данный прямоугольник и сколько таких долей нужно взять.

[1] См. ч II, рис. 13, 14.
[2] См. ч. II, рис. 17—21.

После этого надо перейти к вычислению площади прямоугольника, если длины основания и высота его выражены дробными числами. Задача в том, чтобы разделить прямоугольник на равные доли квадратной единицы наиболее простым путем и подсчитать число этих долей. На рисунке 5 показано, как это сделать. Дан прямо-

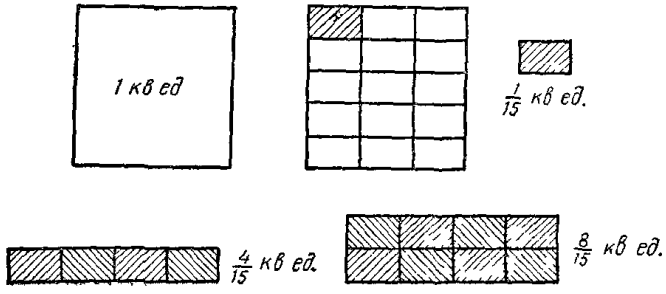


Рис. 4

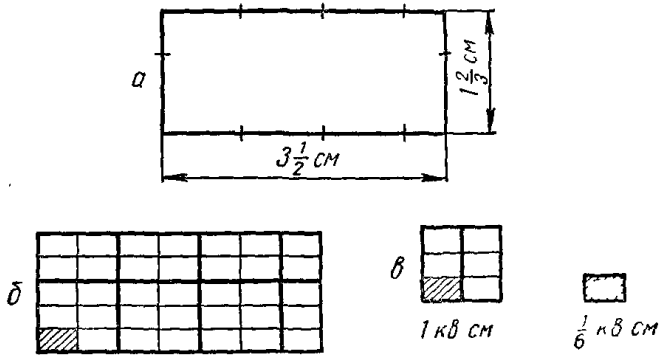


Рис 5

угольник, у которого длина основания $3\frac{1}{2}$ *см*, а длина высоты $1\frac{2}{3}$ *см* (на большом чертеже за единицу длины можно взять 1 *дм*). Так как $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, то в основании $\frac{1}{2}$ *см* откладывается 7 раз; аналогично, так как $1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, то по высоте $\frac{1}{3}$ *см* откладывается 5 раз; наносим соответственные деления (рис. 5, *б*) и разбиваем весь прямоугольник на равные маленькие прямоугольники. Надо выяснить, какую долю квадратной единицы составляет 1 маленький прямоугольник. Для наглядности 1 кв. ед. изображена отдельно (рис. 5, *в*). Выясняем, что каждый маленький прямоугольник составляет $\frac{1}{6}$ долю квадратного сантиметра, то есть площадь его равна $\frac{1}{6}$ *кв. см.*

Итак, прямоугольник может быть составлен из шестых долей квадратного сантиметра. Остается подсчитать число этих долей. Площадь одной полосы $\left(\frac{1}{6}\ кв.\ см \times 7\right)$. Площадь всего прямоугольника, то есть пяти полос, $\left(\frac{1}{6}\ кв.\ см \times 7\right) \times 5$. Получаем

$$S_{\square} = \left(\frac{1}{6} \cdot 7\right) \cdot 5 = \frac{7 \cdot 5}{6} = \frac{35}{6} (кв.\ см); \qquad S_{\square} = \frac{35}{6}\ кв.\ см = 5\frac{5}{6}\ кв.\ см.$$

Этот вывод может быть получен в результате беседы; он не затруднит учащихся, если они привыкли к изображению долей квадратной единицы.

Остается выяснить, что для вычисления площади прямоугольника, у которого длина основания и высоты выражены дробными числами, нет надобности разбивать его на доли квадратной единицы, так как $\frac{35}{6} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3}$, то есть дробь, выражающая площадь прямоугольника, является произведением дробей

$$\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \quad и \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

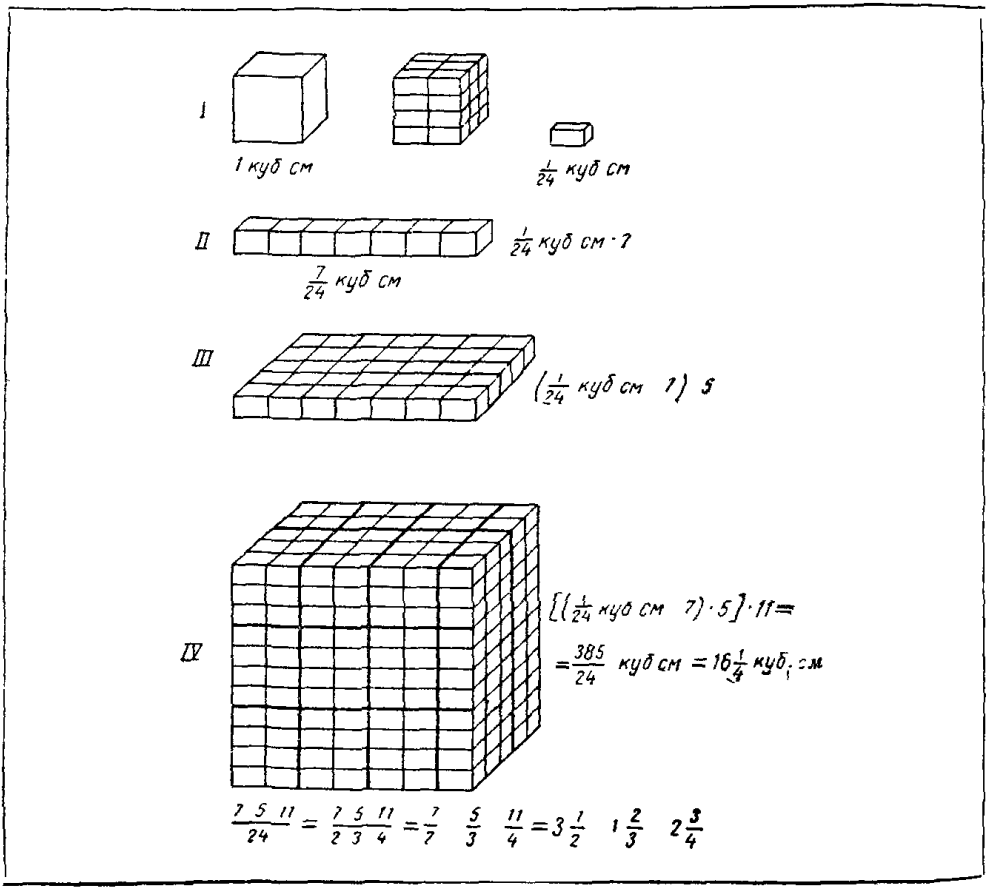


Рис. 6

Произведение знаменателей этих дробей показывает, на какие доли разделена квадратная единица, а произведение числителей — сколько таких долей взято.

Окончательно устанавливается правило: чтобы найти площадь прямоугольника в квадратных единицах, надо перемножить числа, выражающие длины его основания и высоты в соответственных линейных единицах. Результат можно записать формулой

$$S_{\square} = a \cdot h \text{ (кв. ед.)},$$

где a и h могут быть и натуральными и дробными числами; a — длина основания; h — длина высоты. Мы показали вывод только на одном примере, где оба числа были дробными. Можно рассмотреть случай, где одно число целое, другое дробное [1].

Аналогично может быть рассмотрено и вычисление объема прямоугольного параллелепипеда, линейные размеры которого выражаются дробными числами. При этом лучше пользоваться не чертежами, а моделями долей кубической единицы [2], из которых складывается брусок, затем слой и, наконец, несколько слоев, как показано на рисунке 6.

Площадь треугольника.

Ученики V класса уже знакомы с треугольником; надо только рассмотреть с ними треугольники разного вида, предложить им найти среди окружающих предметов и на рисунках фигуры треугольной формы. Следует использовать подвижное пособие — треугольник с раздвигающимися сторонами [3]. Учсники уже пользовались чертежным треугольником и поэтому имеют представление о прямоугольном треугольнике.

Чтобы дать правильное представление о высоте треугольника, надо предварительно выяснить, что высота прямоугольника образует с основанием прямой угол. Затем на остроугольном треугольнике показать, что любую его сторону можно принять за основание, но боковая сторона не образует с основанием прямого угла, не является его высотой. Для того чтобы ученики наглядно восприняли понятие высоты, можно поставить рядом два треугольника, совместив их основания с горизонтальной плоскостью (рис. 7). Учащимся ясно, что один треугольник «выше» другого, то есть высота его больше, хотя высоты и не

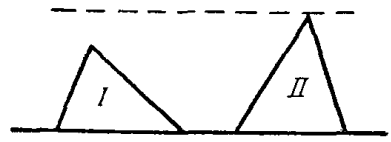


Рис. 7

[1] Вычисление площадей прямоугольника, если его линейные размеры выражены дробными числами, тесно связано с умножением дробей. См. ч. II, § 15.

[2] Рекомендуем ознакомиться с работой [19], ч. I и ч. IV, гл. II, § 48—50.

[3] См. § 6, рис. 23.

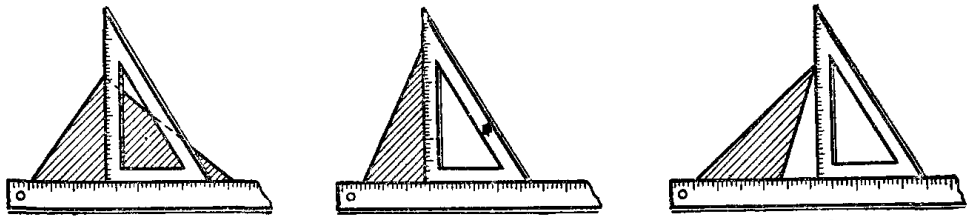


Рис 8

проведены. Показав ученикам, как в треугольнике провести высоту с помощью чертежного треугольника и линейки (см. рис. 8, *а*), нужно предложить им самим выполнить это задание.

Рассматривая чертежный треугольник, пятиклассники увидят, что если в прямоугольном треугольнике взять за основание один катет, то другой катет будет высотой (термин «катет» в V классе не дается).

Чтобы дать понятие о высоте тупоугольного треугольника, можно расположить его, как показано на рисунке 8, *в*, и предложить измерить его высоту. Если времени мало, то можно этим ограничиться, но полезно продолжить упражнения в проведении высот и при изучении следующих тем арифметики, так как умение проводить высоты в треугольниках разного вида имеет большое значение для вычисления площадей при решении практических задач.

При выводе формулы вычисления площади прямолинейной фигуры всегда может быть использовано *понятие равносоставленности.* Два многоугольника называются равносоставленными, если они могут быть разложены на одинаковое число попарно равных частей. Площади равносоставленных фигур равны. Этих понятий мы не даем ученикам V класса, но фактически пользуемся ими. Хорошими упражнениями является разрезание фигуры на части и складывание из этих частей других фигур. Можно начать с того, что ученик, вырезав модель прямоугольника, расчерченного на 8 квадратов, разрезает ее пополам по средней линии и составляет из частей другой прямоугольник, как показано на рисунке 9 Для учащихся очевидно, что площади этих прямоугольников равны. Также можно предложить разрезать данный прямоугольник по диагонали на 2 треугольника и составить из этих частей разные фигуры, как показано на рисунке 10, *а—д*. Равенство площадей всех этих фигур

Рис. 9

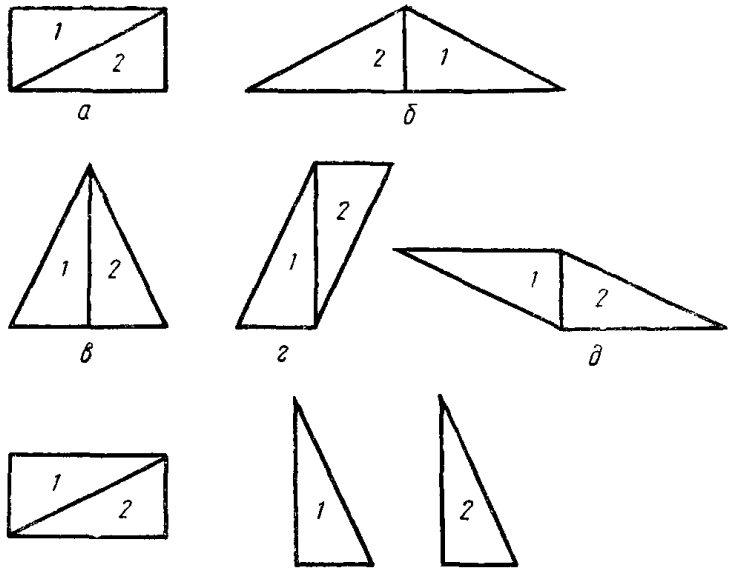


Рис. 10

очевидно. Если разрезать прямоугольник на 2 равных треугольника, то также легко заметить, что площадь каждого треугольника равна половине площади данного прямоугольника (рис. 10).

Такие упражнения интересуют пятиклассников и могут их подготовить к *вычислению площади треугольника.*

Эти вычисления проще всего начать с прямоугольного треугольника. Рассмотрев прямоугольный треугольник (рис. 11, *а*), ученики сразу заметят, что его нельзя заполнить целыми квадратными единицами (или их прямоугольными долями). Тогда учитель предлагает разрезать этот треугольник на две части и составить из них прямоугольник. На рисунке 11, *б* и *в* показаны два способа преобразования. В первом случае мы получаем прямоугольник, у которого основание равно основанию

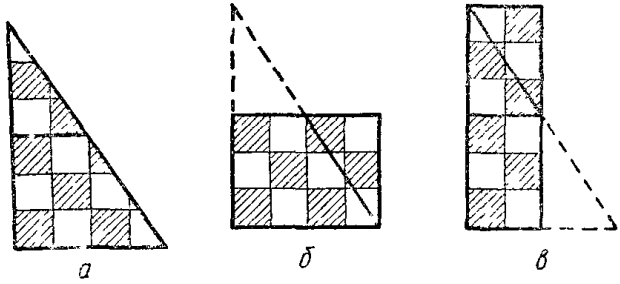


Рис. 11

данного треугольника, но высота в 2 раза меньше, поэтому для вычисления площади треугольника, которая равна площади полученного прямоугольника, надо длину основания треугольника умножить на половину длины его высоты. Во втором случае половину длины основания треугольника надо умножить на длину его высоты. Наконец, можно из двух равных прямоугольных треугольников составить прямоугольник (рис. 10), основание и высота которого равны основанию и высоте данного треугольника. Чтобы найти площадь полученного прямоугольника, надо перемножить числа, измеряющие длины основания и высоты. А так как прямоугольник составлен из двух равных треугольников, то полученное произведение надо разделить на 2.

Сравнив результаты вычисления в каждом случае, мы видим, что они равны, так как, чтобы разделить произведение двух чисел на 2, достаточно разделить на 2 один из сомножителей. Имеем: $S_{\triangle}=4\cdot\frac{6}{2}=\frac{4}{2}\cdot 6=\frac{4\cdot 6}{2}=12$ (кв. ед.).

После этого можно предложить преобразовать в прямоугольник остроугольный треугольник. Опять могут быть применены различные способы преобразования.

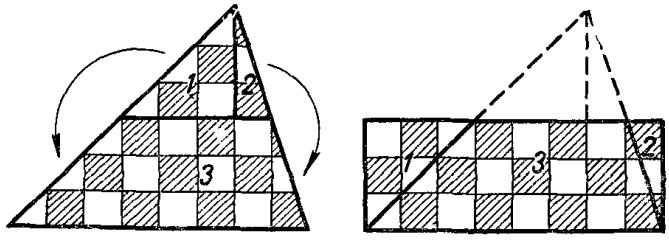


Рис. 12

I (рис. 12). Треугольник разрезан по средней линии, а затем маленький треугольник разрезан по его высоте на 2 прямоугольных треугольника. Повернув эти треугольники, получим прямоугольник, равносоставленный с данным треугольником, то есть имеющий ту же площадь. Основание прямоугольника равно основанию данного треугольника, а высота в 2 раза меньше.

II (рис. 13). Отрезки, на которые высота разделила основание, разделены каждый пополам, затем отрезаны 2 прямоугольных треугольника и после преобразования получен прямоугольник, у которого основание составляет половину основания данного треугольника, а высоты их равны.

III (рис. 14). Из двух равных остроугольных треугольников после того, как один из них разрезан по высоте на 2 пря-

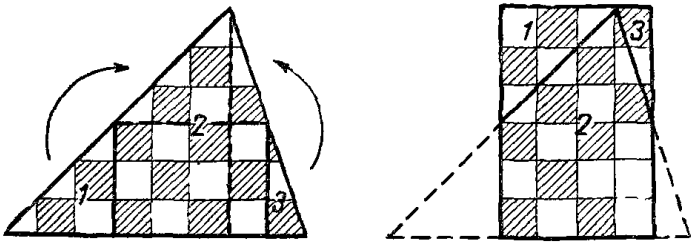


Рис. 13

моугольных треугольника, составлен прямоугольник, площадь которого в 2 раза больше, чем площадь данного треугольника.

Эти три способа аналогичны с рассмотренными выше преобразованиями прямоугольного треугольника и в каждом случае позволяют рассмотреть способ вычисления, пользуясь числовыми данными.

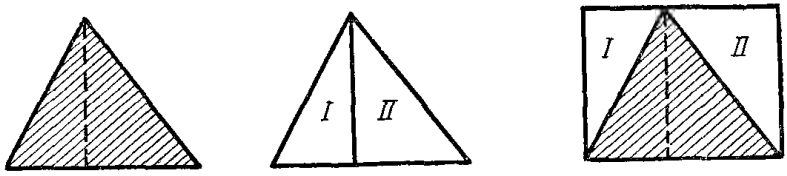


Рис. 14

Если учащиеся записывали буквами законы арифметических действий и формулу для вычисления площади прямоугольника, то можно записать каждый раз после числовой и буквенную формулу. Получим $S_{\triangle}=a\cdot\frac{h}{2}$; $S_{\triangle}=\frac{a}{2}\cdot h$ и $S_{\triangle}=\frac{a\cdot h}{2}$, результаты получаются одинаковые, так как если один из сомножителей разделить на 2, то и все произведение уменьшится в 2 раза.

Преподаватель в зависимости от имеющегося в его распоряжении времени может разобрать с учениками еще несколько преобразований, причем частично они могут быть показаны на готовых моделях, а частично на моделях, выполненных пятиклассниками. Как показывает опыт, ученики интересуются преобразованиями и дома охотно готовят модели.

Преобразование тупоугольного треугольника в прямоугольник, если за основание принята одна из сторон, заключающих тупой угол, можно показать ученикам на готовой модели (рис. 15, *I* и *II*).

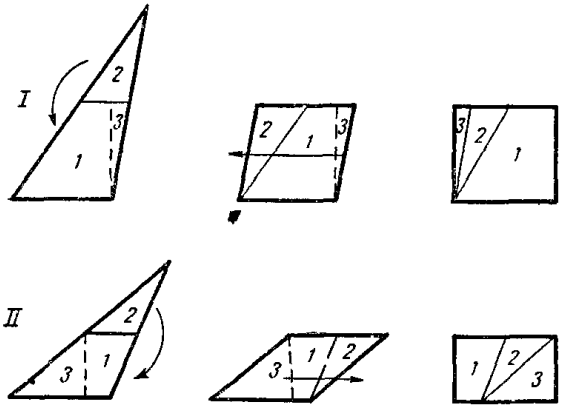


Рис. 15

Измерение углов. Транспортир.

В программу V класса введено измерение углов и дуг при помощи транспортира, понятие о градусе и минуте. Систематическое изучение этих вопросов проводится в VI классе. В V классе ученики должны получить только некоторые практические навыки. В то же время необходимо обеспечить у них правильные представления, которые впоследствии будут использованы в VI классе при введении общих понятий, определений и предложений, связанных с этой темой.

Учитель может опираться на знания учащихся, полученные ими еще в начальной школе. Уже в III классе вводятся углы: прямой, острый, тупой. Учащиеся не только знакомы с их видом, но и умеют начертить прямой угол с помощью линейки и угольника. При введении понятия дроби и доли единицы одним из наглядных пособий обычно является круг, который делят перегибанием на равные доли (секторы). Пятиклассники изображают целые и дробные числа на числовом луче, то есть имеют представление о луче. Этих представлений достаточно, чтобы перейти к измерению углов.

Можно предложить начертить несколько разных углов на доске, назвать их, начертить прямой угол с помощью угольника и линейки; выяснить, что стороны угла — это лучи. Определений угла и видов углов давать не надо; но ученики знают, что угол прямоугольника прямой; имеют модель прямого угла — чертежный угольник.

Можно предложить всем учащимся начертить круг, проведя окружность при помощи циркуля. Та точка, в которую мы поставим ножку циркуля,— это центр круга. Не давая определения окружности, следует начертить несколько концентрических окружностей, выяснить, что все точки каждой из вычерченных кривых одинаково отстоят от центра. К следующему уроку

можно предложить ученикам вырезать из бумаги по нескольку кругов. В классе учитель перегибает по диаметру большой бумажный круг и показывает, что при этом окружность разделилась на две равные части — 2 дуги; затем, перегибая круг так, чтобы он разделился на 4 равные части, и снова его разворачивая, устанавливает, что окружность разделилась на 4 равные части, и спрашивает, какие углы образовались при вершине, совпадающей с центром круга. Наблюдения помогают выяснить, что получились 4 прямых угла. Ученики также перегибают свои круги и все убеждаются, что прямому углу соответствует дуга в $\frac{1}{4}$ окружности. Чертеж двух-трех концентрических окружностей с двумя перпендикулярными диаметрами может быть сделан на доске. На нем следует показать, что в любой окружности прямому углу соответствует дуга в $\frac{1}{4}$ окружности. Если начертить острый угол, то его стороны вырежут меньшую дугу (рис. 16).

Надо иметь пособие — большой круг, разделенный на равные секторы, а один сектор, разделенный на градусы Это пособие поможет показать, что окружность разделена на 360 равных частей, то есть каждая маленькая дуга составляет $\frac{1}{360}$ часть окружности. Такая дуга представляет дуговой градус. Прямой угол разделен при этом на 90 равных частей, каждый такой угол — $\frac{1}{90}$ часть прямого угла, это — угловой градус. Приложив модель острого угла вершиной к центру круга, ученики смогут прочитать, скольким дуговым градусам равна дуга, заключенная между сторонами этого угла, и заметить, что столько же углов в 1° заключается в этом угле. После того как сами ученики измерят еще несколько острых и тупых углов, им можно пояснить устройство транспортира и показать, что вся его дуга — половина окружности и поэтому она содержит 180°, предложить указать центр окружности и показать, как правильно прикладывать транспортир при измерении угла. Необходимо, чтобы каждый ученик имел транспортир и самостоятельно измерил им несколько углов. При этой работе пятиклассники еще раз убедятся, что стороны угла не отрезки, так как при измерении угла транспортиром их можно продолжить, что не меняет величины угла.

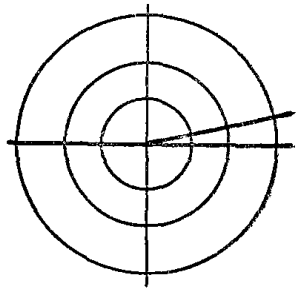


Рис 16

Понятие о градусной сети школьники получат на уроках географии, но, как указано в программе по географии, осно-

вой этих представлений будут служить сведения об окружности и делении ее на градусы, приобретенные на уроках арифметики.

В программе V класса не выделен вопрос «Окружность», но без выяснения смысла этого термина, введения понятий центра, радиуса, диаметра и дуги нельзя отчетливо выяснить процесс измерения угла. Ученику не нужно запоминать какие-либо определения, но он должен *уметь показать окружность, центр, дугу, стороны угла* и понимать, как вычертить окружность данного радиуса.

Самостоятельные и практические работы учеников.

Как уже было сказано, большое значение имеют самостоятельные работы учащихся для более сознательного и прочного усвоения геометрического материала, а также для приобретения некоторых практических навыков. Уже первые работы должны дать прочный навык пользоваться циркулем для откладывания отрезков определенной длины и чертежным угольником для построения прямых углов.

При повторении сведений о прямоугольнике ученики чертят вначале на клетчатой бумаге различные прямоугольники, причем снова выясняют, что в прямоугольнике углы прямые, а противоположные стороны равны; потом каждому ученику надо предложить начертить на нелинованной бумаге прямоугольник по заданным размерам его основания и высоты, пользуясь линейкой и угольником. При откладывании сторон ученик может измерять отрезки непосредственно масштабной линейкой, но надо показать, что использование измерительного циркуля позволяет сделать это более точно.

Можно предложить определить расстояние на местности между двумя пунктами по плану с помощью циркуля и линейного масштаба.

В дальнейшем учащиеся самостоятельно находят длину периметра прямоугольника, треугольника. Им опять можно предложить построить при помощи циркуля отрезок, равный периметру заданной фигуры, измерить его длину, а затем измерить каждую сторону и найти сумму их длин. Измерение проводится с точностью до 1 *мм*. Расхождение в результате даст учителю возможность провести беседу о погрешности при измерении и вычислении. Необходимо дать самостоятельную работу на проведение высот в треугольниках при помощи чертежного угольника [1].

Измерительные работы в классе необходимо проводить систематически. Вначале проводятся кратковременные работы, в которых надо найти площадь прямоугольника или треугольника, площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипе-

[1] Некоторые работы были указаны выше.

да. Каждый ученик получает индивидуальное задание и самостоятельно проводит измерение и вычисление. Учитель должен иметь необходимый материал, состоящий не только из моделей, но и из реальных предметов, например спичечных коробок, резинок, блокнотов и пр.

Для облегчения проверки учителю надо иметь перечень всех пособий с указанием их размеров (с допустимыми погрешностями).

В более сложных работах ученик не только проводит измерения, но должен вычислить количество материала, которое требуется для изготовления, например, коробки с учетом прибавки на швы для склеивания и окантовки бумагой.

Учащихся всегда интересуют измерение и вычисление площадей более сложных фигур, составленных из прямоугольников и треугольников. Приводим чертежи нескольких фигур этого типа (рис. 17). При раздаче чертежей для самостоятельной работы можно нескольким ученикам дать одинаковые задания. Анализируя проведенную работу, полезно сравнить способы, примененные различными учениками, выделить наиболее целесообразный. Такие работы носят творческий характер; отдельные ученики сами конструируют фигуры, которые могут быть использованы.

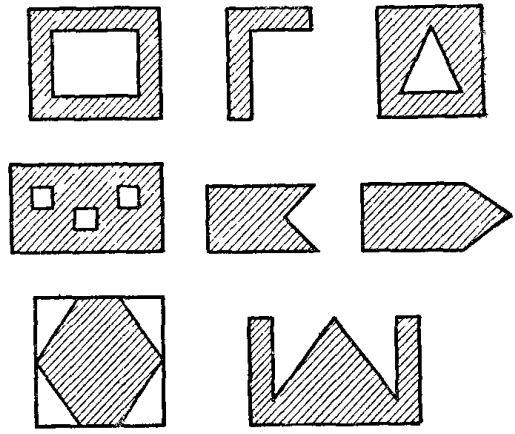


Рис. 17

Необходимо привлечь школьников и к изготовлению объемных моделей. Например, им можно предложить на уроке вычертить развертки различных параллелепипедов, в том числе и кубов, по заданным размерам. Полезно сравнить различные построения разверток.

В некоторых школах удачно проводилась такая работа: каждый ученик изготовлял дома модель прямоугольного параллелепипеда, измерял и записывал ее линейные размеры, площадь поверхности, объем, а затем сдавал учителю. Эти модели на уроке измеряли другие ученики и вычисляли площадь поверхности и объем. Последующее сравнение результатов вызывало большой интерес.

Практические работы с измерением длины, площади, объема в помещении школы, а также на пришкольном участке могут быть заданы с разделением учащихся на бригады.

§ 6. О преподавании геометрии в VI—VIII классах

1. В VI классе учащиеся начинают изучать курс планиметрии в систематическом порядке. Однако было бы ошибкой думать, что они подготовлены к усвоению логической структуры геометрии.

Недостаточное внимание к психологическим особенностям детей 12-летнего возраста может привести к полному непониманию учащимися изучаемого предмета. Шестиклассники часто не понимают ни смысла доказательства, ни необходимости тех, а не других слов в определении понятия. Логическое обоснование очевидного для них положения представляется им менее достоверным, чем непосредственное наблюдение или опытная проверка. Если ученик начинает заучивать наизусть слова или фразы, логическая связь между которыми ему непонятна, то он теряет интерес к предмету. Такое изучение геометрии вредно.

Отсюда вытекает, что преподавание систематического курса планиметрии не должно порывать с методами, применяемыми при изучении наглядной геометрии. Учитель по-прежнему должен широко использовать наглядность, привлекать учащихся к самостоятельному наблюдению свойств изучаемых фигур, к практическим работам, помогающим усвоить эти свойства. Такие указания мы находим и в объяснительных записках к программам по математике.

2. В то же время большое значение приобретает работа над развитием логической мысли учащихся. Систематическое построение курса планиметрии дает возможность учащимся почувствовать, а затем и осознать внутренние связи между геометрическими понятиями, зависимость одних свойств от других. На первых уроках геометрические предложения выявляются на основании непосредственного восприятия учащихся, которые при этом привлекаются к несложным рассуждениям, но постепенно логический элемент усиливается.

Методика введения новых понятий, определений и обучения доказательству рассмотрена нами подробно ниже [1].

3. Воспитание логической мысли — процесс медленный, и он должен продолжаться в течение всего курса обучения. В восьмилетней школе не дается понятия о дедуктивном построении геометрии, но логическая зависимость новой теоремы от ранее установленных положений должна быть осознана учениками [2]. Они должны научиться самостоятельно отыскивать эту зависимость, то есть принимать активное участие в поисках доказа-

---

[1] См § 6 и § 7.

[2] Понятие о дедуктивном строении геометрии включено в программу X класса средней школы.

тельства. Этому помогает систематическое решение геометрических задач, и особенно задач на доказательство. Некоторые теоремы, не включенные в программу как обязательные, тоже могут быть предложены как задачи на доказательство [1].

Наряду с изучением систематического курса планиметрии учащиеся VII и VIII классов встречаются с вопросами, логическое обоснование которых не может быть им дано. Таковы, например, длина окружности, площадь круга в VII классе, стереометрический материал в VIII классе. Ученики этих классов, уже знакомые с логическими выводами, в этих случаях могут и должны понимать, что им дано не доказательство рассматриваемого положения, а только его иллюстрация или опытная проверка. Недопустимо, чтобы ученик принимал такую иллюстрацию за доказательство.

4. Изучение геометрии должно сопровождаться систематическим решением задач практического и производственного характера. Значение их очень велико: школьники приобретают практические навыки, привыкают пользоваться некоторыми измерительными приборами и инструментами; в то же время, применяя теоретические знания, учащиеся осознают значение геометрии для практической деятельности людей. Теоретическое обоснование конструкции какого-либо прибора или способа проведения измерительной работы может явиться задачей на доказательство. Так, например, применением теоретических знаний является пояснение устройства и использования параллельных линеек малки (VI класс), центроискателя, угольника-диаметрометра (VII класс), делительного циркуля, поперечного масштаба, пантографа (VIII класс)[2]. Измерительные работы на местности могут проводиться в каждом классе, причем способы их проведения меняются в зависимости от теоретических знаний учащихся. Если, например, в VI классе используются эккер, астролябия, то в VIII классе проводится мензульная съемка. При решении задач на определение недоступных расстояний в VI классе можно опираться на осевую симметрию, равенство треугольников, в VIII классе обоснованием может служить уже подобие фигур и соотношения между сторонами и углами прямоугольных треугольников [3].

5. Как и в V классе, решение практических задач должно давать материал для вычислительной работы, в процессе которой ученики должны получить навык в использовании таблиц (квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, обратных чисел, длины окружности и площади круга и т. п.), а в VIII классе — и

---

[1] О геометрических задачах см. гл. III.
[2] См. § 13, стр. 569—571.
[3] См. § 11, стр. 550, 551.

в применении логарифмической линейки. Навыки в приближенных вычислениях тоже должны совершенствоваться. В VII и VIII классах могут быть использованы и некоторые приближенные формулы, как, например, $(1+\alpha)^3 \approx 1+3\alpha$, $\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2}$ (для чисел, близких к 1).

6. Для достижения сознательности восприятия и усвоения геометрического материала, для повышения интереса к предмету необходимо всемерно активизировать работу каждого ученика. Это достигается не только привлечением всех школьников к живой общей классной работе, но и организацией их самостоятельной работы. Примеры таких самостоятельных работ, как предваряющих изучение нового материала, так и способствующих его усвоению и закреплению, будут нами рассмотрены подробно в § 7 и 9, а также при изучении методики преподавания отдельных тем.

Методика введения новых геометрических понятий; работа над усвоением определений; классификация.

1. В I части было рассмотрено, какие требования предъявляются к правильно построенным определениям [1]. Учащиеся часто выучивают требуемые определения наизусть, но при ответах нередко пропускают существенное или добавляют лишнее. Это происходит потому, что ими не осознана необходимость включения в определение именно тех, а не других признаков понятия. Исправления учителя они часто принимают за придирчивость, считая, что было сказано «то же самое» Например, ученик говорит, что медиана — это прямая, которая делит сторону треугольника пополам. Своей ошибки он не сознает, так как его определение не противоречит факту, а при этом он представляет именно медиану. Или учащийся определяет равносторонний треугольник, как треугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Так как оба свойства действительно принадлежат равностороннему треугольнику (и только ему), то ученик убежден в своей правоте.

Чтобы достигнуть понимания смысла определения, учитель не должен начинать с сообщения учащимся готовой формулировки. Даже если ученик имеет соответственные представления, он в этом случае не осознает, почему определение построено именно так, а не иначе. К тому же в классе всегда есть ученики, которые не имеют необходимых представлений, и услышанное ими сочетание слов будет для них просто бессодержательным. Поэтому следует начинать с конкретных геометрических образов.

---

[1] См. § 9.

Чтобы учащийся мог принять активное участие в создании определения, его внимание надо привлечь именно к тем свойствам, которые должны быть внесены в определение понятия.

Иногда это может быть сделано путем сравнения ряда фигур. Например, можно вывесить чертеж с изображением различных выпуклых четырехугольников и выделить из них все те, у которых противоположные стороны попарно параллельны. Если поставим цель рассматривать только взаимное расположение сторон, то отберем в одну группу, в один класс все параллелограммы, независимо от их углов; в другой класс отойдут все остальные четырехугольники. Установив, что отобранные четырехугольники имеют общий признак — параллельность каждой пары сторон, и сказав, что четырехугольник, имеющий это свойство, называется параллелограммом, легко приходим к формулировке определения параллелограмма.

Такой подход к определению полезен тем, что ученик сразу представляет разнообразные виды параллелограммов и сопоставляет их, но учитель должен направить его внимание и с этой целью указывает, по какому признаку надо отобрать четырехугольники, без этого направления ученик может их сгруппировать иначе, например по виду углов или длине сторон.

Так как в определении мы устанавливаем связь нового понятия с ранее известными, то лучшим способом для обнаружения признаков, выделяющих новое понятие, является постепенное «образование» определяемого понятия; тогда учащиеся рассматривают не готовые объекты, а их возникновение. Такой подход к построению определения можно назвать генетическим. Его можно осуществить посредством построения соответственного геометрического образа, путем рассмотрения наглядной подвижной модели или ряда последовательных чертежей.

Например, для определения медианы выполняются следующие построения: а) одну из сторон треугольника делим пополам и отмечаем точку, являющуюся ее серединой; б) проводим отрезок, соединяющий противоположную вершину треугольника с полученной точкой, то есть серединой основания. Этот отрезок называется медианой. Что же мы называем медианой? Построение приводит к определению: отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника. Учащиеся должны провести в треугольнике все три медианы.

Также путем построения можно подойти и к определению параллелограмма: проводим две параллельные прямые, предлагаем их пересечь двумя параллельными между собой прямыми. Получается четырехугольник, стороны которого попарно параллельны — это параллелограмм. Меняя направление первой секущей и положение точки, через которую проводим вторую секущую, мы получим все виды параллелограмма.

В научном курсе геометрии, перед тем как дать определение нового понятия, доказывается так называемая *теорема существования,* сводящаяся обыкновенно к доказательству возможности построения соответственной геометрической фигуры. Например, перед введением определения прямой, перпендикулярной к плоскости, доказывается, что можно построить прямую, которая пересекает плоскость так, чтобы она была перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей в плоскости через ее основание (теорема о двух перпендикулярах).

В VI—VIII классах не вводится термин «теорема существования», но если перед определением фигуры показать возможность ее построения, то суть вопроса будет освещена. Например, следует предложить выяснить, возможно ли построение четырехугольника, у которого стороны попарно параллельны. Две параллельные прямые и секущую мы уже строили, теперь можем выбрать на одной из этих параллельных точку; через точку вне прямой (секущей) можно провести прямую, параллельную этой секущей; проведенная прямая, пересекая одну из параллельных, обязательно пересечет и другую, следовательно, построение возможно.

Покажем еще, как, разрабатывая с учениками формулировку определения, можно использовать подвижную модель. Например, учитель намерен привести учащихся к определению прямого угла как угла, равного своему смежному. Он показывает пособие: из реек сделана модель смежных углов, причем общая сторона может вращаться вокруг вершины (рис. 18). Модель устанавливается так, что смежные углы не равны. Выясняется, что один из смежных углов больше другого. Преподаватель вращает среднюю (общую) сторону и предлагает ученикам следить за изменением углов. Учащиеся наблюдают, что больший угол уменьшается, а меньший — увеличивается. Им интуитивно ясно, что можно так расположить общую сторону, что оба смежных угла будут равны [1]. Повернув рейку в это положение, преподаватель выявляет, что каждый угол равен своему смежному. Но как теперь назвать каждый угол? Прямым. Какой же угол мы назовем прямым? Намеченное определение естественно следует из наблюдений.

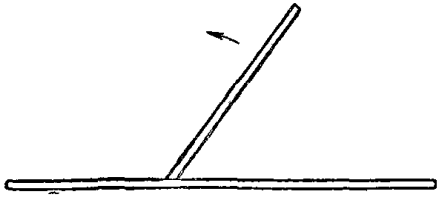


Рис. 18

Так же может быть использована подвижная модель для выработки определения параллельных прямых.

Ученики еще в курсе наглядной геометрии познакомились со словом *параллельные,* рассматривая стороны прямоугольника,

[1] В строгих курсах геометрии это доказывается.

но определения им не давалось. Так как в определение входит признак, что прямые не пересекаются (то есть не имеют общей точки), преподаватель начинает с демонстрации пособия, на котором изображены две пересекающиеся прямые (рис. 19, *а*). Ученики наблюдают, что две прямые AB и CD пересекаются в точке O; затем прямая CD вращается вокруг точки D; точка пересечения O постепенно передвигается (рис. 19, *б*). Затем прямая устанавливается так, как на рисунке 19, *в*. Пересекаются ли прямые, то есть есть ли у них общая точка? Может быть, некоторые учащиеся скажут «да», другие — «нет»; полезно выяснить, что прямые пересекаются где-то влево (учащихся надо приучать представлять прямые неограниченными). Продолжаем вращение. При некотором положении точка пересечения прямых расположится справа (рис. 19, *г*).

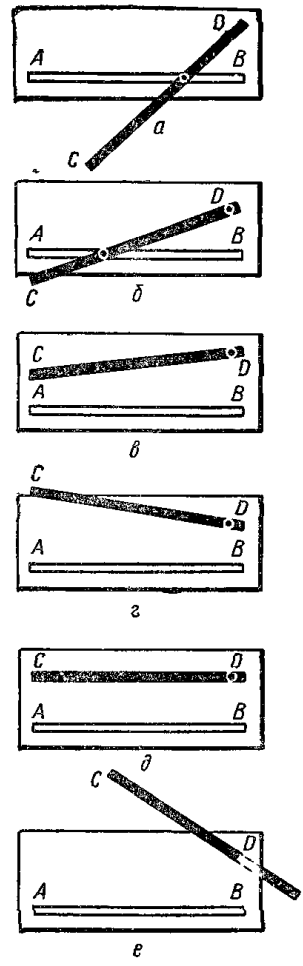


Рис. 19

Можно ли расположить прямые так, чтобы они нигде не пересекались? Из сделанных наблюдений ученики заключают, что такое положение возможно (рис. 19, *д*). Если возможно, то как назвать эти прямые? Они параллельны.

Если остановиться на этом, то будет предложено определение: «две прямые, которые не пересекаются, называются параллельными». Это определение недостаточное. Чтобы показать это, надо вывести одну из прямых (например, CD, рис. 19, *е*) из плоскости, сделав ее скрещивающейся с другой. Можно ли теперь назвать прямые параллельными?

Так как ученики уже имеют представление о параллельных прямых, то они скажут, что эти прямые не параллельны. Повернув CD снова в одну плоскость с прямой AB и придав ей положение, при котором AB и CD не пересекаются, мы делаем ясным необходимость дополнить определение еще одним признаком.

В данном случае ученики интуитивно пришли к выводу, что можно придать двум прямым на плоскости такое положение, при котором они не имеют общей точки. Учитель обращает внимание на то, что это надо доказать, так как мы не можем опытным путем проверить, что прямые нигде не пересекаются. Отсю-

да следует вопрос: можно ли построить такие две прямые? Проведя к какой-либо прямой два перпендикуляра (рис. 20), можно доказать, что они не имеют общей точки. Тогда эта теорема является теоремой существования. Но можно построить две прямые, образующие с третьей равные соответственные углы, и доказать, что такие две прямые не пересекаются. Тогда теоремой существования будет это предложение [1]. При построении прямой, параллельной данной, с помощью угольника и линейки используется этот признак параллельности прямых (рис. 21).

Рассмотрение подвижного наглядного пособия фиксирует внимание учеников на тех признаках понятия, которые будут введены в его определение, оно дает наглядное восприятие нового геометрического образа, чем предупреждает возможность формального восприятия определения. Однако, если каждый ученик сам выполнит заданное построение, сознательность его восприятия будет гораздо выше, чем при простом наблюдении за действиями учителя. Так, в данном случае учитель может подойти к определению не с рассмотрения наглядного пособия, а с самостоятельного выполнения учениками задания: построить на плоскости две прямые, не имеющие общей точки. Учащиеся выполняют одно из построений (рис. 20 или 21) и приходят к

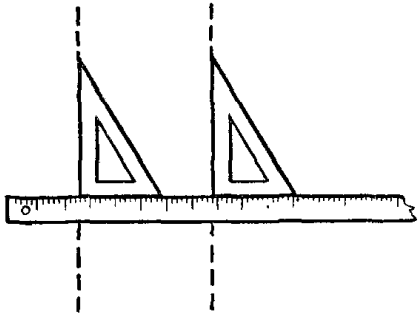


Рис. 20

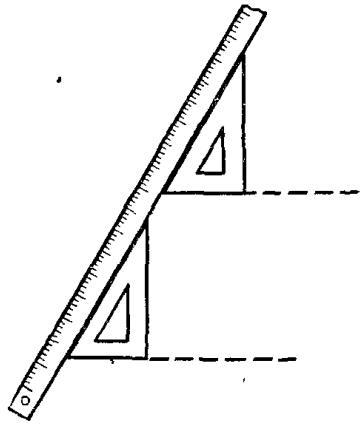


Рис. 21

необходимости доказательства того, что построенные ими прямые действительно не имеют общей точки. Но и при таком подходе нужно показать шестиклассникам скрещивающиеся прямые.

При выборе способа подведения школьников к формулировке нового определения учитель прежде всего должен сам тщатель-

[1] В систематическом курсе стереометрии необходимость доказательства теоремы существования при определении нового понятия может быть отчетливо поставлена перед учащимися.

но продумать, какие признаки будут вноситься в определение, как могут их выявить ученики. Одно и то же понятие может быть определено различно[1].

Для того чтобы учащиеся хорошо знали установленные определения, необходимо, после того как они сформулированы, вести дальнейшую работу по усвоению логической структуры определений. Если ученик, формулируя определение, ошибается, недостаточно его только поправить. Надо, чтобы он понял свою ошибку. Например, чтобы показать ошибочность приведенного выше определения медианы как прямой, делящей сторону треугольника пополам, надо начертить на доске фигуру, показывающую недостаточность признаков (рис. 22). Такие чертежи наглядно выявляют ошибку. Если приучить учащихся внимательно следить за правильностью формулировок, даваемых их товарищами, и привлекать их к выявлению ошибки посредством чертежа, то у учащихся повышается и внимание, и сознательность усвоения, и интерес к таким вопросам.

Труднее показать ученику его ошибку тогда, когда он вносит в определение признаки, принадлежащие данному понятию, но лишние, так как они не являются независимыми, а вытекают из других признаков. В таком случае надо показать эту зависимость.

Так, ученики часто говорят: «Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны».

Так как в определение вносится параллельность сторон (что естественно по самому названию этого вида четырехугольников), то равенство сторон уже можно доказать.

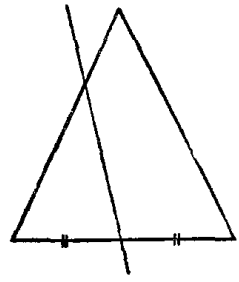


Рис. 22

Надо сказать, что требование независимости признаков не строго соблюдается в школьном курсе. Мы отступаем от независимости признаков, если строгое определение может вызвать у школьников неправильный образ. Например, обычно говорят: «Прямоугольник — это параллелограмм с прямыми углами» или «параллелограмм, у которого все углы прямые», хотя достаточно было бы сказать: «...параллелограмм, у которого один угол прямой». Ученику невольно кажется, что «только» один угол прямой, что вызывает его недоумение.

Даже в учебниках для высшей школы мы встречаем иногда такие «избыточные определения». Например, в курсе элементарной геометрии Д. И. Перепелкина имеется: «Прямые, образующие при пересечении четыре прямых угла, называются взаимно перпендикулярными», хотя достаточно: «прямые, образу-

[1] См. ч. I, § 9.

ющие... прямой угол...», как это и сказано в учебниках Н. А. Глаголева и А. П. Киселева.

Надо, чтобы учащиеся понимали, что такое определение, и не давали в форме определения теорем, устанавливающих свойства уже определенных понятий, например: «Четырехугольник, у которого диагонали делятся взаимно пополам, называется параллелограммом» или «Треугольник, у которого два угла равны, называется равнобедренным».

Чтобы учащиеся помнили определения, надо их повторять при доказательстве теорем или при решении задач, в которых мы пользуемся ими.

Как уже было сказано, не все понятия определяются. Если понятие принимается без определения, потому что оно первоначальное или потому что точное определение понятия мы считаем преждевременным, то надо позаботиться, чтобы ученик связывал с каждым таким понятием определенные конкретные образы. Ниже, в главе IV, §16, мы рассмотрим введение таких понятий, как «точка», «прямая», «плоскость».

2. Классификация понятий[1] тесно связана с их определением, так как обычно эти две операции осуществляются одновременно. Например, проводя классификацию треугольников или четырехугольников, мы при этом даем определение каждому виду. При этом определение дается с указанием рода и видового отличия: «прямоугольник — это параллелограмм...»; «квадрат — это такой прямоугольник...»

Наиболее трудным для учеников является усвоение требования, чтобы деление понятия проводилось по одному определенному признаку (основание деления). Ученик часто просто перечисляет разные видовые понятия, которые он знает. Например, параллелограмм делит на ромбы и прямоугольники, не замечая, что ромб выделяется по признаку равенства смежных сторон, а прямоугольник — по виду углов. Квадрат тогда попадет в оба класса, а косоугольный параллелограмм с неравными смежными сторонами — ни в один.

Усвоение классификации затрудняется тем, что некоторые виды фигур не имеют особого названия и поэтому им приписывают название рода. Так, параллелограмму с прямыми углами дано название — прямоугольник, а параллелограмм с острыми и тупыми углами не имеет особого названия, его просто называют параллелограмм. Отсюда непроизвольное заключение, что только последний — параллелограмм, а первый — прямоугольник.

При изучении классификации тоже может быть использовано подвижное наглядное пособие, позволяющее менять форму геометрического образа.

---

[1] О классификации см. ч. I, § 9.

Например, для выяснения видов треугольника можно пользоваться моделью треугольника из тонких брусков, у которого две стороны (или три) могут менять свою длину (рис. 23). Придавая модели разный вид, устанавливаем, что все это треугольники и что треугольники могут быть различными. Затем мы уже

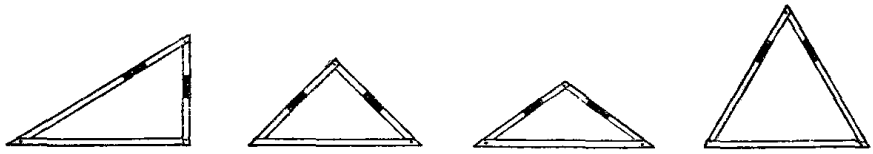


Рис 23

делим понятие треугольника на виды только относительно сторон. Треугольник — разносторонний, все стороны различны (вид углов во внимание не принимается); изменяя длину одной из раздвижных сторон, мы устанавливаем ее так, что две стороны равны; такой треугольник — равнобедренный. Полезно, равномерно изменяя длину обеих сторон, рассмотреть разнообразные виды равнобедренных треугольников. Для этого может быть использовано и такое пособие: боковые стороны модели треугольника сделаны из резинового шнура, который можно растягивать, закрепляя его середину за гвоздик (рис. 24). Все эти треугольники имеют особенность: две стороны у них равны. Таким образом ученики приходят к определению равнобедренного треугольника как треугольника, у которого две стороны равны. Рассматривая виды равнобедренного треугольника, замечаем, что третья сторона может быть равна каждой из боковых. Тогда все три стороны треугольника равны. В этом случае треугольник называется равносторонним. Равносторонний треугольник оказывается частным случаем равнобедренного, то есть равнобедренный треугольник может быть равносторонним, может и не быть им.

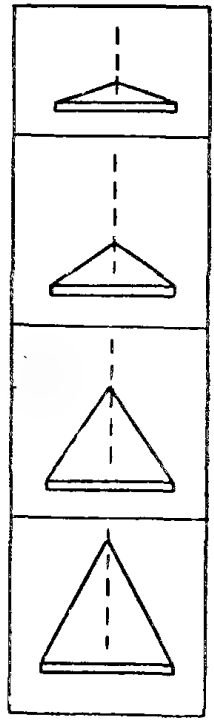


Рис. 24

Следовательно, определение равнобедренного треугольника как треугольника, у которого две стороны равны, а третья не равна им, будет уже неверным, так как оно сужает объем понятия равнобедренного треугольника.

Так же может быть рассмотрена классификация треугольников по углам. Но тогда каждый класс (остроугольный, прямоугольный и тупоугольный) исключает друг друга. На

стр. 619 приведена схема классификации треугольников (рис. 140) в виде таблицы «в два входа», ценной тем, что в ней представлены все возможные виды треугольников.

Если возможно, следует давать классификацию объектов, приступая к изучению новой темы: это сразу вводит дальнейшее изложение в определенную систему. Например, начать тему с классификации четырехугольников или рассмотреть виды углов, связанных с окружностью [1]. Для лучшего усвоения классификации полезно чертить схемы в тетрадях, а также иметь стенные таблицы.

§ 7. Методика обучения доказательству геометрических предложений; введение понятия теоремы, аксиомы

Обучение доказательству теорем нуждается в детальном рассмотрении. Известно, что нередко учащиеся формально заучивают теорему и ее доказательство, не понимая его логического смысла. Дополнительным вопросом учитель может выявить такое непонимание ученика, который как будто правильно доказал теорему. Например, доказывая теорему об углах с соответственно параллельными сторонами, ученик говорит (рис. 25): «Угол *2* равен углу *3*, как углы соответственные при параллельных прямых; угол *1* равен углу *3*, как соответственные при параллельных прямых. Следовательно, угол *2* равен углу *1*». На вопрос учителя: «Почему же угол *2* равен углу *1*?», ученик добавляет: «Как соответственные» — «Разве углы *2* и *1* соответственные?» — «Нет, как углы с соответственно параллельными сторонами».

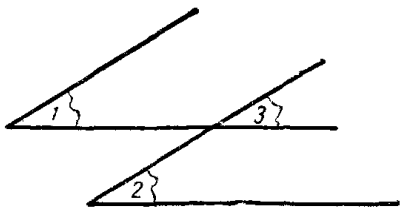


Рис. 25

Формальное заучивание доказательства проявляется и в затруднениях, испытываемых школьниками при изменении расположения чертежа.

Так, например, ученик, правильно доказывающий теорему о сумме углов треугольника, иногда не умеет выполнить дополнительного построения при другой вершине треугольника. Случается даже, что ученика затрудняет изменение обозначений на чертеже.

Ученик иногда запоминает сочетания слов, которые от него часто требуются при обоснованиях, но при проверке можно обнаружить, что он говорит эти слова совершенно механически. Например, говорит: «В треугольниках против равных сторон лежат равные углы», не понимая, что это утверждение применимо

[1] См § 21.

только к равным треугольникам; или «Накрест лежащие углы равны», считая, что это вообще свойство накрест лежащих углов. Иногда можно обнаружить, что ученик, доказавший теорему, не может указать на чертеже те элементы, о которых он говорил при доказательстве.

Подобные недостатки в знаниях учащихся иногда приводят к мнению, что шестиклассники вообще не могут понять логического смысла доказательства. Это мнение опровергается тем, что имеется много школ, в которых школьники не только сознательно излагают доказательство изученных теорем, но и самостоятельно решают задачи на доказательство с приведением правильных обоснований. Очевидно, дело не в учащихся, а в способах обучения. Изучая методы работы передовых учителей, можно выяснить, чем достигается их успех. Ученики формально усваивают материал обычно у тех учителей, которые излагают теоремы догматически. Учитель сообщает формулировку теоремы, сам, может быть очень четко, проводит ее доказательство, которое затем повторяется несколькими учениками с помощью учителя. Если в процессе доказательства педагог и задает детям вопросы, то большей частью эти вопросы касаются формулировок ранее пройденных теорем и определений, но не вскрывают путей к отысканию доказательства, например: «Мы получили внешний угол треугольника ABC, а что вы знаете о внешнем угле?» Учащимся непонятно, почему появилась именно эта теорема, зачем делается то или другое дополнительное построение. В лучшем случае внимание учеников направлено на запоминание хода доказательства, но нет активной работы мысли, а при пассивном восприятии их внимание быстро ослабевает и нить логического рассуждения теряется. Дома учащимся остается «учить» теорему по книге.

Совсем иначе идет работа у тех учителей, которые привлекают школьников к разбору содержания теоремы и к самостоятельным поискам тех логических связей, на которых построено ее доказательство. Такая творческая работа вызывает интерес учащихся и тем самым повышает активность их внимания. Результатом является не пассивное запоминание, а усвоение самого смысла доказательства.

Изучение каждой теоремы дает возможность поставить перед учениками две задачи: 1) выявить некоторые свойства геометрических фигур и 2) логически обосновать необходимость этих свойств Решению этих задач соответствует индуктивный и дедуктивный способ рассуждения.

Существует мнение, что предшествующий доказательству индуктивный вывод препятствует усвоению доказательства, так как ученик, усмотрев некоторое свойство, будет считать излишним его доказывать. В начале обучения геометрии такие случаи неизбежны.

Работа педагога в том и заключается, чтобы постепенно пробудить у школьников стремление логически обосновать правильность своих наблюдений и предположений, пробудить в них интерес к отысканию логического обоснования усматриваемых зависимостей. Опыт показывает, что это вполне достижимо.

Нередко предлагают показывать учащимся так называемые обманы зрения, чтобы убедить их в пользе дедуктивного доказательства. Так, например, на рисунке 26 горизонтальный отрезок кажется короче вертикального, между тем измерение показывает, что отрезки равны. Такие обманы зрения могут заинтересовать учащихся, но они не могут обосновать необходимости доказательства теорем. В этих случаях обычно ученик обращается не к дедуктивному выводу, а к опытной проверке. Исходя из таких примеров, ученик, которому интуитивно ясно, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, может предложить проверить это опытным путем (перегибанием треугольника или измерением углов транспортиром). Смысл доказательства не в том, чтобы проверить, равны ли углы в данном треугольнике, а в том, чтобы обосновать равенство углов при основании во всяком равнобедренном треугольнике, то есть в том, чтобы отыскать логические связи, устанавливающие, что из равенства сторон треугольника необходимо следует равенство противолежащих им углов.

Возможность применения доказанного в теореме свойства геометрической фигуры к разрешению частной практической задачи убеждает учащихся в ценности общего вывода, например, возможность определить недоступные расстояния при помощи признака равенства треугольников [1].

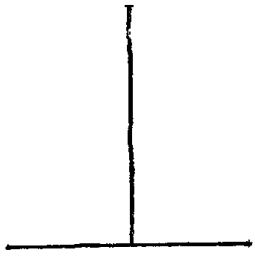


Рис. 26

При изучении с учащимися теоремы учитель ставит следующие цели:

1) усвоение самого геометрического факта, о котором говорится в теореме;

2) усвоение формулировки теоремы;

3) понимание доказательства теоремы;

4) умение изложить доказательство и оформить его устно и письменно.

Но и это еще не все. Изученная теорема должна войти в сознание ученика как некоторое средство дальнейшего познания геометрических зависимостей, то есть ученик должен уметь применить изученную теорему к доказательству других теорем и к решению задач. В результате работы над доказательством надо достигнуть не только знания ряда теорем и умения воспроизводить их доказательства, но и умения самостоятельно найти доказательство несложной теоремы.

[1] См. § 11, стр. 557.

Часто можно встретить ученика, осознавшего факт, утверждаемый теоремой, но не умеющего дать отчетливую формулировку, или ученика, знающего словесную формулировку, но плохо представляющего содержание теоремы. Для сознательного усвоения надо, чтобы учащиеся переходили к формулировке после того, как они поймут, что именно в ней выражено

Первый этап в изучении теоремы можно назвать индуктивным восприятием ее содержания. Оно может осуществляться различными путями: 1) рассмотрением наглядных подвижных пособий или ряда чертежей; 2) выполнением построений; 3) проведением измерений; 4) решением задач на вычисление; 5) решением задач на отыскание некоторых зависимостей.

Рассмотрим примеры различных способов усвоения смысла теоремы.

1) *Применение наглядного пособия.* Например, необходимо установить соотношение между сторонами и углами треугольника, то есть теорему: *если в треугольнике две стороны не равны, то и углы, лежащие против этих сторон, не равны и против большей стороны лежит и больший угол.* Это свойство ясно видно на единичном чертеже, но чертеж не выявляет связи между условием и заключением, этих «если» и «то», составляющих суть теоремы.

Свойство углов при основании равнобедренного треугольника известно. Преподаватель начинает с рассмотрения модели равнобедренного треугольника (рис. 27). В нем против равных сторон лежат равные углы. На модели можно изменять длину одной из боковых сторон, которую следует отметить другим цветом (например, красным). Преподаватель постепенно раздвигает красную сторону, увеличивая ее длину, и предлагает ученикам наблюдать за углами. Они видят, что боковые стороны становятся неравными и вместе с этим делаются неравными и углы, лежащие против них; красная сторона стала больше белой и угол, лежащий против большей стороны, стал больше угла, лежащего против другой стороны. Необходимость этой связи ясно чувствуется учащимися; условие и заключение теоремы легко выделяются. Остается логически вывести то, что заключение следует из условия.

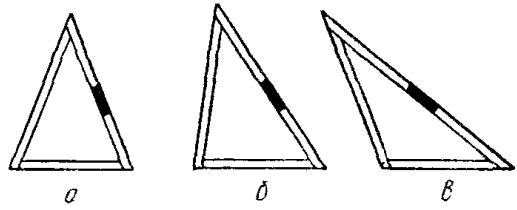


Рис. 27

Подобным способом могут быть установлены многие геометрические соотношения. Так, для выявления зависимости между равенством соответственных углов, образованных при пересечении двух прямых третьей, и параллельностью прямых рас-

сматривается наглядное пособие (рис. 28). Рейка, изображающая одну из прямых линий, вращается вокруг точки пересечения с секущей. При данном расположении прямых — соответственные углы *1* и *2* явно не равны. Угол *2* больше угла *1*. Чтобы уменьшить угол *2*, надо повернуть прямую *AB;* сделаем угол *2* равным углу *1*. Какое же положение заняли прямые?

Так же могут быть подмечены свойства биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника (рис. 29), свойства диагоналей ромба (рис. 30, 31) и др.

Основным преимуществом таких пособий моделей является их подвижность, позволяющая выявлять зависимости между элементами геометрических фигур, а также наблюдать устойчивость какого-либо свойства при изменении вида фигуры. Например, имея параллелограмм с неравными смежными сторонами и изменяя его вид, мы наблюдаем за изменением углов между диагоналями (рис. 30); когда смежные стороны сделались равными, диагонали стали взаимно перпендикулярными. С другой стороны, мы можем изменять вид ромба; при изменении его

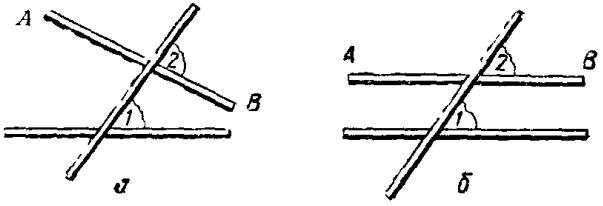


Рис. 28

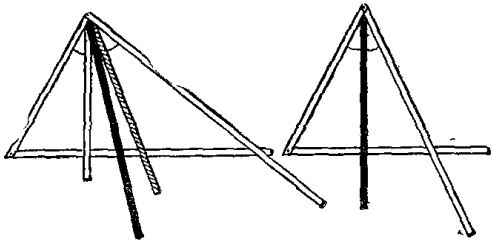


Рис. 29

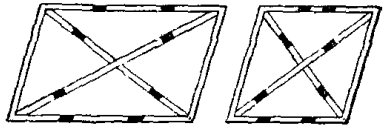


Рис. 30

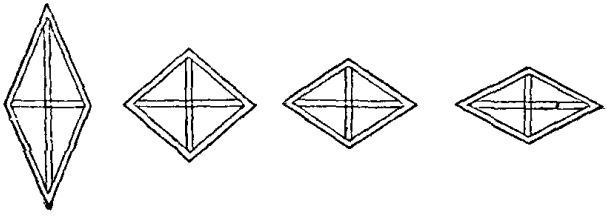


Рис. 31

углов взаимная перпендикулярность диагоналей сохраняется (рис. 31). Остается доказать, что это свойство логически вытекает из равенства смежных сторон.

Применение подвижного пособия на уроке интересует учащихся 12—13 лет, создает запоминающийся образ. Но было бы неправильно думать, что такое использование пособий есть только занимательная игра; цель их применения гораздо серьезнее: на них школьники учатся выявлять геометрические свойства фигур, выделять общее и существенное. Надо, чтобы у учеников выработался критический подход к своим наблюдениям и стремление проверить правильность своих заключений.

Подвижное наглядное пособие может быть заменено рядом последовательных чертежей.

2) *Выполнение построений.* Той же цели — выявлению свойств фигур — могут служить геометрические построения, выполняемые учениками по заданию педагога. Этот прием имеет преимущество перед рассмотрением наглядных пособий или готовых плакатов, заключающееся в большей активности и самостоятельности ученика. Полезен и процесс выполнения чертежа, дающий учащимся практические навыки. Но такой прием требует большей затраты времени.

В некоторых случаях предварительное выполнение чертежей может быть задано на дом. Примером чертежей, используемых для уяснения содержания теоремы, могут быть чертежи, приведенные выше при иллюстрации применения наглядных пособий. Приведем некоторые конкретные задания.

I. (VI класс) перед теоремой о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.

Построить три треугольника по данным сторонам и провести в каждом биссектрису, медиану и высоту к основанию (основания треугольников обозначаем a_1, a_2, a_3; боковые стороны — соответственно буквами b и c).

1-й треугольник	2-й треугольник	3-й треугольник
$a_1=5$ *см*;	$a_2=5$ *см*;	$a_3=5$ *см*;
$b_1=4{,}5$ *см*;	$b_2=4{,}5$ *см*;	$b_3=4{,}5$ *см*;
$c_1=3$ *см*.	$c_2=4$ *см*.	$c_3=4{,}5$ *см*.

Построение заставляет учеников увидеть, что в 3-м треугольнике (равнобедренном) биссектриса, медиана и высота, проведенные из вершины его, слились. Можно затем предложить каждому ученику начертить равнобедренные треугольники разного вида и провести в них эти три линии [1].

[1] В VI классе эти построения проводятся не по правилам решения задач на построение при помощи циркуля и линейки, а с использованием любых инструментов (см гл. III, § 14).

II. (VII класс) перед теоремами о признаках параллелограмма.

Начертить две параллельные прямые, взяв на одной из них произвольный отрезок AB, отложить от любой точки второй прямой (в том же направлении) отрезок $MN=AB$ и соединить отрезками точку A с точкой M и точку B с точкой N. Какого вида получился четырехугольник $MABN$? Повторить построение несколько раз, меняя положение точки M (рис. 32). Эта работа может быть выполнена в классе.

Учащиеся приходят к убеждению, что параллельность и равенство двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника является достаточным условием, чтобы четырехугольник был параллелограммом. Семиклассникам можно предложить самостоятельно доказать это предложение [1].

3) *Проведение измерений*, то есть применение опыта для усмотрения содержания теоремы. В этом случае опыт является исходным моментом для выявления возможной зависимости или свойства.

Например, если перед доказательством теоремы о сумме углов треугольника каждый ученик найдет сумму углов какого-либо треугольника путем измерения углов транспортиром, то результаты получатся различные, но близкие к 180°. Эти расхождения в ответах показывают, что ввиду несовершенства наших измерительных приборов и неточности чертежей опыт не дает точного ответа на поставленный вопрос; мы видим только, что сумма углов в рассмотренных треугольниках колеблется около 180°. А логические рассуждения позволяют, исходя из установленных ранее предложений, обоснованно утверждать, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам В таком случае предварительно проведенный опыт повышает интерес к доказательству.

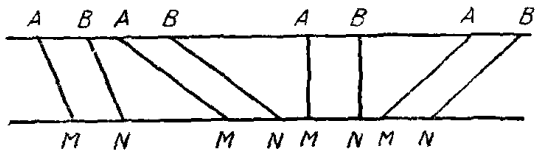


Рис. 32

Так же можно предложить сравнить по величине среднюю линию треугольника с его основанием (измерением или построением) или определить, на какие части делятся медианы треугольника точкой их пересечения.

Эти опыты, неизбежно несовершенные, будут создавать интерес к проверке их результатов логическими доказательствами.

4) *Решение задач на вычисление.* Задачи на вычисление могут предварять теорему, выявлять новые зависимости. На-

[1] На стр. 616, § 17, рассмотрено применение построения для выявления признаков равенства треугольников.

пример, до того как рассмотреть свойство вертикальных углов, можно предложить задачу: определить величину каждого из двух вертикальных углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если задана величина третьего угла.

Пользуясь уже известным свойством смежных углов, учащиеся, вычитая из 180° данный угол, находят, что вертикальные углы равны. При решении задачи получается определенный ответ. Например, если данный угол равен 130°, то каждый из определяемых углов равен 50°. Но так же будет проведено рассуждение, если данный угол будет содержать 70° или 110° или вообще любое число градусов. Ученик поймет, что он обнаружил общее свойство вертикальных углов. Ход решения задачи определяет и порядок рассуждения при доказательстве теоремы.

В VII классе в теме «Измерение углов» уже можно предложить определить величину угла по некоторым данным, до того как пройдена теорема об измерении углов этого вида. Как и в приведенном выше примере, решение задачи заставит вскрыть общие соотношения. Например, дается задача:

«Вписанный угол ABC, одна из сторон которого AB проходит через центр круга, опирается на дугу в 70°. Определить величину угла» (рис. 33).

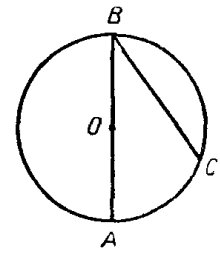


Рис. 33

Решая задачу, ученик не может использовать готовую зависимость между числом градусов угла и данной дуги. Он может рассуждать таким образом.

Зная число градусов дуги, можно определить число градусов центрального угла, опирающегося на эту дугу. Построим этот угол, то есть соединим центр с точкой C. Теперь остается найти соотношение между углом AOC и углом ABC; обнаружив, что треугольник OBC равнобедренный и что угол AOC — внешний угол этого треугольника, ученик находит требуемое соотношение и определяет величину угла ABC. Как и в предыдущем примере, совершенно очевидно, что рассуждения имеют общий характер и не зависят от числа градусов данной дуги.

Учащиеся самостоятельно приходят к формулировке теоремы и ее доказательству.

После доказательства теоремы об измерении вписанного угла, стороной которого является диаметр, можно до рассмотрения других случаев измерения вписанных углов дать задачу:

«Из точки окружности проведены две хорды: одна хорда стягивает дугу в 130°, другая — дугу в 80°. Определить величину вписанного угла, образованного этими хордами».

Делая чертеж к задаче, мы получаем два случая расположения данных хорд (рис. 34, *а* и *б*).

Решение задачи приводит к доказательству всех теорем об

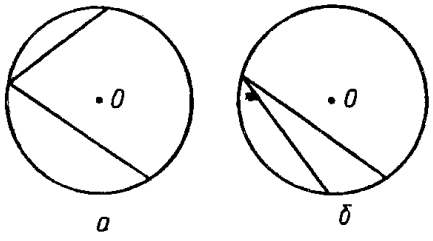


Рис. 34

измерении вписанного угла.

Разбор предварительной задачи показывает практическую необходимость теоремы об измерении вписанных углов. Рассуждение легче проводить при решении задачи с частными данными, чем в общем виде.

Решение таких задач в большей мере способствует развитию математического мышления и сообразительности учащихся, чем решение задач, которые требуют только подстановки данных в готовые формулы.

5) *Решение задач на отыскание зависимостей.* Этот путь отыскания новой теоремы является уже применением дедукции для открытия новой зависимости; переходом к нему является решение задач на вычисление, в которых тоже используется общее рассуждение, но для частных случаев. Так, например, в VII классе перед теоремой об измерении вписанных углов вместо рассмотренной выше задачи можно сформулировать задачу так: «Определить зависимость между величиной вписанного угла, стороной которого является диаметр круга, и величиной центрального угла, опирающегося на ту же дугу».

Дедуктивным путем учащиеся могут вывести самостоятельно многие следствия из теорем, например: определить, чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника (VI класс); определить величину угла, опирающегося на диаметр (VII класс); самостоятельно, не прибегая к измерению, найти сумму внутренних углов любого четырехугольника (VII класс). В VIII классе может быть найдено выражение стороны правильного вписанного многоугольника через радиус круга, выведена формула площади правильного многоугольника и др.

Все рассмотренные приемы знакомства с новой теоремой направлены к одной цели — привлечению самих учащихся к ее «отысканию». Польза от таких уроков несомненна. Живой интерес к геометрии, развитие наблюдательности, лучшее усвоение геометрических форм и соотношений являются их результатом.

Нами были приведены примеры рассмотрения отдельных теорем, но в преподавании теорема должна выступать не изолированно, а в общей связи с изучаемой темой. Только в том случае, когда теоремы следуют в определенной системе, в результате планомерного рассмотрения какого-либо раздела программы, ученики легко устанавливают связи между ними и воспринимают курс геометрии как единое целое. Учитель должен использовать каждую тему, в которой естественно выявляются эти связи.

Примеры такого рассмотрения материала приведены нами в главе IV.

Формулировка теоремы.

В результате усвоения содержания теоремы должна быть дана ее формулировка. Если ученики активно участвовали в выяснении тех зависимостей, о которых говорится в теореме, то вполне возможно, что они сами сформулируют теорему. Учителю в этом случае остается только уточнить ее формулировку. Однако не надо добиваться от школьников, чтобы они сформулировали самостоятельно каждую теорему. Иногда ученики, понимая смысл теоремы, не могут самостоятельно выразить его словесно. Тогда учителю лучше, не задавая дополнительных вопросов, самому дать точную формулировку, понимание которой должно быть подготовлено всей предыдущей работой.

Самое главное — это научить различать условие и заключение теоремы. Известно, что иногда ученик, правильно сформулировавший теорему, при доказательстве ее ссылается на то, что надо доказать. Не надо усложнять понимания состава теоремы, давая ученикам общую формулировку для нескольких теорем, имеющих одинаковые заключения или одинаковые условия, как это иногда делается в учебниках [1].

Например, перечисляются различные признаки параллельности прямых и дается одно заключение или говорится: «Если 2 прямые параллельны, то...» и затем перечисляются свойства различных пар углов, образованных при пересечении прямых секущей. Лучше четко выделить условие и заключение каждой теоремы. Потом, когда ученикам станет ясна каждая теорема, полезно предложить им самим обобщить пройденное, например перечислить, какие мы знаем признаки параллельности прямых.

Слова «если» и «то» помогают разделить две части теоремы. Поэтому полезно предлагать учащимся сформулировать в виде условных предложений такие теоремы, как «Вертикальные углы равны», «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны», «Диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам» и т. п.

Понятие о теореме, обратной данной.

Не вполне ясное выделение в теореме условия и заключения приводит к тому, что ученики часто смешивают прямую и обратную теоремы. Поэтому некоторые учителя рассмотрение обратной теоремы откладывают на более позднее время.

Действительно, нельзя, давая первое понятие о теореме, перегружать учащихся введением понятия об обратной теореме, но не следует долго избегать этого понятия, так как только отчетливое различение взаимно обратных теорем помогает ученику разобраться в составе теоремы и усвоить логическую зависимость

[1] См. [248], §§ 73, 77; [227] §§ 35, 37, 40.

между условием и заключением. Откладывая рассмотрение этого вопроса, учитель проходит мимо тех неясностей, которые существуют в сознании учащихся. Нужно длительно и планомерно работать над преодолением логических трудностей, а не избегать их.

Выясним, в чем основные заблуждения ученика: 1) ему кажется, что прямая и обратная теоремы выражают одну и ту же мысль и 2) если он различает содержание каждой теоремы, то убежден, что справедливость одной влечет за собой справедливость другой

Содержание первых теорем геометрии очень просто. Ученик легко усматривает одновременно два факта, а то, что один из этих фактов выделяется как данное, другой, как доказываемое, он воспринимает формально. Например, шестиклассник видит, что треугольник равнобедренный и что в этом треугольнике углы при основании равны. Ему безразлично, что сказать: «Против равных сторон лежат равные углы» или «Против равных углов лежат равные стороны». Доказательство первого предложения ему кажется доказывающим и второе. Нередко в дальнейшем при доказательстве теоремы ученик говорит: «В этом треугольнике два угла равны, следовательно, этот треугольник равнобедренный, так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Для того чтобы ученики поняли, что прямая и обратная теоремы выражают различные зависимости, надо дать ряд примеров, когда перестановка условия и заключения приводит к ошибочному утверждению.

Чтобы пояснить образование обратной теоремы, следует провести такую работу: разделить доску пополам, на одной стороне записать условие и заключение какой-либо теоремы и предложить составить новую теорему, сделав заключение данной теоремы ее условием, а условие — заключением; новую теорему записать в другом столбце Получается запись:

	Прямая теорема.	Обратная теорема.
Условие:	*Если* в треугольнике две стороны равны,	*Если* в треугольнике два угла равны,
Заключение:	*то* углы, лежащие против этих сторон, равны.	*то* стороны, лежащие против этих углов, равны.

Большинству учащихся кажется, что обе записи выражают одну и ту же мысль.

Тогда надо предложить учащимся ряд упражнений на образование обратных теорем.

Например, составить для каждой из данных теорем обратную.

1) Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

2) Если число оканчивается двумя нулями, то оно делится на 4.

3) Если каждое из двух слагаемых делится на 7, то и сумма делится на 7.

4) Если в одном и том же круге центральные углы равны, то и соответственные им дуги равны.

5) Если два угла вертикальные, то они равны, и т. п.

Ученик, составляя обратную теорему, должен сказать, верна ли она. Такие чисто логические упражнения вызывают живой интерес. В упражнения полезно ввести и жизненные примеры. Образовать обратное предложение к следующему: если ученик болен, то он пропускает уроки.

К подобным упражнениям надо затем снова возвращаться, чтобы ученики полностью понимали зависимость между прямой и обратной теоремами. В дальнейшем учитель при доказательстве с учениками теорем или при решении задач тщательно следит за правильностью их ссылок на прямую или обратную теорему. С неправильными ссылками встречаешься и в старших классах школы. Небрежность мысли ученика вызывается отчасти недостаточным вниманием к этим вопросам учителей. Например, сразу после изучения признаков параллельности прямых учащимся предлагается задача:

«При пересечении двух прямых третьей один из углов равен 30°, а соответственный ему равен 35°. Параллельны ли прямые?» Ученик отвечает, что прямые не параллельны, так как это ему очевидно. На вопрос «почему?» он дает ответ: «Потому что прямые параллельны, если соответственные углы равны» (это вывода не обосновывает) или «Если бы прямые были параллельны, то углы были бы равны» (это утверждение является недоказанной обратной теоремой). Учитель зачастую удовлетворяется таким ответом, считая его «правильным». Эта задача была предложена преждевременно, так как она толкала учеников на ошибочное обоснование правильного ответа. После тщательного рассмотрения прямой и обратной теорем следует показать, как с их помощью можно обосновать решение подобных задач.

Построение правильной обратной теоремы путем расчленения условия можно объяснить учащимся на ряде теорем только тогда, когда они получат некоторое логическое развитие. Что это не так просто, видно из ошибки при формулировке теоремы, обратной теореме о смежных углах, имеющейся в учебнике А. П. Киселева (§ 27, 3). Там сказано: «Если два угла (AOB и BOC) имеют общую вершину (O) и общую сторону (OB) и в сумме составляют 2 d, то их две другие стороны (AO и OC)

составляют продолжение одна другой (то есть такие углы будут смежные)».

Ошибочность формулировки остается незамеченной, так как в ней есть ссылка на чертеж, изображающий частный случай расположения. На рисунке 35 выполнены все условия формулировки, однако стороны AO и OC не составляют продолжения одна другой. Ошибка в том, что в условии теоремы не сказано, что углы AOB и BOC не покрывают друг друга (условие «общая вершина» излишне, так как оно содержится в условии «общая сторона»).

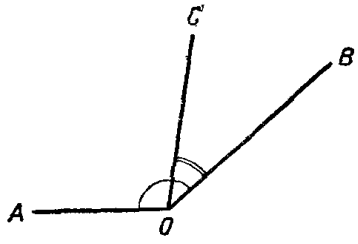


Рис. 35

Рассмотрим правильное образование обратной теоремы.

Прямая теорема: *Если углы смежные, то они в сумме равны 2d.*

Если переставить условие и заключение (полностью), обратная теорема неверна.

Расчленяем понятие «смежные углы»: это углы прилежащие (то есть имеющие общую сторону и не покрывающие друг друга), несовпадающие стороны которых составляют одну прямую.

Таким образом, в условии прямой теоремы имеются два данных.

	Прямая теорема	Обратная теорема
Условие:	1) $\angle AOB$ и BOC прилежащие. 2) AO и OC — одна прямая.	1) $\angle AOB$ и $\angle BOC$ прилежащие. 2) $\angle AOB+\angle BOC=2d$.
Заключение:	$\angle AOB+\angle BOC=2d$.	AO и OC — одна прямая

Составляя обратную теорему, мы обмениваем заключение прямой теоремы с одним из данных ее условия (2), сохраняя в условии данное (1).

Формулировка обратной теоремы: *Если два прилежащие угла в сумме равны 2d, то они смежные.*

Можно составить и другую обратную теорему, обменяв заключение прямой теоремы с первым данным условия и сохранив второе данное [1].

Более глубоко рассмотреть образование обратных теорем можно в VII классе при разборе признаков параллелограмма, а также в разделе «Окружность». Теорем, обратных теореме о диаметре, перпендикулярном хорде, можно образовать несколько. Одна из них дает возможность обосновать способ отыскания центра круга [2].

[1] Рекомендуем кн [17].

[2] См. § 21.

Понятие о теореме, противоположной данной, и образование таких теорем может быть дано только тогда, когда будет изучаться соответствующий геометрический материал. Так, можно рассмотреть предложения, противоположные признакам параллельности прямых. Во всяком случае, если доказывается теорема, противоположная данной, надо рассмотреть ее структуру. В VI классе рассматриваются некоторые конкретные геометрические места (биссектриса угла, перпендикуляр, проведенный к отрезку через его середину). Поэтому появляется необходимость ввести или обратные, или противоположные теоремы. В учебнике Н. Н. Никитина дано доказательство противоположных теорем [1]. Но прежде чем давать их доказательства, надо предварительно показать, как образована теорема, и сформулировать ее.

Полезно познакомить учеников с *понятиями необходимого и достаточного условия.* Чтобы научить их правильно применять эти понятия, учитель должен употреблять такие термины не только на уроках геометрии, но и на уроках алгебры и арифметики. Ученик должен понимать: то, что число оканчивается цифрой 5, является достаточным условием делимости числа на 5, но не необходимым; равенство диагоналей является необходимым признаком квадрата, но не достаточным. Не надо думать, что такие вопросы можно раз и навсегда «объяснить» учащимся. Только постоянное внимание к ним учителя, его правильная математическая речь и упражнение учащихся на доступных их пониманию не только математических, но и жизненных примерах постепенно воспитывают математическую культуру. Например, можно сказать: «Для перевода в следующий класс необходима удовлетворительная оценка по математике». Является ли это условие достаточным?

Работа по усвоению доказательства теоремы.

Доказательство теорем излагается в учебниках *синтетически.* Такое изложение кратко и последовательно передает цепь умозаключений, приводящих от данного условия к тому, что требуется доказать, но оно не вскрывает причины, почему выбран именно этот путь, не показывает, какие соображения привели к его отысканию. Если учитель таким же способом проводит доказательство в классе, то ученик, не видя целесообразности в каждом следующем звене доказательства, может только пассивно следить за ходом рассуждений. В лучшем случае он понимает правильность каждого умозаключения, но его значение для достижения результата остается скрытым.

Только тщательно проведенный анализ вскрывает значение каждого звена в цепи умозаключений, объясняет ученику, как найдено доказательство, и дает возможность принять участие в его отыскании.

---

[1] См. [258]. § 27, 4), 32, 3).

Чтобы выяснить эти положения, рассмотрим процесс усвоения доказательства при синтетическом и аналитическом его проведении на конкретном примере теоремы о средней линии трапеции.

Формулировка теоремы: *Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.* В этой формулировке два заключения.

Рассмотрим доказательство теоремы, имеющей первое заключение.

При каждом способе проведения доказательства предварительно делается чертеж и записывается, что дано и что требуется доказать (рис. 36, *а*).

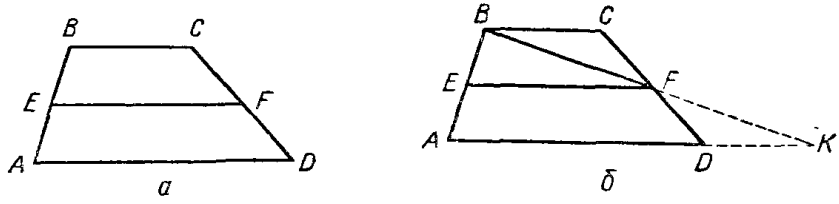


Рис. 36

Дано: $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$), $AE=EB$; $DF=FC$.

Требуется доказать: $EF \parallel AD$.

Если доказательство ведется *синтетически*, то преподаватель начинает с выполнения дополнительного построения:

«Проведем через точки B и F прямую до пересечения с продолжением основания AD (в точке K) (рис. 36, *б*)».

Затем рассматриваются треугольники BCF и DFK. $CF=FD$ (по условию); $\angle BFC=\angle DFK$ (как вертикальные) и $\angle BCF=\angle FDK$ (как углы накрест лежащие при $BC \parallel AK$ и секущей CD).

Следовательно, $\triangle BCF=\triangle DFK$, откуда следует, что $BF=FK$ и т. д.

Не будем продолжать доказательства, а рассмотрим, как могут его усваивать учащиеся.

1) Проведение весьма сложного дополнительного построения ничем не обосновано. Цели его ученик не знает, значит, он может только стараться его запомнить. Если бы учитель вместо этого построения сказал: «Опустим перпендикуляр из точки C на $AД$ и соединим его основание с точкой B», ученики так же пассивно восприняли бы это построение.

2) Затем доказывается равенство треугольников BCF и DFK. Ученики могут понять, что эти треугольники равны, но зачем надо доказывать их равенство, опять остается невыясненным; ведь надо доказать параллельность EF и AD, и никакой связи с этим требуемым результатом ученик не видит. Ему остается и дальше пассивно следить за доказательством, пока в конце его он не

убедится, что доказанным оказалось именно то, что требовалось. Почему этот путь привел к результату, для большинства учащихся остается непонятным. Ученики при таком проведении доказательства не могут научиться отыскивать его самостоятельно.

Рассмотрим теперь ход рассуждения, проводимого *аналитически*. Прежде всего, как показать цель дополнительного построения, исходя из того, что требуется доказать? Нам надо доказать параллельность средней линии EF основаниям трапеции, для чего достаточно доказать, что она параллельна одному из оснований, хотя бы AD. Чтобы это доказать, мы можем воспользоваться уже известными теоремами. Нам известно, что средняя линия треугольника параллельна его основанию. Нельзя ли построить такой треугольник, для которого EF была бы средней линией, а AD было бы основанием или частью основания? Чтобы построить такой треугольник, естественно принять за его боковую сторону одну из боковых сторон трапеции, например AB (так как точка E тогда будет серединой одной стороны треугольника). За вершину треугольника принимаем точку B; точка F должна лежать на второй стороне треугольника; поэтому, чтобы получить эту сторону, проводим прямую через точки B и F до пересечения с продолжением AD. Так получается треугольник ABK, построение которого и было целью дополнительного построения. Но является ли EF средней линией этого треугольника, еще неизвестно. Надо доказать, что точка F является серединой стороны BK, то есть надо доказать равенство отрезков BF и FK. Следующее звено вытекает из необходимости доказать равенство отрезков. Для этого обычно пользуются равенством треугольников, в которых эти отрезки являются соответственными сторонами. Нет ли таких треугольников? Естественно приходим к рассматриванию треугольников BCF и FDK (отрезок BF входит также в треугольник EBF, но легко усмотреть невозможность доказательства равенства треугольников EBF и FDK). Итак, требуется доказать равенство треугольников BCF и FDK. Для этого надо отыскать в них соответственно равные элементы, удовлетворяющие какому-нибудь признаку равенства треугольников. Эти элементы легко обнаружить: $CF=FD$; $\angle BFC=\angle DFK$ и $\angle BCF=\angle FDK$, как указано выше. На этом анализ закончен. Теперь ясно, что, доказав равенство треугольников, мы доказываем равенство отрезков BF и FK, то есть что EF—средняя линия треугольника ABK, откуда вытекает утверждение, что $EF \| AK$, что и требовалось доказать.

Доказательство повторяется синтетически, но теперь оно стало вполне понятным.

Для последующего воспроизведения теоремы ученик не будет пользоваться одним механическим запоминанием последовательности предложений, так как у него останется в памяти основной логический стержень доказательства, его суть.

Другим преимуществом применения анализа является возможность привлечения ученика к «открытию» доказательства. Понимая цель, он сознательно ищет пути к ее достижению.

Учитель легко может привлечь учащихся к творческой работе, умело задавая вопросы. В таком случае могут возникнуть различные варианты, приводящие к той же цели. Например, в рассматриваемой нами теореме учитель может поставить вопрос, как построить треугольник, для которого средней линией была бы средняя линия трапеции, а одно из оснований трапеции было бы частью его основания. Поиски ответа на этот вопрос чрезвычайно полезны, так как развивают пространственное воображение школьников (рис. 37, *1, 2, 3, 4*). Могут быть даны четыре

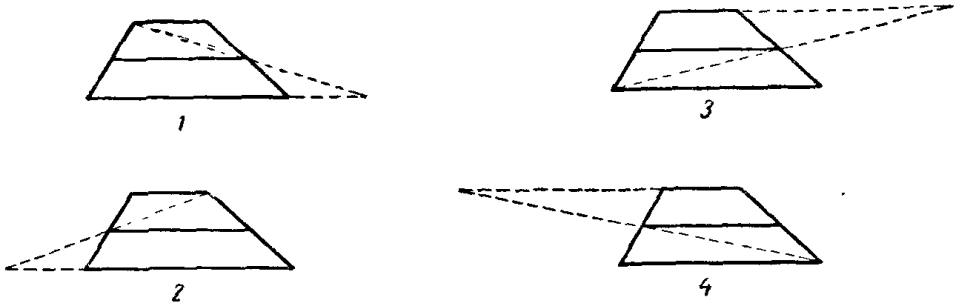


Рис. 37

правильных предложения (конечно, возможны и неверные). Учитель выбирает один из рассмотренных вариантов и предлагает ученикам дома доказать теорему при ином расположении чертежа. Если такая работа проводится при доказательстве теорем, учащиеся не будут связаны чертежом учебника и не будут стремиться воспроизвести его по памяти.

Обнаружив дальше необходимость доказательства того, что EF есть средняя линия треугольника, учитель может получить от учеников ответ на вопрос, что для этого надо доказать, а также предложения, как осуществить доказательство.

Остановимся на широко распространенном недоразумении, происходящем от смешения способа (метода) проведения рассуждения и способа (метода) ведения урока. Иногда считают, что если учитель сам доказывает теорему, то доказательство ведется синтетическим путем; если же учитель ведет беседу с учащимися, задавая им вопросы, то он проводит анализ.

Форма ведения урока может быть выбрана учителем независимо от того, каким методом проводится рассуждение. Действительно, в подавляющем большинстве случаев учителя, сами излагающие доказательства теоремы, проводят его синтетиче-

ски, но это совсем не обязательно; учитель может сам отчетливо провести анализ, вскрыв этим перед учениками цель выбранного им пути.

С другой стороны, учитель, ведущий доказательство теоремы вопросно-ответным методом, может вести все рассуждение синтетическим путем. В таком случае при внешней активности учащихся и при правильных ответах их на вопросы учителя восприятие учениками доказательства будет пассивным.

От этой внешней активности надо решительно предостеречь начинающих учителей. Задавание ряда вопросов, целевая установка которых не ясна, не только не содействует усвоению смысла, но даже отвлекает учеников от восприятия доказательства. Они могут совсем потерять основную нить доказательства, что иногда и наблюдается на уроках. В этом случае педагогу лучше было бы связно изложить все доказательства самому.

Например, при доказательстве рассматриваемой теоремы учитель может задать такие вопросы: каковы углы BFC и DFK? Какие углы называются вертикальными? Что мы знаем о вертикальных углах? Аналогичные вопросы могут быть заданы об углах BCF и FDK, о признаках равенства треугольников и т. п. Беседа превращается в опрос учащихся по поводу теоремы, и они повторяют пройденное, но не усваивают доказательства. Это не значит, что изучение новой теоремы не должно быть связано с повторением. Наоборот, повторение необходимо, но оно не должно нарушать хода рассуждения доказательства.

В заключение подведем некоторые итоги. Мы показали, что для усвоения смысла доказательства теоремы лучшим путем является применение анализа. При этом лучшие результаты достигаются, если учитель привлекает учеников к отысканию путей доказательства теоремы. Однако такой анализ должен найти завершение в связном изложении всего доказательства теоремы синтетическим путем. Вначале сам учитель должен дать образец такого изложения доказательства, потом это с успехом будут выполнять ученики.

При рассмотрении доказательства многих теорем предварительный анализ ограничивается выбором основной линии доказательства, для чего надо выявить исходный момент Так, например, для доказательства теоремы о свойствах диагоналей параллелограмма, а также особого свойства диагоналей прямоугольника достаточно установить равенство некоторых отрезков, для чего надо правильно выбрать соответственную пару треугольников. На уроке следует рассмотреть различные способы выбора этих треугольников, предложенные учащимися. А для выбора способа доказательства теоремы об измерении угла, образованного хордой и касательной, ставим задачу построить в том же круге угол, измерение которого известно, так, чтобы он

опирался на дугу, заключенную между сторонами данного угла, или на дугу, ей равную, и затем выяснить соотношение между построенным и данным углом. Возможно различное решение этой задачи (можно построить и вписанный и центральный угол), что приводит к различным способам доказательства теоремы.

В учебниках геометрии доказательства теорем излагаются синтетическим путем, поэтому при подготовке к уроку учитель должен глубоко вдуматься в доказательство теоремы, подготовиться к проведению анализа, наметить те вопросы, которые он задаст учащимся. Не надо думать, что они непременно сами должны открыть весь путь доказательства теоремы. Иногда для них это непосильно, и настойчивые вопросы учителя, не достигая цели, только заставляют учащихся «угадывать» или подсматривать в книгу. Например, ученики не могут догадаться, как провести сложное дополнительное построение в теореме о внешнем угле треугольника, или придумать, что третий случай равенства треугольника доказывается приложением, если предыдущие случаи доказывались наложением. В таких случаях учитель должен сам четко показать способ доказательства, пояснив его целесообразность.

Иногда несколько теорем доказывается аналогично. Это помогает ученикам после тщательного выяснения логической сущности доказательства первой теоремы, сделанного под руководством учителя, сознательно отыскивать путь доказательства следующей теоремы. Такую возможность дают, например, теоремы о признаках подобия треугольников.

Большую помощь в усвоении доказательства теорем может оказать предварительное решение соответственно подобранных устных задач на доказательство [1]. В эти задачи надо включить некоторые звенья последующей теоремы, вызывающие затруднения учащихся. Так, если доказывается теорема о внешнем угле треугольника, предварительно может быть доказана задача на готовом чертеже-плакате (рис. 38). Ее решение не затруднит учащихся. Когда затем при доказательстве теоремы будет выполнено дополнительное построение, ученики осознают его целесообразность и дальнейший ход доказательства [2].

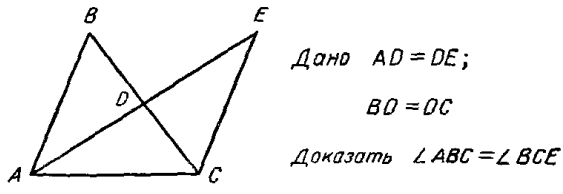


Рис. 38

[1] См. § 11.
[2] См. «Математика в школе», 1958 г., № 6, статья И. С. Соминского.

Оформление доказательства.

Следует ли учащимся вести запись доказательства теоремы? Педагоги на этот вопрос отвечают различно. Некоторые учителя считают, что запись доказательства только отнимает время и отвлекает внимание учеников; доказательство на уроке они проводят устно (с краткой записью на доске), а дома — ученики изучают теорему по книге. Другие учителя требуют подробной записи теоремы даже с записью всех обоснований словами; большая часть такого урока тратится на запись. В этом случае ученики обычно книгой не пользуются и учат теорему по своим записям.

Наиболее правильной является краткая схематическая запись доказательства при помощи обозначений и математических символов. Ведение такой записи само является средством обучения; школьник обучается выделять самое существенное, овладевает математической символикой. Если запись на уроке обращается в механическое переписывание с доски или в запись под диктовку, если ученики пишут, не вникая в содержание, то такая запись пользы не приносит.

Записи доказательства первых теорем в VI классе должны быть проведены под руководством учителя. Лучше всего, если это делается после рассмотрения доказательства при его повторении. Ученики не записывают механически, учитель привлекает их к выяснению, что именно надо записать, повторяя обоснование каждого суждения.

Рассмотрим, например, запись теоремы о сумме углов треугольника. Ученики делают чертеж к теореме и записывают, что дано и что требуется доказать, еще до рассмотрения доказательства. После доказательства учитель предлагает записать его. Для повторения хода рассуждения при записи привлекаются учащиеся. Записывается только схема доказательства без обоснований.

Теорема

Дано: $\triangle ABC$ (рис 39).

Доказать:

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$.

Доказательство

1) Проводим $CD \| AB$ и CE продолжение AC.

2) $\angle 3+\angle 4+\angle 5=2d$, но

3) $\angle 4=\angle 2$, $\angle 5=\angle 1$.

Следовательно,

4) $\angle 3+\angle 2+\angle 1=2d$.

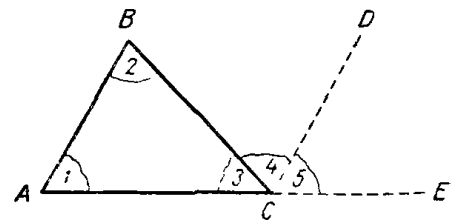


Рис 39

Если требуется более подробная запись, то каждому пункту дается обоснование. Тогда будет записано:

2) $\angle 3+\angle 4+\angle 5=\angle ACE=2d$, так как $\angle ACE$ развернутый.

3) $\angle 4=\angle 2$, как внутренние накрест лежащие при $AB \| CD$ и секущей BC. $\angle 5=\angle 1$, как соответственные при $AB \| CD$ и секущей AE.

Следовательно,

4) $\angle 3+\angle 2+\angle 1=2d$ (слагаемые заменили им равными).

Проведение записи с обоснованиями отнимает много времени, и ее нельзя проводить на каждом уроке; зато эта запись помогает ученику разобраться в каждом звене доказательства. Каждый учитель сам отберет, какие доказательства записать подробно.

Очень полезно провести в классе такие самостоятельные работы: записав краткую схему доказательства теоремы, предложить ученикам самостоятельно приписать к каждому пункту обоснование. Такая работа выполняется на уроке и должна быть сразу коллективно проверена. Следующим этапом является уже самостоятельная схематическая запись доказательства, рассмотренного под руководством учителя. Если ученики будут и дома также оформлять решение задач на доказательство, то уже в VI классе они получат некоторый навык и в VII классе не будут затрудняться в оформлении доказательства теорем и решении задач.

Желательно, чтобы в VIII классе ученики самостоятельно вели краткую запись доказательства теоремы при объяснении ее в классе.

Запоминание теоремы.

Ученики должны запомнить формулировку теоремы, усвоить ее доказательство. Очень важно предупредить заучивание доказательства теоремы наизусть. Недостаточно привлекать учеников к активной сознательной работе при рассмотрении доказательства в классе. Необходимо при опросе учащихся систематически предъявлять к ним определенные требования: умение обосновать каждое звено доказательства, указать, из каких ранее установленных предложений сделаны выводы, где использовано каждое данное условия теоремы. Очень полезно предлагать отдельным ученикам, не проводя всего доказательства, выделить только его основную идею, кратко наметить план. Громадную роль в повышении умения доказывать играют задачи на доказательства. Запоминанию теорем и связи между ними содействует их повторение, систематически проводимое перед доказательством новой теоремы и при решении задач. Очень полезно после окончания темы или частей большой темы сделать ее обзор, повторить, что именно прошли в этой теме, в каком порядке рассматривали теоремы, установить логическую зависимость между предложениями.

Доказательство «от противного».

Наблюдения показывают, что способ доказательства «от противного» ученики понимают и усваивают с большим трудом. Поэтому рассмотрим детально методические приемы, способствующие сознательному овладению этим способом доказательства.

Трудность усвоения вызывается как более сложными логическими операциями, так и чисто психологическими причинами. Логические операции заключаются: 1) в составлении предложения, противоречащего доказываемому (например, требуется доказать, что два угла равны, допускаем, что они не равны): 2) в перечислении всех возможных предположений, следующих из сделанного допущения (например, если углы не равны, то угол первый может быть больше второго или он может быть меньше второго); 3) в получении ряда выводов, следующих из каждого предположения, и следствий из них, противоречащих ранее установленному положению или условию теоремы (иногда оно следует непосредственно, как в теореме о равенстве сторон, лежащих против равных углов треугольника; иногда требуется более длинное рассуждение и даже дополнительное построение, как в теореме об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей); 4) в установлении ложности предложения, противоречащего доказываемому, и отсюда истинности доказываемой теоремы.

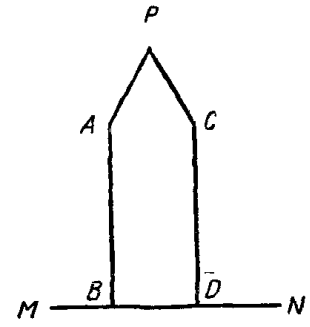


Рис. 40

Психологически учащихся затрудняет косвенность доказательства, так как им представляется естественным идти прямым путем, устанавливая связи между условием и заключением Но самой главной психологической трудностью является допущение, явно нелепое с точки зрения ученика, особенно если это допущение иллюстрируется неправильным чертежом. Рассмотрим рисунок 40 (взят из учебника А. П. Киселева, § 71). Этот чертеж показывает ученику, что прямые AB и CD не могут пересечься в точке P, так как прямые не могут пойти «не прямо». Это и кажется ему доказательством неправильности допущения, а не последующие рассуждения. Также для доказательства признака параллельности прямых в учебнике Н. А. Глаголева (§ 36) и в учебнике А. П. Киселева (§ 73) сделаны чертежи, которые не разъясняют способа доказательства (рис. 41, *а* и *б*). Ученики видят, что прямые такими быть не могут, то есть опять очевидна

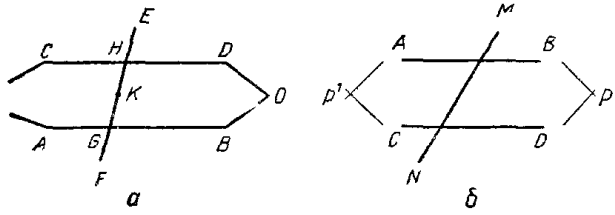


Рис. 41

невозможность допущения, так как оно противоречит непосредственной интуиции. Ученик может только заучить все остальное рассуждение, не понимая его необходимости.

Чертеж при доказательстве теоремы является наглядным пособием, поясняющим способ рассуждения; если чертеж не нагляден и, наоборот, затемняет рассуждение, от него лучше отказаться. Так, при доказательстве теоремы о двух перпендикулярах к одной прямой лучше не изображать точки пересечения P (рис. 40), а просто начертить два перпендикуляра (рис. 42) и обратиться к воображению учащихся. Учитель предлагает им мысленно продолжать начерченные отрезки кверху на большое расстояние. Можем ли мы предположить, что где-то очень далеко,

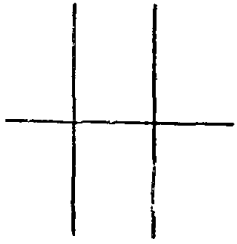


Рис. 42

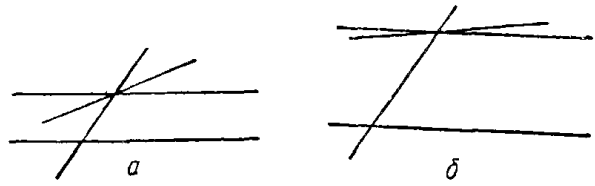


Рис. 43

на расстоянии нескольких километров от прямой MN, эти прямые пересекутся? В этом допущении нет интуитивно невозможного. Но из такого предположения следует, что где-то есть точка пересечения P, из которой опущены два перпендикуляра к одной прямой. Может ли это быть? Почему не может?

Учитель должен планомерно рассмотреть все возможные предположения. Так, в данном случае надо рассмотреть невозможность пересечения двух перпендикуляров как по одну, так и по другую сторону от прямой MN.

Во всяком случае надо избегать грубо неправильных чертежей. Например, чертеж к первой теореме о равенстве углов при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой должен иметь вид, изображенный на рисунке 43, *б*, а не на рисунке 43, *а*. Можно указать и другие случаи, когда учитель не учитывает психологии учащихся. Так, например, начертив равнобедренный треугольник, учитель перед доказательством обратной теоремы способом от противного повторяет, что в этом треугольнике против равных сторон лежат и равные углы, а затем при доказательстве обратной теоремы пользуется тем же чертежом и предполагает, что в треугольнике стороны не равны. Такое предположение неприемлемо для учащихся. Если проводить таким способом доказательство обратной теоремы, надо предложить построить треугольник с двумя равными углами, а затем уже рассмотреть, влечет ли это и равенство сторон, лежащих против равных углов.

Чтобы довести до учеников смысл непрямого доказательства, недостаточно словесного разъяснения и повторения его учеником, нужна планомерная и продуманная работа. Выяснению косвенного доказательства и необходимости рассмотрения всех возможных, исключающих друг друга предположений могут помочь жизненные примеры. Учащихся заинтересует рассказ о работе разведчика, которому приходится обосновывать свое заключение способом от противного, устанавливая невозможность всех остальных предположений. Аналогично рассуждает врач при постановке диагноза болезни. Можно привести примеры и из школьной жизни. При анализе таких примеров устанавливается, что ошибочное заключение могло быть именно потому, что были рассмотрены не все возможные предположения, или потому, что они не исключали друг друга. Если затем обратиться снова к доказательству математической теоремы, то для учеников оно станет понятнее, им станет ясно, почему надо рассмотреть все случаи. Полезны также простые примеры — упражнения на составление исчерпывающих предположений, например: 1) В классе VI А число учеников не меньше, чем в классе VI Б. Что можно предположить о числе учеников VI А класса, если в VI Б 38 учеников? Или 2) Физика начинается в VI классе, Володя уже проходит в школе физику, значит, он учится в VI классе. Правильно ли сделан вывод?

Начинать разъяснение способа доказательства от противного следует только тогда, когда учащиеся встретятся с ним. Место первой теоремы, доказывающейся косвенным путем, зависит от принятой системы построения курса геометрии [1].

Введение понятий теоремы и аксиомы.

Иногда предлагают отложить введение *понятия о теореме* и рассмотрение состава теоремы до того, как учащиеся научатся проводить доказательство.

Такое предложение нецелесообразно. Проведение доказательства без четкого выяснения, что именно дано, то есть на что мы опираемся при выводе, только затрудняет его понимание. Если же понятия условия и заключения будут выяснены, то оказывается, что учитель избегает только слова «теорема», которое большинству учеников уже знакомо от старших товарищей или из учебника. Они знают, что в геометрии будут какие-то теоремы, и даже ждут их появления с интересом.

Конечно, вводить понятие о теореме на одном из первых уроков геометрии нельзя; его надо рассмотреть на такой теореме, в которой можно отчетливо показать все этапы вывода. Многие учителя делают это при изучении свойства вертикальных углов. После определения вертикальных углов, которое можно

---

[1] См. § 4.

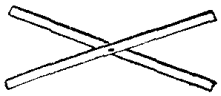


Рис. 44

дать, рассматривая способ построения угла, вертикального данному, переходят к выявлению свойства этих углов. При этом можно использовать наглядное пособие — две рейки, скрепленные в точке пересечения (рис. 44). Сдвигая и раздвигая рейки, учитель меняет величину углов, но ученики видят, что оба угла изменяются одинаково, то есть наглядно воспринимают их равенство. Рассмотрение модели, однако, не указывает путь к доказательству этого свойства. К доказательству лучше подойти от решения задачи на вычисление, как это было нами рассмотрено выше (стр. 523). Записав ход решения задачи, получим весь путь логического вывода, но сделанного для частного случая. Затем учитель выясняет, что при решении различных задач ученики заметили равенство вертикальных углов во всех случаях. Так, если угол, смежный одному из вертикальных углов, был равен 130°, то оба угла были по 50°, если смежный угол был равен 70° — оба угла содержали по 110° и т. д. Но как убедиться в том, что любые два вертикальных угла равны, где бы их ни начертили, какой бы величины они ни были? Если мы найдем такое рассуждение, которое подтвердит, что подмеченное нами свойство верно для любых вертикальных углов, то это рассуждение явится доказательством, а доказываемое предложение называется теоремой. После этого *выделяется, что известно*, то есть *дано, что надо установить*, то есть *доказать*, иначе говоря, *выделяется условие* и *заключение* и проводится обычная запись.

При повторении всего рассуждения ученики должны понять, что всегда можно взять угол, смежный каждому из вертикальных углов, что сумма смежных углов, как мы уже знаем, всегда равна двум прямым углам, то есть для того, чтобы выразить, чему равен каждый из вертикальных углов, надо от двух прямых углов вычесть один и тот же угол. Эти рассуждения проводятся одновременно с записью на доске.

При таком способе вывода мы пользуемся обоснованиями, хорошо известными учащимся, а именно: 1) сумма смежных углов равна двум прямым углам; 2) одно из слагаемых равно сумме без другого слагаемого и 3) если от равных величин вычесть одну и ту же величину, то полученные остатки будут равны.

Конечно, учитель должен последовательно и четко повторить доказательство и только после этого предложить его повторить ученику. Полезно затем при доказательстве взять другой смежный угол или предложить желающему ученику доказать равенство другой пары вертикальных углов.

Обобщая пройденное, необходимо еще раз выяснить, какую теорему доказали, на каких уже известных положениях основы-

вались при доказательстве, выделить еще раз ее условие и заключение.

Нельзя думать, что все ученики с первой теоремы вполне поймут смысл доказательства, они им овладеют постепенно.

Надо указать учащимся, что и раньше на уроках геометрии и арифметики они встречались с теоремами, но только не называли их. Например, теоремы о свойстве смежных углов, о делимости суммы. Необходимо сформулировать их.

На первом этапе желательно, чтобы учащиеся усвоили две основные идеи: 1) теорема доказывается не на основании опыта, а путем правильного рассуждения, 2) вывод имеет общее значение, а не относится только к тому чертежу, которым мы пользуемся.

В дальнейшем ученикам следует предлагать простенькие задачи на доказательство. Если учитель сумеет заинтересовать учащихся поисками решения, то умение устанавливать логические связи между геометрическими соотношениями будут постепенно совершенствоваться. В настоящее время имеется достаточно книг, содержащих много элементарных задач на доказательство, уже проверенных в шестых классах многих школ [1].

Как уже указывалось, школьный курс геометрии не является аксиоматическим. Однако в объяснительной записке к программе предлагается *ознакомить учащихся с понятием аксиомы.* Учитель сам должен выбрать, когда именно его ввести. Часто предлагают одновременно ввести оба понятия: аксиомы и теоремы Но в таком случае смысл введения аксиомы как предложения, принимаемого без доказательства, не может быть понятен учащимся.

Утверждение, что аксиома — очевидная истина, тогда как истинность теоремы выявляется после доказательства, совсем неубедительно и неверно. Предложение: «две различные прямые могут иметь только одну общую точку» не менее очевидно, чем предложение: «через две точки можно провести только одну прямую». Опытное происхождение аксиом тоже не отличает их от теорем, так как и большинство теорем является результатом отвлечения от опыта и было известно до построения доказательного курса геометрии. *Роль аксиом может быть выяснена при рассмотрении логической системы предложений.* Поэтому понятие об аксиоме надо дать после того, как учащийся получит представление о ряде логически связанных между собой теорем.

При доказательстве каждой теоремы учитель выясняет, на каких предложениях основано доказательство. Иногда ученикам придется ссылаться на определение, иногда на ранее доказанные теоремы, иногда на предложения, принятые раньше без

[1] См. § 13.

доказательства. Перед тем как ввести понятие об аксиоме, учитель проводит беседу, в которой выясняет не только на чем основано доказательство последней теоремы, но и логическое обоснование предложений, служащих основой доказательства.

Затем может быть поставлен вопрос: если каждое последующее предложение доказывать на основании предыдущих, то как же доказать первую теорему? Очевидно, должны быть предложения, принятые без доказательства, которые мы берем из опыта. Эти предложения называются аксиомами.

Так, предложение: «через две точки можно провести одну и только одну прямую» принимается без доказательства — это аксиома. Если доказательство методом «от противного» усвоено, можно, пользуясь аксиомой, отчетливо доказать следствие, что две различные прямые могут иметь только одну общую точку.

Следует пояснить, что аксиомы установлены опытным путем. Их правильность подтверждается тем, что геометрические теоремы, выведенные на их основании, дают возможность верно решать практические задачи. К понятию аксиомы надо снова вернуться в теме «Параллельные прямые».

Можно и отложить введение понятия аксиомы до этой темы, так как к этому времени у учащихся будет достаточный запас теорем, составляющих последовательную цепь умозаключений. Например, можно предварительно проследить, на чем основано доказательство признаков параллельности двух прямых. Все же особо *углублять понятие аксиомы не следует,* так как вполне осознать его учащиеся на этой ступени логического развития не могут. Учителю невольно придется давать искаженные представления, например: обычно учащиеся воспринимают формально, что такое-то предложение обязательно является аксиомой (аксиома о параллельных), тогда как в действительности даже в пределах Евклидовой геометрии эта аксиома может явиться теоремой, если другое предложение принять за аксиому. Как известно, у Евклида 5-й постулат был не тем предложением, которое теперь обычно называют аксиомой Евклида [1]. Все это слишком тонкие понятия, которые рано давать шестиклассникам. Также несвоевременно было бы говорить о возможности построения другой геометрии при отрицании этой аксиомы. Такое утверждение может только дезориентировать учащихся [2]. Если в VI классе говорить о Н. И. Лобачевском как о великом русском математике, то можно только сказать: он обосновал, что аксиома о параллельных не может быть доказана на основании ранее установленных предложений. Но, конечно, и эти слова вряд ли могут быть до конца осознаны учащимися.

[1] См. [253]

[2] О геометрии Н. И. Лобачевского можно поставить доклад только в старших классах на кружковых занятиях.

§ 8. Наглядные пособия

На необходимость применения наглядных пособий уже указывалось при рассмотрении общей методики преподавания математики [1]. Многочисленные примеры использования наглядных пособий были нами приведены в предыдущих параграфах. Наглядные пособия способствуют яркости впечатления, а тем самым и прочности усвоения. Цели их применения могут быть весьма различны: иногда они служат для восприятия какой-либо новой для учеников геометрической фигуры, помогают выявить особые свойства этой фигуры, содействуют выработке отвлеченного понятия и образованию определения. Как мы видели, наглядное пособие может помочь и в выявлении некоторых зависимостей, которые затем выражаются в форме теорем. Большое значение имеют наглядные пособия, представляющие разные задачи, а также пособия, помогающие систематизировать пройденный материал.

Простейшим наглядным пособием является *чертеж на доске*, которым учитель пользуется на каждом уроке. От качества чертежа во многом зависит понимание изучаемого материала. Чертеж должен помогать ученику увидеть соотношения между элементами фигуры; поэтому учителю необходимо уметь отчетливо выполнять требуемый чертеж на доске. Следует заранее обдумать расположение чертежа, его размеры; существенные детали при большом количестве линий полезно выделить цветным мелком, штриховкой. Надо, чтобы дополнительное построение выделялось от основного, для чего можно применить штриховку или более тонкие линии. Чертежи должны быть многообразны. недопустимо изображение всех треугольников почти равносторонними, трапеций — равнобочными и т. п. Отчетливо выполнять чертеж на доске без приборов надо требовать и от учащихся.

Обычно под наглядными пособиями понимают не чертежи на доске, а пособия, заранее изготовленные. Рассмотрим их виды.

1. *Таблицы, чертежи.*

1) Чертежи для иллюстрации излагаемого материала (см. § 18).

2) Чертежи, показывающие последовательное преобразование фигуры (см. рис. 32, 131, 193).

3) Чертежи — задачи на вычисление или на доказательство (см. рис. 50—53, 68—72, 116—119).

4) Чертежи, дающие систему некоторых понятий.

Например, классификация треугольников (рис. 140). См. также рисунки 193, 195, 196.

---

[1] См. ч. I, § 8.

К таким пособиям можно отнести также чертежи, дающие исследование задачи на построение (см. рис. 98, 101, 104), и чертежи, показывающие различное расположение данных при решении задач на вычисление и доказательство (см. рис. 64, 65).

2. *Пособия, вырезанные из картона, фанеры,* плотной *бумаги.* К ним относятся пособия, иллюстрирующие наложение и приложение углов, наложение треугольников; фигуры, которые можно перегибать для выявления осевой симметрии или на которых можно осуществлять поворот вокруг точки (см. рис. 127, 128, 148—150, 160, 182, 183).

Некоторые пособия этого типа очень просты для изготовления; так, можно вырезать несколько треугольников из обыкновенной бумаги. Отрывая от каждого из них «уголки» и складывая их (рис 45, *а*), ученики убеждаются в том, что в сумме получается развернутый угол, а это может служить подготовкой к логическому доказательству теоремы (см. также рис. 45, *б* и *в*).

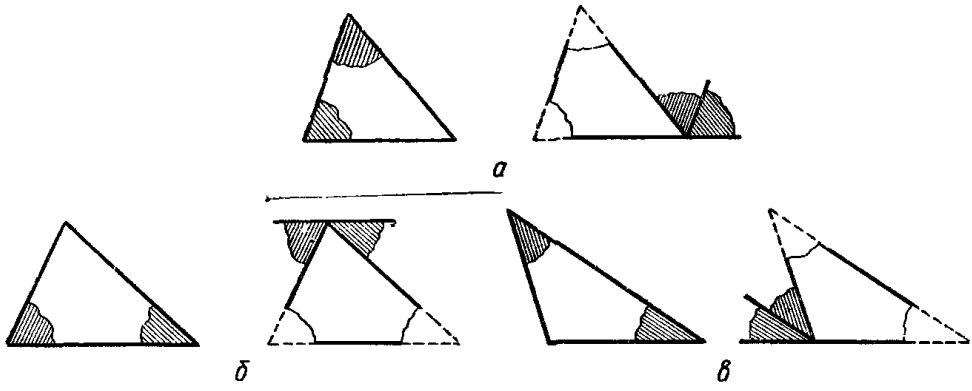


Рис. 45

Так же просто вырезать из бумаги несколько кругов, перегибая которые можно установить осевую симметрию или соответствие дуг и центральных углов.

3. *Подвижные* (шарнирные) *модели* из деревянных реек или металлических стержней.

Описания таких пособий и способа их применения даны во многих разделах этой книги (см., например, рис. 18, 19, 23, 24, 27—31). Иногда такое пособие может быть заменено тонкой бумажной полоской, которая кнопкой прикрепляется к чертежу на доске, и может вращаться (так, например, можно показать изменение положения одной из двух прямых, пересеченных секущей, или различные виды трапеций и т. п.).

4. Пособия — *модели геометрических тел.* Желательно иметь многообразные модели картонные, деревянные, металлические, стеклянные. Модели должны быть многообразны и по форме,

например: пирамиды, правильные и неправильные, призмы, прямые и наклонные, с разными многоугольниками в основании. Полезно иметь и шарнирные каркасные модели, например треугольную призму, которая может быть сделана и прямой, и наклонной.

5. *Наборы моделей плоских и пространственных фигур* для проведения в классе измерительных работ. Особенно полезно иметь производственные детали.

6. *Набор измерительных приборов и инструменты* для измерения и построения: столярная малка, делительный или пропорциональный циркуль, центроискатель, пантограф и т. д., а также измерительные приборы для измерений и построений на местности (см. § 13, рис. 75—82).

Желательно иметь школьный *макет полигона*, пользуясь которым можно в классной обстановке пояснить приемы измерений на местности.

7. *Кинофильмы и диафильмы.* Применение кинофильмов наиболее целесообразно, если надо иллюстрировать какой-либо процесс, преобразование, движение. Так, например, может быть показано преобразование симметрии (осевой и центральной), параллельный перенос и др. Хорошо может быть иллюстрировано постепенное появление геометрического места точек, обладающих определенным свойством.

Полезны фильмы, показывающие реальные объекты в природе или на производстве, рассматривая которые ученики могут узнавать геометрические фигуры и пояснять применение их свойств на практике. Кинофильмы могут быть использованы для показа измерительных работ на местности. Желательно, чтобы в каждой школе имелось соответственное оборудование.

Не всякое наглядное пособие целесообразно. При подготовке к уроку учитель должен обдумать, какую цель преследует применение наглядного пособия, когда его показать, как лучше использовать. Так, например, изготовление из картона или фанеры неподвижных плоских фигур нецелесообразно. Они ничего не прибавляют к чертежу тех же фигур. Однако они могут быть полезны для проведения измерений периметров или площадей; вырезанные из бумаги треугольники могут быть использованы как раздаточный материал для проведения самостоятельных работ учащихся.

В некоторых школах имеются готовые чертежи к доказательству отдельных теорем. Такие пособия вредны; на них изображены и данные теоремы, и дополнительное построение, которое должно появляться в процессе доказательства, кроме того, если эти чертежи используются при опросе и повторении теорем, ученики привыкают доказывать одну и ту же теорему на чертеже определенного вида и расположения.

Применение готовых чертежей может быть полезно и сэкономит время, если надо показать хорошо оформленную систему фигур. Например, при рассмотрении на уроке доказательства теоремы или решения задачи на одном чертеже, представляющем частный случай, другие случаи расположения или вида фигур можно показать на готовых чертежах (см., например, рис. 37, 152, 154—156).

Таблицы, систематизирующие материал по какой-либо теме полезно использовать при повторении этой темы.

Среди самостоятельных работ учащихся большое значение имеет изготовление ими наглядных пособий. Большинство наглядных пособий по геометрии изготовить просто. Сейчас, когда в каждой школе есть столярная и слесарная мастерские, помощь в изготовлении пособий могут оказать преподаватели труда. Модели из картона, плотной бумаги ученики изготовляют уже в IV и V классах Сам процесс изготовления пособия повышает знание свойств геометрических фигур и интерес к изучению их. Кроме того, работа по изготовлению пособия способствует развитию трудовых навыков. Во многих школах организованы кружки юных умельцев по изготовлению наглядных пособий; в некоторых школах ученик должен за год изготовить одно наглядное пособие.

Конечно, кроме пособий, изготовленных школьниками, могут быть использованы и покупные пособия.

§ 9. Самостоятельные и практические работы учащихся

Рассмотрим подробнее виды и организацию самостоятельных работ учащихся по геометрии

Прежде всего отметим, что в практике школ чаще всего самостоятельные работы даются на решение задач или на выполнение построений, измерений, вычислений, что является преимущественно применением полученных знаний. Значительно реже проводятся такие самостоятельные работы, выполняя которые ученики воспринимают новый материал или готовятся к его восприятию Конечно, и те и другие работы повышают активность, развивают мышление ученика, улучшают качество его знаний, но именно поэтому следует давать учащимся задания обоих типов.

В VI классе самостоятельная работа не должна занимать много времени. Если цель работы в наблюдении, которое ведет к некоторому выводу или повышает интерес учеников к этому выводу, то следует сразу в классе использовать результаты работы учащихся, подвести итоги, выяснить ошибки. Например, до изучения свойств вертикальных углов можно предложить ученикам самостоятельно начертить острый угол, построить два

смежных с ним угла, сравнить полученные углы по величине, а затем выполнить такую же работу, задав предварительно тупой угол.

Выше нами рассмотрено задание, выявляющее свойство биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника[1]. Такая же работа проводится при выполнении построений треугольников до формулировки признаков равенства[2]. Перед теоремой об углах с соответственно параллельными сторонами можно дать задание начертить угол, взять точку внутри этого угла и построить угол с вершиной в этой точке так, чтобы его стороны были параллельны сторонам первого угла. Выяснить, сколько таких углов можно построить, сравнить каждый из них по виду и по величине с данным углом. То же задание, если точку взять вне данного угла.

В VII классе можно предложить начертить все возможные взаимные положения прямой и окружности и во всех случаях провести перпендикуляр из центра окружности к прямой. В VII классе довольно часто можно предлагать учащимся обосновать вывод, который сделан интуитивно. Например, дать задание: начертить трапецию, у которой два угла, прилежащие к одному из оснований, равны. Какой вид имеет трапеция? Вывод обосновать. Или — начертить трапецию, у которой два угла, прилежащие к одной из боковых сторон, равны. Возможно ли это? Если возможно, то при каком условии? Вывод обосновать.

Все рассмотренные нами примеры заданий могут быть даны и отдельному ученику для выполнения их на доске. Учитель может при этом привлекать к участию в решении задачи и других учеников с места. Но все же в «общей» беседе участвуют далеко не все, и некоторые учащиеся пассивно воспринимают выводы и предложения, сделанные другими. Самостоятельная же работа заставляет каждого подумать и, если не осознать до конца, то хотя бы представить наглядно геометрические соотношения. Самостоятельные работы помогают и учителю лучше изучить учеников. Учитель не ждет, пока ученики окончат работу, а подходит то к одному, то к другому и наблюдает выполнение ими задания. При этом легко подметить особенности ученика, его индивидуальные ошибки и вовремя принять меры к их исправлению.

В VI классе полезны маленькие задания, обучающие учащихся выражать на чертеже соотношения, заданные словами, а также и читать чертеж. Например, дается задание: начертить треугольник, провести в нем из одной вершины два луча до пересечения с противоположной стороной, обозначить буквами вершины данного треугольника и полученные точки пересечения,

---

[1] См. § 7

[2] См. § 17.

установить, сколько на чертеже получилось треугольников; выписать их. Или дается аналогичное задание, но предлагается из двух вершин треугольника провести лучи до пересечения с противоположными сторонами.

Необходимы также самостоятельные работы, приучающие школьников пользоваться инструментами. Так, в VI классе проводятся небольшие работы по построению суммы и разности отрезков с использованием циркуля и линейки, построение и измерение углов при помощи транспортира, построение всех высот, медиан и биссектрис в треугольниках разного вида, построение фигуры, симметричной данной относительно оси, проведение прямых, параллельных данной, при помощи угольника и линейки. В VII классе, кроме обычных построений, надо, чтобы каждый ученик действительно отыскал центр круга как при помощи построения, так и с помощью центроискателя, в VIII классе должно проводиться самостоятельное построение подобных фигур с использованием делительного (пропорционального) циркуля, измерение отрезков с помощью циркуля и поперечного масштаба Последние работы могут быть связаны с вычерчиванием плана участка в другом масштабе или с измерением по плану.

Очень часто можно слышать жалобы учителей, что таких работ проводить нельзя, так как нет инструментов Однако опыт многих школ показывает, что центроискатели ученики VII класса могут изготовить сами из плотной бумаги или картона, пропорциональные циркули вполне могут быть изготовлены ими в слесарной мастерской школы Циркули для черчения и измерительные, хорошие масштабные линейки, транспортиры с поперечным масштабом должны быть у каждого ученика.

Не будем останавливаться на самостоятельных работах в виде решения задач на вычисление, построения и доказательства, в том числе на самостоятельном доказательстве некоторых теорем. Напомним только, что *трудность заданий должна возрастать постепенно* Мы указывали выше, что в VI классе проводятся самостоятельные работы для обучения школьников схематической краткой записи доказательства, которую они применяют и при решении самых простых задач[1]. В следующих классах можно *предлагать учащимся самостоятельно разобраться в теореме по книге* Такую работу по книге первый раз надо провести под руководством учителя: предложить прочитать формулировку теоремы, выделить условие и заключение, сделать чертеж и записать, что дано и что требуется доказать; затем внимательно читать каждый пункт доказательства, отыскивая на чертеже все упомянутые фигуры, выясняя обоснование каждого

[1] Примеры задач см. в гл. III и в каждой теме.

звена вывода. Ученик может спросить учителя о том, что ему непонятно.

После того как доказательство понято, ученики самостоятельно запишут его ход схематически. Такая работа, проведенная на нескольких уроках, научит учащихся сознательно работать с книгой дома.

Как и в V классе, большое число самостоятельных работ должно быть посвящено измерениям с вычислением площадей поверхностей и объемов тел с использованием моделей и конкретных деталей.

§ 10. Геодезические работы

Согласно программе начальной школы уже в III классе проводятся простейшие работы на местности: провешивание прямых, измерение отрезков, упражнения в развитии глазомера. В IV классе к этим работам присоединяется определение площади прямоугольного участка земли.

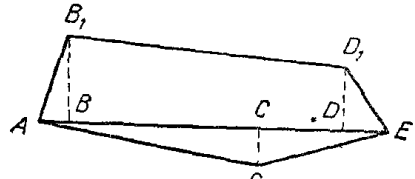


Рис. 46

По программе V класса в геометрический материал включены работы на местности, характер их перечислен и на них отведено 8 часов. Для последующих классов программа дает более общие указания, учителю самому предоставляется устанавливать сроки и время на проведение работ. В учебнике геометрии[1] рассказано о всех инструментах и приборах, используемых в работах на местности (эккер, астролябия, уровень, мензула), и излагается порядок каждой из предусмотренных программой работ. Единственно, что мы считаем нужным отметить,— это желательность ознакомления учащихся с эклиметром (в учебнике указан «шест с планкой») и в дополнение к приведенным работам по съемке плана участка добавить съемку плана в VI и VII классах с помощью прокладки магистрали на многоугольном участке (так называемый координатный способ). Магистралью может служить и диагональ многоугольника; в этом случае местоположение заметных точек на участке (в том числе и вершин многоугольника) определяется расстоянием их от магистрали (рис. 46).

Приводим эту работу. *Съемка плана участка с магистрали.* На участке провешивают магистраль, например диагональ AE, и, следуя по ней с эккером или астролябией, измеряют пройденные расстояния до оснований перпендикуляров, опущенных на нее из вершин границ участка, и длины самих перпендикуляров; результаты заносят в *полевой журнал.*

[1] См. [258]

Примерная запись в журнале такова:

Расстояния по магистрали:	Расстояния от вершин до магистрали:
1. $AB=6$ *м*	
2. $AC=27$ *м*	$BB_1=12$ *м*
3. $AD=35$ *м*	$CC_1=6$ *м*
4. $AE=42$ *м*	$DD_1=20$ *м*

Знакомство учащихся VI и VII классов с эклиметром позволит им проводить измерения углов в вертикальной плоскости и упростит работы по измерению высот доступных предметов, а в VIII классе и высот предметов, к основанию которых нельзя подойти.

Приводим наиболее интересные работы в VIII классе.

1. Определение ширины реки.

Вдоль берега прокладывается «базис» AB; на противоположном берегу реки выбирают точку N, на базисе находят точку B_1 так, чтобы $\angle NB_1A=90°$ (с помощью эккера или астролябии). Из любой точки базиса, например A_1, измеряют угол NA_1B_1. Пользуясь знанием тригонометрии, ученики вычисляют длину катета NB_1 по другому катету A_1B_1 и острому углу NA_1B_1 (рис. 47).

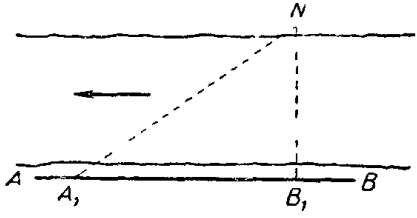


Рис. 47

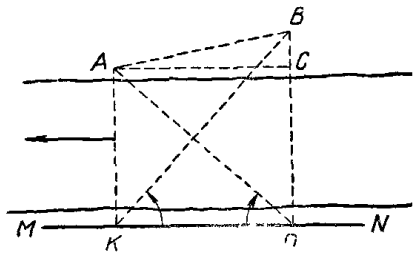


Рис. 48

2. *Определение расстояния между двумя недоступными точками*, например измерение расстояния между точками A и B на одном берегу реки с другого берега (рис. 48): а) прокладывается базис MN и на нем находят такие точки K и D, чтобы углы AKM и BDN были прямыми; б) из точек K и D измеряются углы BKD и ADK; в) из прямоугольного треугольника AKD определяется катет AK, из прямоугольного треугольника BKD определяется катет DB; г) вычисляется разность $BD—AK$, д) из треугольника ABC с помощью теоремы Пифагора вычисляется гипотенуза AB.

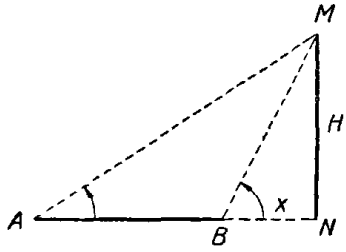


Рис. 49

3. *Измерение высоты недоступного* предмета MK, например башни, вы-

шки. Пусть по направлению к основанию башни можно подойти не ближе точки B. Прокладывается базис $AB=a$ (*м*) (рис. 49). Из точек A и B измеряются углы MAN и MBN. Определяется длина недоступного отрезка BN из треугольников AMN и BMN. Обозначим этот отрезок x, а высоту башни H.

Тогда имеем:

$$\frac{H}{x}=\operatorname{tg} MBN,\quad \frac{H}{a+x}=\operatorname{tg} MAN.$$

Решив систему уравнений относительно искомой величины H, получаем:

$$H=\frac{a\cdot\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B-\operatorname{tg} A}.$$

Подготовка и организация измерительных работ на местности.

Не во всех школах работам на местности уделяется должное внимание, однако многие школы накопили в проведении этих работ достаточно большой опыт, который должен быть всемерно использован. Правильная организация практических работ на местности содействует лучшему усвоению теории и пониманию силы вновь изученного математического аппарата, например, тригонометрии (VIII класс).

Важно и то, чтобы учащиеся понимали народнохозяйственное значение измерительных работ, знали о широком масштабе этих работ в СССР (они производятся при строительстве городов, при планировке новых жилых кварталов в старых городах, при прокладке шоссейных и железнодорожных путей, при землеустройстве в сельском хозяйстве, при мелиоративных работах, при прокладке линий электрических передач и т. д.). Проведению работ на местности должна предшествовать работа в помещении — частично на уроках, частью во внеклассное время. Обязательная часть включает ознакомление учеников с приборами, назначением каждого из них и разбор простейших задач.

Решение задач можно провести с помощью моделей на макете полигона или на плоскости большого стола, покрытого нарисованной на бумаге схемой участка земли, или на положенной горизонтально классной доске. Работы на местности следует проводить с небольшими группами учащихся. В младших классах восьмилетней школы (V—VI классы) учитель должен каждой группе дать определенное задание и лично руководить работой группы. Поэтому, выбрав наиболее удобное место для проведения работ (в условиях города обычно приходится выезжать за его пределы, например в пригородный парк), учитель указывает каждой группе место работы и, переходя от группы к группе, помогает организовать работу, разъясняет и наблюдает. Важно проследить за тем, чтобы намеченные для групп работы были закончены, сделаны все необходимые измерения и зарисовки;

а при возвращении были бы собраны все взятые из школы приборы и инструменты.

В VII и VIII классах можно организовать одновременную работу нескольких групп по 4—6 человек в каждой с выделением ответственных учеников. Все учащиеся должны быть ознакомлены с общим планом предстоящей работы: что и где будет измерять каждая группа (в условиях города можно наметить несколько мест для проведения работ, как-то: определение высот различных построек, съемка планов различных участков и т. д.). Однако и в этом случае учитель должен указать учащимся, какой материал они должны повторить и как подготовиться к работе, составить с каждой группой план работы. С ответственными групп учитель должен провести тренировочные работы, во время которых показать им, как распределить функции внутри группы, в каком порядке вести наблюдения, как заполнить полевой журнал и т. д.

Старший в группе должен заранее подобрать и проверить для своей группы инструменты, нужные материалы, справочники; распределить внутри группы функции на время работы с таким расчетом, чтобы каждый из группы проделал основные операции, в частности с приборами.

На месте работы члены группы сами должны определить, как удобнее начать работу (начало обхода участка, пункт, с которого будет определяться угол наклона, и т. д.).

В задание каждой группе следует включать несколько основных работ и требовать, чтобы каждое измерение проводилось несколько раз и определялся средний результат. Это позволит членам группы меняться функциями. Желательно, чтобы и в том случае, когда работы проводятся группами в различных местах, учитель побывал в каждой группе и проверил, как начата работа, а перед окончанием просмотрел записи в полевых журналах. Часто бывает, что учащиеся забывают внести в журнал съемки какую-либо запись, и этим уничтожается ценность значительной части работы. Для оформления работ учитель устанавливает срок, который следует строго соблюдать[1].

Представленные работы могут быть оценены как коллективные, но впоследствии учитель должен проверить знания каждого ученика по проведению измерительных работ и дать оценку.

Лучшие работы могут быть использованы как наглядные пособия или для выставки ученических работ по математике.

---

[1] См. [63], [64].

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

§ 11. Общие соображения

Роль задач в геометрии очень велика, так как решение задач с конкретным содержанием помогает осуществлять постепенный переход к дедуктивным доказательствам. Систематическое решение задач способствует сознательному и прочному усвоению теории, помогает увидеть ее практическую ценность, в то же время решение задач развивает логическое мышление ученика, творческую инициативу, сообразительность и дает ему ряд нужных практических умений и навыков.

Предлагая учащимся задачи, учитель может преследовать различные цели: иногда задача предваряет какое-либо теоретическое положение и помогает отыскать его или усмотреть некоторую геометрическую зависимость (см. гл II § 7). В других случаях задача следует за доказанной теоремой, чтобы использовать ее для некоторого конкретного случая или решения практического вопроса. Часто задача дается в целях повторения пройденного или проверки усвоения материала учащимися.

Решение задач может предварять доказательство теоремы с тем, чтобы облегчить понимание доказательства, если оно может затруднить учащихся. Тогда в задачи включают отдельные элементы доказательства теоремы.

Рассмотрим примеры такого применения задач.

1) Если признак равенства треугольников по трем сторонам доказывается приложением, то перед доказательством предлагаются следующие задачи:

а) Дано: $AB=BC$; $AD=CD$.
Доказать: $\angle BAD=\angle BCD$ (рис. 50).

б) Дано. в четырехугольнике $ABCD$:
$AB=AD$.
$BC=CD$.
Доказать: $\angle ABC=\angle ADC$ (рис. 51).

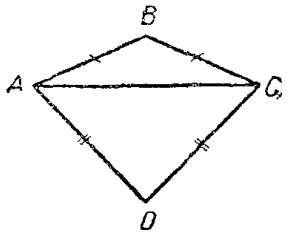


Рис. 50

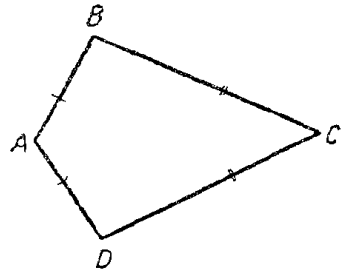


Рис. 51

2) Перед теоремой об углах с соответственно перпендикулярными сторонами предлагаются задачи (рис. 52, 53).

а) Дано: $EB \perp BA$, $BF \perp BC$, $\angle ABC = 50°$.

Определить: $\angle EBF$.

или б) Дано: $EB \perp BA$, $BF \perp BC$.

Доказать: $\angle ABC + \angle EBF = 2d$.

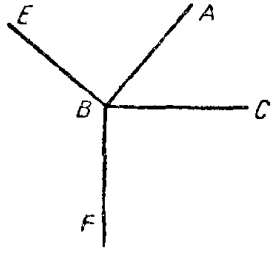


Рис. 52

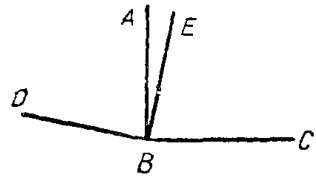


Рис. 53

в) Дано: $AB \perp BC$ (рис. 53), $DB \perp EB$, $\angle EBC = 70°$.

Определить: $\angle DBA$.

или г) Дано: $AB \perp BC$, $DB \perp BE$.

Доказать: $\angle DBA = \angle EBC$.

В зависимости от подготовки класса можно начинать или с задачи на вычисление, или с задачи на доказательство.

Решение задачи может служить источником получения новых знаний по геометрии. В таких случаях в задаче полезно поставить несколько последовательных вопросов. Рассмотрим задачу: «Через точку M внутри круга проведены две хорды AB и CD. Доказать, что треугольники AMC и DMB подобны (рис. 54). Записать пропорциональность сходственных сторон. Сравнить произведение отрезков хорды AB и произведение отрезков хорды CD, на которые их делит точка M. Провести диаметр через точку M и сравнить произведение отрезков диаметра с произведениями отрезков каждой из хорд, проходящих через точку M. Сформулировать полученное предложение (VIII класс)».

Примером применения теоремы для решения практического вопроса может служить использование первого признака подобия треугольников (VIII класс) для вычисления высоты дерева

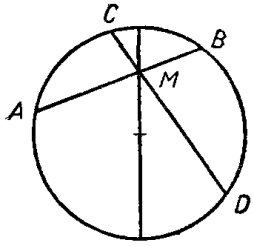


Рис. 54

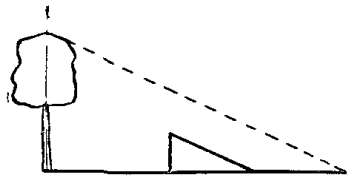


Рис. 55

в задаче: «Длина тени, отбрасываемой деревом, равна 8,7 *м*, в то время как длина тени палки, воткнутой вертикально в землю, равна 1,2 *м*. Определить высоту дерева, если длина палки равна 0,88 *м*» (рис. 55).

Для решения составляем пропорцию

$$\frac{8,7}{x}=\frac{1,2}{0,88}.$$

Откуда находим $x\approx 6,4$ *м*. Вычисления можно выполнить на логарифмической линейке.

Знакомство с измерением площадей поверхностей и объемов геометрических тел дает особенно большой материал для решения многих задач практического характера, например: на вычисление вместимости различных сосудов, определение веса технических деталей и др. Данные для таких задач учащиеся могут получать сами путем непосредственных измерений или брать с чертежа [1]. Рассмотрение различных деталей, комбинаций фигур и их чертежей развивает пространственные представления и воображение учащихся, заставляет их искать геометрические формы в окружающей обстановке. Можно предлагать учащимся самим составить задачи, в которых надо найти объем детали, ее вес или площадь поверхности; название детали, ее назначение, материал, из которого изготовлена деталь, ученики должны узнать у руководителя соответствующих практических занятий, удельный вес и другие данные найти в справочнике, необходимые измерения произвести самостоятельно.

К задачам практического характера можно отнести также задачи, решаемые построением фигуры по определенным данным с последующим измерением других элементов фигуры. Примером такой задачи может служить следующая «Стороны треугольника равны 50 *мм*, 80 *мм*, 100 *мм*; описать около этого треугольника окружность и измерить ее диаметр» [2].

Построение иногда следует выполнить в масштабе, а затем, измерив соответствующий элемент, произвести вычисление с учетом масштаба Именно так надо поступить, решая в VI клас-

[1] См, например, [260] № 531, 580 593 и др.
[2] См [260], № 616 (2), 525, 615, 665 и др

се задачу: «Телеграфный столб, высота которого 8 *м*, виден под углом в 10°; найти расстояние до столба» [1].

Такое сочетание графической и вычислительной работы при решении задач готовит школьников к практической деятельности; при изготовлении деталей в мастерских ряд необходимых размеров часто берется с чертежа.

Подбирая задачи к уроку, учитель располагает их в определенной системе, обеспечивающей переход от легких к более трудным как по способу задания условия, так и по содержанию задач. Пример последовательного подбора задач к уроку дан на стр. 560. Иногда учитель дает к задаче готовый чертеж; методика работы над задачей с применением готового чертежа рассмотрена в §§ 13, 15.

Одну и ту же задачу можно решать различными способами в зависимости от знаний учащихся. Поясним это следующим примером.

Задача. Определить расстояние на местности от точки B до точки A, к которой нельзя подойти.

Решение 1 (VI класс, равенство треугольников). Для решения задачи произведены следующие построения и измерения:

1) $BD \perp AB$ (рис. 56);
2) $BC=CD$;
3) $DE \perp BD$;
4) ACE — прямая.
5) Измерено расстояние DE.

Доказать, что $DE=AB$.

Решение 2 (VI класс, равенство треугольников, симметрия).

1) $BC \perp AB$ (рис. 57);
2) $\angle 2=\angle 1$;
3) ABD — прямая.

Доказать, что $DB=BA$.

Решение 3 (VI класс, равенство треугольников, параллельные прямые или VII класс, свойства параллелограмма).

1) $BC \perp AB$ (рис. 58);
2) $CE \perp BC$;
3) $\angle CBK=\angle BCA$,
4) D — точка пересечения BK и CE.

Доказать, что $CD=AB$.

Решение 4 (VII класс, свойство средней линии треугольника).

1) $BC \perp AB$ (рис. 59);
2) $BD=DC$;
3) $DE \perp AB$;
4) AEC — прямая.

Доказать: $AB=2DE$.

---

[1] См. [222], гл. II, № 121—137.

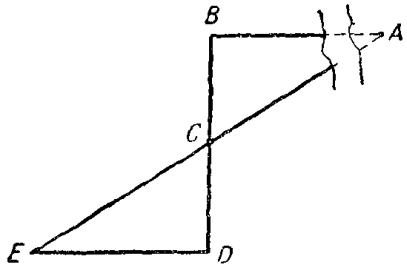


Рис 56

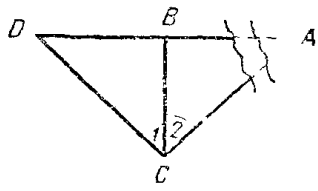


Рис 57

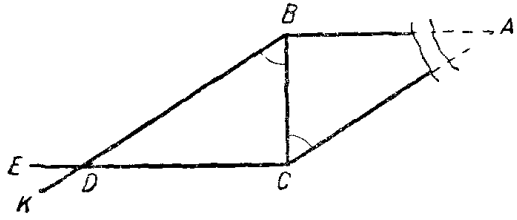


Рис 58

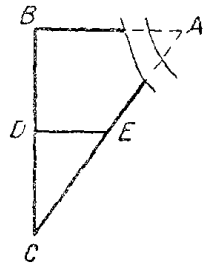


Рис 59

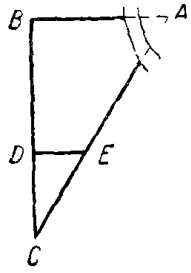


Рис 60

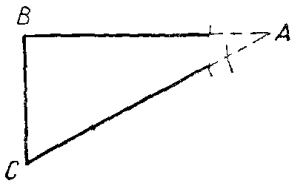


Рис 61

Решение 5 (VIII класс, подобие треугольников).

1) $BC \perp AB$, $BC=8{,}5$ *м* (рис. 60),

2) $DE \perp BC$, AEC — прямая,

3) $CD=3{,}1$ *м*, $DE=2{,}7$.

Вычислить AB.

Можно, измерив BC и угол BCA, построить затем на бумаге треугольник, подобный треугольнику ABC, и, произведя соответствующие измерения в нем, вычислить AB.

Решение 6 (VIII класс, тригонометрические функции острого угла). Для решения задачи построили прямоугольный треугольник ABC, $\angle B=90°$ (рис. 61).

Какие измерения достаточно произвести, имея астролябию и рулетку, чтобы вычислить AB? (Вычислить при $BC=7{,}8$ *м*, $\angle C=35°$.)

Возможны и другие варианты решения этой задачи.

Задачи по геометрии делят на три вида: задачи на вычисление, задачи на доказательство и задачи на построение. Это деление несколько условно: задача на вычисление часто является и задачей на доказательство, так как требует обоснования; задача на построение всегда связана с доказательством, которое иногда представляет существенную часть решения. Во многих задачах сочетается построение, измерение и вычисление.

В дальнейшем мы все же будем придерживаться общепринятой классификации задач, что облегчает рассмотрение особенностей каждого вида.

§ 12. Задачи на вычисление

Под задачей на вычисление понимают задачу, в которой требуется по некоторым данным определить числовое значение какой-либо геометрической величины, связанной с геометрической фигурой: длины отрезка, величины угла, площади, объема и т. д. Иногда данные величины выражены буквами и ответ должен быть дан в общем виде, то есть выражен буквенной формулой. Но в большинстве задач данные выражены числами и решение следует доводить до числа. При решении вычислительных задач учащиеся пользуются теми навыками в вычислениях, которые получены ими на уроках арифметики и алгебры, пользуются таблицами, логарифмической линейкой.

Задачи на вычисление можно разбить на следующие группы:

1. *Задачи, в которых* для определения искомой величины *надо применить только одно уже известное геометрическое предложение.*

Например:

1. Один из смежных углов равен 135°17′. Определить второй.

2. Определить длину средней линии трапеции, если заданы длины ее оснований: 12,7 *см* и 8,5 *см*.

Такие задачи не развивают логического мышления учащихся, не требуют особой сообразительности. Их роль — показать конкретное применение установленной зависимости. Они могут служить также для проверки усвоения учениками фактического материала при беглом опросе. Однако и подобные задачи могут быть использованы учителем для развития воображения учащихся, для более глубокого осознания ими геометрических зависимостей. Например, при решении задачи 2 учитель может задать вопрос, изменится ли длина средней линии трапеции, если вместо трапеции с высотой, равной 5 *см*, мы возьмем (при тех же основаниях) трапецию с высотой в 50 *см*, в 5 *м*. Эти вопросы заставляют учащихся осознать, что длина средней линии трапеции не зависит от высоты.

2. Задачи, по геометрическому содержанию, не отличающиеся от предыдущих, но требующие умения решать типовые ариф-

метические задачи или умения составлять и решать уравнения. По существу это *арифметические или алгебраические задачи, но с геометрическим содержанием.*

Примеры.

1. Прямой угол двумя лучами, проведенными из его вершины, разделен на три угла. Один из углов равен $\frac{3}{8}\,d$, другой составляет $\frac{5}{6}$ первого угла. Определить величину третьего угла (VI класс).

2. Периметр параллелограмма равен 152 *см*. Одна из его сторон больше другой на 25 *см*. Найти длины сторон параллелограмма [1] (VII класс).

Таких задач можно много найти в задачниках. Затруднения, которые испытывают при решении подобных задач ученики, вызываются не геометрическим содержанием, а скорее непривычкой учащихся применять к геометрии свои знания по арифметике и алгебре. Такие задачи тем и полезны, что они устанавливают связь между отдельными математическими дисциплинами. Их можно решать и на уроках арифметики (или алгебры) наравне с задачами другого содержания [2], многие могут быть использованы в качестве устных упражнений. Если ученики на уроках алгебры решают задачи на составление уравнений, то и на уроках геометрии надо использовать это умение. Все же такие задачи не углубляют знаний учащихся по геометрии, но их решение легко связать с постановкой какого-либо практического вопроса. Например, задача на вычисление объема цилиндра может быть задана в такой форме: можно ли перелить в автоцистерну, емкость которой 5 $м^3$, бензин из бака цилиндрической формы, если высота бака равна 3,6 *м*, а его диаметр 1,8 *м*?

3. *Задачи, для решения которых должны быть использованы многие геометрические предложения,* требующие умения разобраться в чертеже, установить связь между данными и искомыми элементами, провести ряд умозаключений для обоснования своих догадок. Такие задачи расширяют геометрические представления учащихся, их пространственное воображение, развивают логическое мышление. Особенно полезны *задачи, решение которых требует дополнительного построения* для выявления зависимости между данными и искомыми.

Учитель должен уделять особое внимание таким задачам. Если он сумеет вызвать интерес школьников к решению геометрических задач, то этим будет создано одно из главных условий к повышению геометрических знаний и общей математической культуры учеников.

---

[1] См. [260], № 344, 345 и др.

[2] См. [207], № 1717—1721, 1724, 1760.

Однако учитель должен проявлять педагогический такт и разумную осторожность. Предлагая ученикам слишком трудную задачу без соответствующей подготовки, педагог нередко встречается с тем, что задачу никто в классе не решил или решили один-два ученика. Предлагаемые задачи надо усложнять постепенно, давать их в некоторой системе. Лучше не объяснять ход решения сложной задачи, а дать предварительно решить несколько более простых, заключающих в себе ее отдельные элементы; тогда ученики сами сумеют выделить эти элементы в сложной задаче и найти ее решение.

Рассмотрим, например, задачу.

«В трапеции диагонали являются биссектрисами острых углов. Определить периметр трапеции, если диагональ делит среднюю линию на части, равные 10 *см* и 18 *см*»[1].

Ее решению можно предпослать такие задачи.

а) «В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагональ BD делит среднюю линию на части, равные 6 *см* и 21 *см*. Найти основания трапеции»[2] (рис. 62).

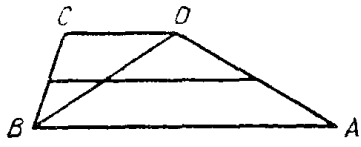


Рис. 62

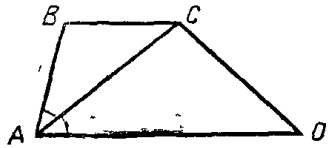


Рис. 63

б) Диагональ AC трапеции $ABCD$ является биссектрисой ее острого угла A (рис. 63). Стороны трапеции равны соответственно $AB=4$ *см*, $CD=5$ *см*, $AD=9$ *см*. Определить периметр трапеции.

Анализируя задачу № 455 после решения двух приведенных задач, можно поставить вопрос о виде трапеции в случае, когда диагонали ее являются биссектрисами острых углов, и о соотношениях между боковыми сторонами и меньшим основанием такой трапеции. Дальнейшее решение не вызовет затруднений.

Обучение решению задач надо начать с первой темы и вести его систематически. Решение задачи, вообще говоря, должно заключать следующие этапы:

1) Ученик внимательно читает условие и делает от руки соответствующий чертеж.

2) Сделав чертеж, ученик записывает, пользуясь символами, что дано и что требуется найти, повторяя условие задачи. Повторять условие задачи до чертежа имеет смысл только в случае, если формулировка проста, но обычно ученик не может осмыслить задачу, не имея перед собой наглядного образа. Надо

[1] [260], № 455.

[2] См. [260], № 452 (1).

приучить учащихся при вторичном чтении задачи проверять свой чертеж, то есть выяснять, все ли данные условия учтены; возможно ли другое расположение элементов (тогда надо сделать другой чертеж). Ученики должны научиться делать грамотный чертеж от руки.

3) Ученик составляет план решения задачи. Для этого проводит ряд рассуждений как аналитическим, так и синтетическим путем. Это самая ответственная часть в решении задачи, и вначале учитель должен помогать учащимся. Только когда ход решения обдуман, ученик приступает к его осуществлению. Если решение задачи проводится фронтально, то есть план составляется всем классом, то учитель должен выслушать и обсудить различные предлагаемые способы решения и выбрать из них наиболее рациональный.

Надо настойчиво требовать от учащихся предварительного обдумывания всего хода решения, не позволяя им начинать со случайных проб «может быть, что-нибудь получится».

4) Ученик выполняет решение задачи.

Иногда из решения задачи следует, что сделанный чертеж не соответствует задаче, в этом случае сделать новый чертеж.

Очень ценны задачи, которые допускают два ответа, обусловленные некоторой произвольностью в толковании условия задачи или возможностью различных взаимных положений элементов рассматриваемой фигуры. Решая такие задачи, учащиеся проводят своеобразное исследование. Примером может служить задача: «В окружность вписана трапеция, диагональ которой совпадает с биссектрисой угла при основании. Определить дуги, на которые делят окружность вершины трапеции, если один из углов трапеции равен 81°»[1]. В зависимости от того, биссектрисой какого угла (острого или тупого) является диагональ, получим тот или иной ответ. Иногда на возможность получения двух решений указывается в условии задачи[2].

Учащиеся должны научиться обосновывать весь ход решения. Очень часто соотношение элементов им очевидно по чертежу; например, видно, что треугольник равнобедренный или что некоторый угол прямой. Надо требовать доказательств этих фактов, если они не даны в условии. Хорошо сделанный чертеж помогает обнаружить свойства фигуры, но ученик должен понимать, что недостаточно только обнаружить свойства, их необходимо доказать.

При оформлении решения задачи ученики записывают все вычисления и необходимые обоснования. Запись может быть развернутой или краткой.

---

[1] См. [260], № 667, задача допускает два ответа: а) 81°, 81°, 81°, 117°, б) 99°, 99°, 99°, 63°. См. также задачу, приведенную ниже (стр. 562).

[2] См. [260], например, № 323, 351, 572, 617.

Чтобы научить учеников записывать решение задачи с развернутым объяснением, учитель должен показать им на примере нескольких задач, как записывать их решение. Однако нет надобности сопровождать решение каждой задачи подробной записью. Обычно при решении задач в классе ученик кратко записывает ход решения без подробных пояснений; однако он должен быть готов дать все обоснования. Задавая решить задачу дома, учитель определенно указывает, нужно ли выполнить решение с подробным обоснованием или можно ограничиться краткой записью. Рассказывая, как он дома решил задачу, ученик должен привести обоснование каждого шага устно. В контрольных работах обычно требуют подробного объяснения всего

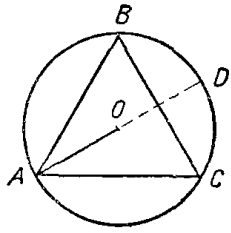


Рис. 64

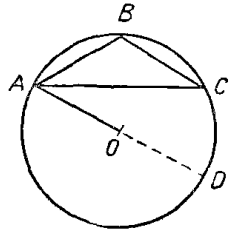


Рис. 65

решения, чтобы можно было проверить осознанность решения задачи учеником и его умение дать исчерпывающие обоснования.

В VII и VIII классах полезно проводить решение в общем виде, подставляя числовые данные только в окончательную формулу. Такой способ решения часто позволяет обнаружить некоторые общие свойства фигуры, в то же время он сокращает вычислительную работу.

Рассмотрим решение задачи для иллюстрации высказанных положений.

Задача. «Треугольник ABC — равнобедренный; радиус описанного круга OA образует с основанием AC угол OAC, равный $20°38'$. Определить $\angle BAC$»[1] (VIII класс).

Выполняя чертеж, ученик должен выяснить, что радиус OA может пройти как внутри треугольника ABC, так и вне его.

Для этого надо вспомнить, что центр описанного круга может лежать внутри треугольника, вне его и на стороне (последний случай отпадает, так как тогда радиус OA сливался бы со стороной).

Полезно сразу выполнить оба чертежа, но провести решение пока для одного случая (рис. 64, 65).

[1] См. [264], § 7, № 68.

Учащиеся составляют план решения, рассуждая примерно так:

а) Надо определить $\angle BAC$; это угол вписанный, то есть надо определить, сколько градусов содержит дуга, на которую он опирается

б) Чтобы определить дугу BC, надо найти какие-либо известные дуги Так как данный $\angle OAC$ тоже вписанный, то мы можем найти число градусов дуги, на которую он опирается (продолжаем AO до пересечения с окружностью), то есть дуги CD

в) Так как AD — диаметр, то известно и число градусов в дуге ABD

г) Но дуга BC равна дуге AB (так как хорды AB и BC равны), то есть составляет половину дуги ABC, а дуга ABC есть сумма дуг ABD и DC.

Анализ задачи окончен Его не надо записывать, но надо выяснить, могут ли ученики изложить вытекающий из него план решения

Решение можно выполнить или с проведением всех последовательных вычислений, или в общем виде Если выполнять все действия, то получим следующую запись решения:

1) $20°38' \cdot 2 = 41°16'$ (число градусов в дуге DC);

2) $180° + 41°16' = 221°16'$ (число градусов в дуге ABC);

3) $\frac{221°16'}{2} = 110°38'$ (число градусов в дуге BC),

4) $\angle BAC = \frac{110°38'}{2} = 55°19'$.

Если обозначить величину $\angle OAC$ в градусах через α, то последовательно получим:

1) 2α, 2) $180° + 2\alpha$, 3) $\frac{180° + 2\alpha}{2} = 90° + \alpha$; 4) $\angle BAC = 45° + \frac{\alpha}{2}$.

Остается подставить данное значение α Преимущество второго способа решения очевидно.

Решение задачи для второго случая (рис. 65) уже не представляет затруднений. Получаем ответ: $45° - \frac{\alpha}{2}$, или $\angle BAC = 34°41'$.

Общая формула решения интересна тем, что показывает зависимость угла равнобедренного треугольника от расположения центра описанного круга. Мы видим, что если центр лежит на стороне его, то $\alpha = 0$, и угол при основании треугольника равен 45°, то есть треугольник прямоугольный (при увеличении угла α угол при основании треугольника увеличивается, но остается меньше 90°, то есть $\alpha < 90°$).

Ход решения, рассмотренный нами, наиболее естественный, но могут быть предложены и другие пути. Рассмотрим один из них Проводим $OE \parallel AC$, тогда $\angle DOE = \angle OAC = \alpha$. Этот угол централь-

ный, следовательно, $\smile DE$ содержит α градусов, дуга EC также содержит α градусов.

Угол BOE — прямой; следовательно, дуга BE содержит 90°, а вся дуга BEC содержит $90°+\alpha$ (рис. 66). Так же может быть проведено решение и во втором случае. Некоторые ученики дают иногда оригинальные способы решения задач. Надо всемерно развивать инициативу школьников к поиску различных способов решения. Учитель при подготовке к уроку должен обдумать несколько вариантов решения и из предложенных учащимися способов выбрать наиболее рациональный. Заранее надо обдумать и расположение чертежа, и основу плана решения, и проведение записи.

Мы рассмотрели одну из более трудных задач на вычисление. Надо помнить, что *обучение начинают с решения легких задач* и на них школьники овладевают умением составлять план решения, приводить обоснование каждому этапу, схематически записывать решение.

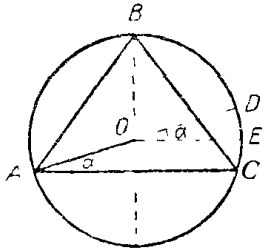


Рис 66

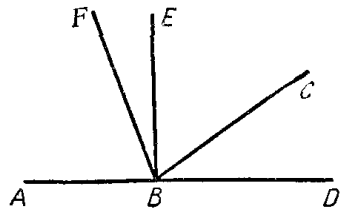


Рис. 67

Приведем схематическую запись решения задачи из первой темы VI класса.

Задача. Углы ABC и CBD смежные, $\angle CBD=0{,}4\,d$. Определить угол между перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой AB, и биссектрисой угла ABC (рис. 67).

Задача.

Дано:

$\angle ABC$ и $\angle CBD$ — смежные, $BE\perp AD$, BF — биссектриса $\angle ABC$, $\angle CBD=0{,}4\,d$.

Определить: $\angle FBE$.

Решение.

1) $\angle ABC+\angle CBD=2d$ по свойству смежных углов, поэтому $\angle ABC=2d-\angle CBD=2d-0{,}4d=1{,}6d$.

2) $\angle ABF=\angle ABC:2$, так как BF — биссектриса $\angle ABC$,

$$\angle ABF=1{,}6d:2=0{,}8d.$$

3) $\angle FBE=\angle ABE-\angle ABF$; $\angle ABE=d$, так как $BE\perp AD$.

Следовательно, $\angle FBE=d-0{,}8d=0{,}2d$.

Ответ: $\angle FBE=0{,}2d$.

Более краткая запись этого решения:
1) $\angle ABC = 2d - 0{,}4d = 1{,}6d$;
2) $\angle ABF = 1{,}6d : 2 = 0{,}8d$;
3) $\angle FBE = d - 0{,}8d = 0{,}2d$.

В дальнейшем учащиеся, пользуясь определениями (например, биссектрисы угла), ведут запись условия с применением большего числа математических символов (см., например, запись условия задачи 1 на стр. 567).

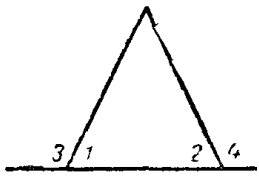
§ 13. Задачи на доказательство

В задачах на доказательство требуется обосновать некоторое утверждение относительно геометрической фигуры, которое высказано заранее. Таким образом, по существу мы имеем дело с доказательством теоремы, не включенной в программу. В число задач на доказательство обычно включают и задачи на отыскание зависимостей между элементами какой-либо геометрической фигуры, примеры которых нами рассмотрены в § 7.

Решение задач на доказательство имеет большое значение в развитии логической мысли ученика.

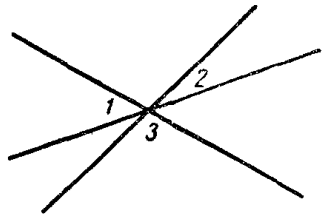
Решение наиболее *простых задач на доказательство надо начинать еще при изучении первой темы геометрии.*

Задачи на доказательство могут предлагаться различно: можно дать учащимся готовый чертеж, на котором отмечено, что дано, или предложить им изготовить чертеж по условию задачи



Дано $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\angle 3 = \angle 4$

Рис. 68



Доказать: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$

Рис 69

Первый прием легче, и надо начинать с него. Лучше всего, если учитель имеет заранее заготовленные на больших листах чертежи, что позволяет сэкономить на уроке время. На рисунках 68 и 69 изображены условия задач такого рода [1].

---

[1] См [222], [227], [265] (статьи Б К. Добронравова «Задачи на доказательство в курсе геометрии VI и VII классов», Е Отто «Решение геометрических задач на доказательство в VI классе»), «Математика в школе», 1941, № 4, М Бернштейн «Задачи на доказательство в курсе геометрии», 1959, № 4, С А Кузьмина и И С. Соминский «Задачи на доказательство в курсе геометрии VI класса».

Полезно один и тот же чертеж использовать для решения различных задач, чтобы приучить учеников разбираться в том, что дано, то есть чем можно пользоваться при доказательстве.

Например, к одному чертежу (рис. 70) могут быть даны три задачи.

1) Дано: $CD \perp AB$, $\angle 1 = \angle 4$.
Доказать: $\angle 2 = \angle 3$.

2) Дано: $\angle 2 = \angle 3$. $\angle ACD = d$.
Доказать: $\angle 1 = \angle 4$.

3) Дано: $\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 3$.
Доказать: $CD \perp AB$.

Решение первых задач проводится устно всем классом с помощью учителя.

Особенно много задач на доказательство может быть предложено при изучении признаков равенства треугольников, см.

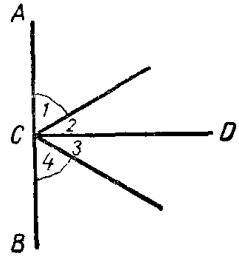


Рис. 70

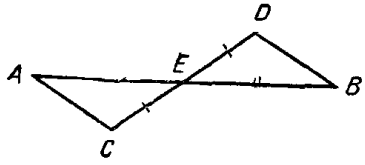


Рис. 71

например, рис. 71. Соответственно равные отрезки на чертеже отмечены. Решение этой задачи может быть использовано при измерении расстояния на местности.

Если задачи на доказательство решаются только на готовом чертеже, то ученикам не приходится выяснять математическое содержание задачи по условию, выраженному словами. Между тем необходимо постепенно воспитывать у учащихся умение самостоятельно разбираться в условии задачи и выполнять чертеж (этому обучаются они и при решении задач на вычисление). Постепенно надо переходить к решению задач по задачнику сначала в классе, когда учитель может руководить работой учеников, а потом и дома. Если решение задачи на доказательство не проводится устно, то оно оформляется так же, как оформляется доказательство теоремы [1].

Задачи на доказательство по готовому чертежу могут быть использованы для самостоятельной или для контрольной работы. Вывесив один чертеж, учитель предлагает к нему ряд задач с измененными данными. Каждый ученик получает карточку с

[1] См. гл. II, § 7.

записью, что дано и что требуется доказать. Разнообразие вариантов обеспечивает самостоятельность работы учащихся.

Например, к рисунку 72 может быть дан целый ряд задач.

1) Дано: $AB=BC$; $AD=EC$;
Доказать: $BD=BE$.
2) Дано: $AB=BC$; $\angle 1=\angle 2$.
Доказать: $BD=BE$.
3) Дано: $BD=BE$; $AD=EC$.
Доказать: $AB=BC$.
4) Дано: $\angle 5=\angle 6$; $AD=EC$.
Доказать: $AB=BC$.
5) Дано: $\angle 3=\angle 4$; $\angle 1=\angle 2$.
Доказать: $\angle 5=\angle 6$.
6) Дано: $AD=EC$; $\angle 7=\angle 8$.
Доказать: $AB=BC$ и т. п.[1].

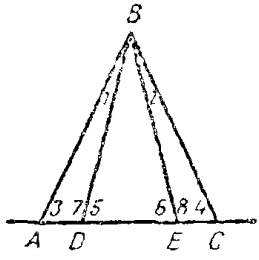


Рис 72

Учащимся при решении задач приходится пользоваться различными признаками равенства треугольников; то прямой, то обратной теоремой о равнобедренном треугольнике, свойством смежных углов, поэтому такие упражнения очень полезны.

Можно привлекать учащихся к составлению задачи по готовому чертежу.

Подобные варианты к одному и тому же чертежу могут быть использованы для устных упражнений на доказательство.

При решении задач на доказательство приходится применять те же способы рассуждения, которые были рассмотрены при доказательстве теорем, то есть проводить анализ для выявления пути доказательства.

В результате такой последовательной работы ученики смогут самостоятельно решать задачи из задачника. Часть задач из задачника можно перенести на большие листы бумаги (чертеж и условие). Такие плакаты используются для устных упражнений.

Приведем оформление решения задач на доказательство.

Задача 1. «Доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны»[2] (VI класс).

Дано: $\triangle ABC$; $AB=BC$ (рис. 73);
$\angle BAD=\angle DAC$;
$\angle BCE=\angle ECA$.

Доказать: $AD=EC$.

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle AEC$ и $\triangle ADC$.

1) $\angle EAC=\angle DCA$, так как в треугольнике ABC по условию $AB=BC$.

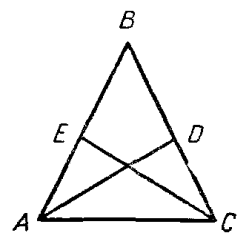


Рис. 73

[1] См. также [260], № 150, 163.
[2] См. [260], № 164 (1).

2) $\angle ECA = \angle DAC$, как половины равных углов BCA и BAC.
3) AC — общая сторона.

Следовательно, $\triangle AEC = \triangle ADC$ (по стороне и двум прилежащим углам) и $EC = AD$, так как лежат против равных углов в равных треугольниках.

При составлении плана доказательства ученики должны были провести анализ: чтобы доказать, что отрезки AD и EC равны, отыскиваем два треугольника, элементами которых они являются. Выбрав такие два треугольника ADC и AEC, надо доказать их равенство. Для этого остается отыскать соответственно равные элементы, удовлетворяющие какому-нибудь признаку равенства треугольников. Для доказательства могли быть выбраны и другие два треугольника: ABD и BEC. Этот вариант доказательства надо рассмотреть.

Задача 2. «В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляры, проведенные через вершины тупых углов к диагонали AC, пересекают ее в точках M и N (рис. 74). Доказать, что $BN = DM$»[1] (VII класс).

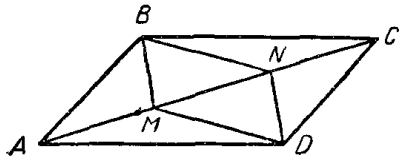


Рис. 74

Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$BM \perp AC$;
$DN \perp AC$.

Доказать: $BN = DM$.

Доказательство.

1) $BM \parallel DN$, так как $BM \perp AC$ и $DN \perp AC$.
2) $\triangle ABM = \triangle NCD$, так как $AB = CD$, $\angle AMB = \angle DNC = d$, $\angle BAM = \angle NCD$ ($AB \parallel CD$ и AC — секущая); следовательно, $BM = ND$.
3) $BNDM$ — параллелограмм, так как

$$\left.\begin{array}{l} BM \parallel ND \\ BM = ND \end{array}\right\}, \text{ откуда } BN = DM.$$

Ученик должен уметь обосновать каждое звено вывода, уметь сформулировать то свойство или теорему, которыми он пользовался.

Проводя анализ условия задачи, прежде всего выясняем, как доказать равенство двух отрезков BN и DM, могут быть предложены два пути:

1) Доказать, что четырехугольник $MBND$ — параллелограмм (чертеж подсказывает учащимся эту мысль).

2) Найти два треугольника, сторонами которых являются соответственно отрезки BN и DM и равенство которых можно доказать (чаще всего учащимся приходилось доказывать равенство отрезков, используя признаки равенства треугольников).

[1] См. [260], № 384 (1).

Рассмотрим первый вариант.

1. Чтобы доказать, что $MBND$ параллелограмм, надо использовать один из признаков параллелограмма. Так как о сторонах BN и DM нам ничего не известно, рассмотрим стороны BM и ND.

Надо доказать, что $BM \parallel ND$ и $BM = ND$.

2. Устанавливаем, что параллельность сторон легко доказать, так как $BM \perp AC$ и $DN \perp AC$.

3. Чтобы доказать равенство отрезков BM и ND, опять могут быть предложены различные способы. доказательство равенства треугольников ABM и CND, или доказательство равенства треугольников BMC и AND, или использование равенства треугольников ABC и ACD, в которых BM и ND являются соответственными высотами.

На этом анализ заканчивается — следует доказательство, проводимое синтетически одним из указанных способов. Аналогично может быть проведен анализ второго пути.

Рассмотрение различных способов доказательства одного и того же положения развивает комбинаторные способности учащихся, заставляет их искать наиболее рациональное решение.

В заключение отметим, что своеобразным вариантом задач на доказательство является обоснование устройства некоторых инструментов или приборов.

Рассмотрим некоторые из таких приборов.

1) *Параллельные линейки* (рис. 75). Объяснить, на чем основано устройство этого инструмента.

2) *Параллельные тиски* (рис. 76).

3) *Весы для писем* (рис. 77). Объяснить, почему стержень, поддерживающий чашку весов, сохраняет вертикальное положение.

4) *Мерная вилка* (рис. 78) служит для измерения диаметра древесных стволов.

5) *Центроискатель* (рис. 79, *а*, *б*). Объяснить, на чем основано применение прибора.

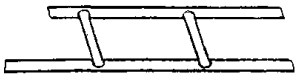


Рис 75

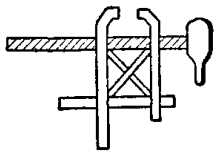


Рис. 76

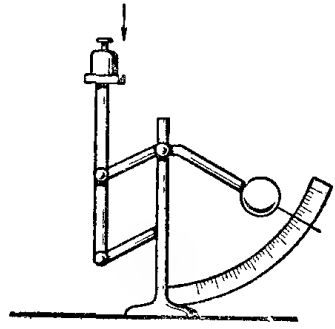


Рис. 77

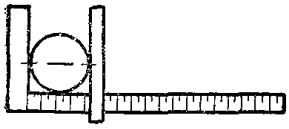
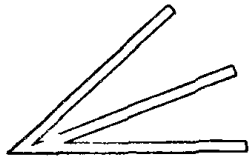


Рис. 78



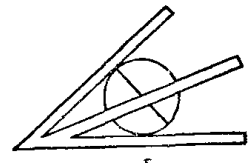


Рис. 79

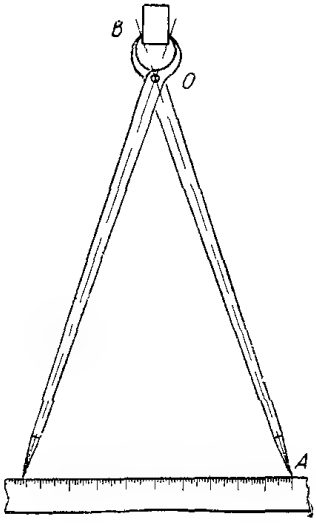


Рис. 80

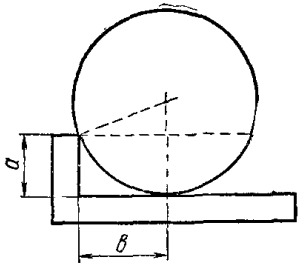


Рис. 81

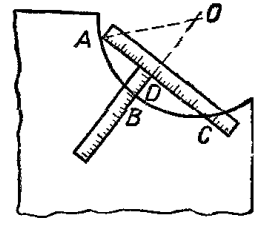


Рис 82

6) Для измерения толщины тонких пластинок употребляют прибор, изображенный на рисунке 80. Объяснить принцип устройства и прием пользования прибором, если $AO : OC = 10 : 1$ (VIII класс, подобие треугольников).

7) На рисунке 81 показано, как при помощи простого приспособления можно вычислить диаметр цилиндрических деталей; измерив величины a и b, диаметр находят по формуле $2R = \frac{a^2 + b^2}{a}$. Доказать справедливость формулы (VII класс, теорема Пифагора, диаметр, перпендикулярный к хорде).

Видоизменение предыдущего прибора показано на рисунке 82 для измерения радиусов дуг деталей, представляющих собой выемки. Составить формулу для вычисления радиуса дуги, указать, какие величины достаточно измерить

$$\left(R = \frac{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + BD^2}{2BD} \right).$$

Для решения задач на уроках[1] в школе надо иметь соответствующие чертежи, а еще лучше модели приборов.

[1] Задачи 1—4 взяты из кн. [261]. См также [260], № 356, 414.

§ 14. Задачи на построение

С первых уроков геометрии ученики выполняют различные построения, пользуясь при этом линейкой, угольником, циркулем, транспортиром и другими инструментами. Геометрические построения помогают им осознавать свойства фигур.

Под задачей на построение понимают задачу, в которой по некоторым конструктивно заданным элементам фигуры (то есть построенным на чертеже) и другим условиям требуется построить фигуру [1].

Решение задачи на построение существенно зависит от того, какими инструментами пользуются при построении.

В традиционных курсах геометрии до сих пор под задачами на построение понимались «классические» задачи, решение которых состояло из ряда простейших операций, выполняемых с помощью циркуля и линейки:

1) построение прямой через две известные точки (данные или построенные);

2) проведение окружности или дуги, центр и радиус которой известны (даны или построены);

3) нахождение точки пересечения двух прямых;

4) нахождение точки пересечения прямой и окружности;

5) нахождение точки пересечения двух окружностей.

Если к циркулю и линейке присоединить другие инструменты, то список основных операций расширится. Так, присоединение угольника дает еще две операции:

6) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку;

7) проведение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку (линейка и угольник).

Возможность выполнения этих операций в теории геометрических построений постулируется [2], в школе же эта возможность обнаруживается на практике, и ученики в процессе решения простейших задач приучаются пользоваться надлежащими инструментами.

Применяя различные инструменты, можно по-разному решать одну и ту же задачу, например:

«Через данную на прямой точку провести к ней перпендикуляр».

а) Решение угольником (рис. 83, *а*).

б) Решение линейкой и угольником (рис. 83, *б*).

в) Решение циркулем и линейкой (рис. 83, *в*).

г) Решение двусторонней линейкой (рис. 84) [3].

---

[1] Подробнее о постановке задач на построение см. [275], § 2—4.

[2] См., например, [217], [275].

[3] См. [260], № 413.

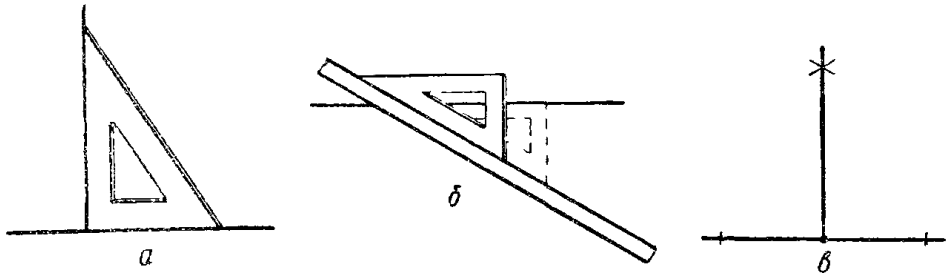


Рис. 83

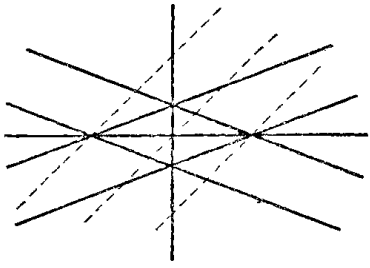


Рис 84

Требование рациональности построения заставляет нас избрать первый способ (а), однако другие пути показывают, как можно было бы поступить при отсутствии угольника.

Задача приближения школьного преподавания к жизни требует получения учащимися навыков пользования различными чертежными инструментами и приемами, применяемыми на практике.

При построениях используются циркуль, линейка, угольник, малка, транспортир. Включение в число конструктивных инструментов угольника значительно упрощает решение многих задач, включение транспортира как инструмента построения позволяет решать ряд задач, связанных с построением углов, что очень важно при прохождении темы «Треугольник».

Необходимо обращать внимание на то, чтобы учащиеся выбирали наиболее рациональные приемы построения. При выполнении построения допускается применение приемов приближенного решения соответствующей задачи, широко распространенных в чертежной практике. «Например, классическое построение касательной к окружности при помощи циркуля и линейки сохраняется для доказательства существования касательной, практически же можно проводить касательную прикладыванием линейки к окружности»[1]. Такая постановка обучения решению задач на построение позволяет сберечь время, так как при употреблении лишь циркуля и линейки оно уходит на выполнение громоздких дополнительных построений.

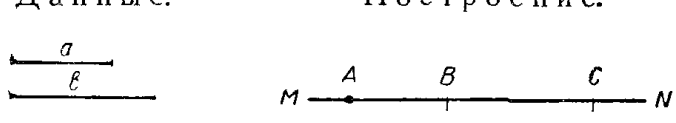
Задачи на построение в сборнике задач Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой включены во все разделы с самого начала кур-

[1] См. [6], стр. 16.

са. Например, при изучении основных понятий и действий с отрезками № 2, 4, 8—12, 43, 44 и др. Большое место занимают задачи на построение фигуры с последующим измерением некоторых ее элементов, например № 16, 18, 20, 32, 148 и др. При решении этих задач ученики выполняют только построение. Цель их — развить умение пользоваться инструментами для построения и измерения длин, углов, а также научить решать задачи, встречающиеся в жизненной практике (например, при работе учащихся в мастерских).

Уже при решении первых задач на действия с отрезками надо обучить школьников отличать данные элементы от произвольно взятых, выбирать инструменты для решения задачи в зависимости от ее характера.

Так, если учащиеся решают задачу с конкретными данными, например: «Построить сумму двух отрезков, изображенных на чертеже», то пользуются либо масштабной линейкой, либо измерительным циркулем и линейкой. Если требуется построить сумму двух отрезков, заданных длинами (4,2 *см* и 3,8 *см*), то надо пользоваться масштабной линейкой, либо с масштабной линейки «брать» расстояния циркулем-измерителем и переносить на произвольно проведенную прямую. Если, наконец, задача поставлена в общем виде: «Построить отрезок, равный сумме двух данных отрезков a и b», то надо изобразить сначала эти данные отрезки, а затем начинать построение. Примерное оформление задачи в последнем случае может выглядеть так (рис. 85):



Построить: $a+b$.

1) прямая MN;
2) точка A;
3) $AB=a$, $BC=b$, $AC=AB+BC=a+b$.

Рис. 85

При выполнении построений приходится вводить произвольные элементы. Ученики должны уметь провести «произвольную» прямую, отметить на ней «произвольную» точку (прямая MN, точка A в предыдущем примере).

После выполнения даже простейших построений надо отмечать их определенность или неопределенность (провести прямую через две точки, через одну точку), выяснить условие возможно-

сти построения (построение отрезка, равного разности двух данных отрезков) и т. п.

Решая задачи на построение, школьники убеждаются в возможности выполнения простейших построений, которые теоретически обусловливаются принятыми постулатами. Педагог помогает учащимся осознать эту возможность постановкой конкретных вопросов. Так, при построении окружности учитель спрашивает, где лежит центр окружности, каков ее радиус. В дальнейшем при построении окружности ученик сам указывает ее центр и радиус. Он должен различать, строит ли окружность произвольного или данного радиуса. Отмечая точку, ученик должен знать, в результате пересечения каких линий он ее получил, если она не взята произвольно. Учащийся часто делает «засечки», не понимая, что это такое. Для большей ясности лучше проводить дуги, а иногда и полные окружности; в этом случае не «потеряются» точки пересечения линий, если их несколько.

Постепенно в курс геометрии включаются задачи на построение, выполнение которых тесно связано с рассматриваемым теоретическим материалом; решение большинства из них сопровождается доказательством правильности построения. Это следующие задачи.

VI класс

1) Построение треугольника по трем сторонам.

2) Построение угла, равного данному.

3) Построение треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

4) Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

5) Деление отрезка пополам.

6) Построение перпендикуляра к данной прямой через точку, данную на прямой или вне ее.

7) Деление угла пополам.

8) Проведение прямой, параллельной данной.

VII класс

1) Деление отрезка на равные части.

2) Построение окружности, проходящей через три данные точки.

VIII класс

1) Деление отрезка в данном отношении. Построение среднего геометрического.

2) Построение правильных шестиугольника, треугольника и четырехугольника [1].

Решение этих задач должно быть хорошо усвоено учащимися, в дальнейшем каждая из них включается как составная часть в решение новых задач.

[1] Решение каждой из перечисленных задач приведено в [258].

Как известно, решение задачи на построение состоит из четырех частей: *анализа, построения, доказательства и исследования*. Учитель постепенно знакомит учащихся с этими этапами путем постановки ряда конкретных вопросов.

Первые задачи, решаемые в начале курса, например построение суммы отрезков (углов) или построение треугольников по основным элементам и легко сводящиеся к ним, не требуют анализа, так как ученикам сразу ясен порядок построения. Решая задачу «Построить прямоугольный треугольник по двум катетам», ученики сразу определят, в каком порядке выполнять построение. Решение же задачи «Построить прямоугольный треугольник по катету, равному 6 *см*, и биссектрисе прямого угла, равной 4 *см*» требует анализа [1].

Учитель ставит перед учащимися вопрос: «В каком порядке будем производить построение?» Чтобы это выяснить, на доске изображают произвольный прямоугольный треугольник ABC, в нем проводят биссектрису CK угла C (рис. 86).

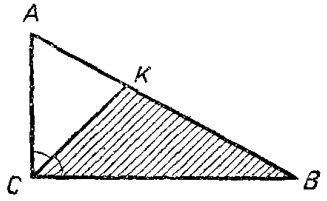


Рис. 86

Выясняя, что CK делит $\triangle ABC$ на два треугольника, а каждый из углов $\angle ACK$ и $\angle KCB$ равен 45°, учащиеся приходят к выводу, что $\triangle CKB$ можно построить по двум сторонам $CB=6$ *см*, $CK=4$ *см* и углу между ними $\angle KCB=45°$ (такая задача рассматривалась ранее). Если этот треугольник построен, то две точки B и K на гипотенузе определяют ее положение и вершину A можно построить как пересечение луча BK и луча, выходящего из точки C под прямым углом к CB (или под углом 45° к CK).

План в общих чертах намечен, то есть выполнен анализ задачи (возможны и другие варианты анализа).

Построение может быть осуществлено различными инструментами, поэтому фактическое построение может быть выполнено различно:

а) строим прямой угол (угольником), проводим его биссектрису (циркулем и линейкой) и т. д.; б) строим прямой угол (угольником), затем угол 45° (транспортиром) и т. д.; в) строим прямой угол (угольником), затем угол 45° (угольником, представляющим собой равнобедренный прямоугольный треугольник) и т. д.

Учащиеся могут выполнять построение самостоятельно, полезно затем сравнить способы построения, примененные различными учениками, выделив более простые. Это развивает творческую инициативу учащихся.

После того как построение выполнено, можно задать вопро-

[1] См. [260], № 303.

сы, какой треугольник построен и какие элементы в нем равны заданным. Ответы на них являются подготовкой к осуществлению в дальнейшем доказательства. Также можно выяснить, все ли частные построения выполнимы, что готовит учащихся к выполнению исследования. Заметим, что по данным рассмотренной задачи можно построить единственный треугольник, чего нельзя сказать, если задача поставлена в общем виде (см. след. стр.).

При построении более сложных фигур доказательство становится необходимой частью решения задачи. Решая задачу «Построить параллелограмм по двум сторонам и углу, заключенному между ними» [1], после построения треугольника ABD (рис. 87), можно идти разными путями, например: а) провести из точек B и D дуги, радиусы которых равны соответственно сторонам параллелограмма, то есть построив $BC=AD$ и $DC=AB$, или б) построить $BC\|AD$ и $DC\|AB$, или в) $BC\|AD$ и $BC=AD$.

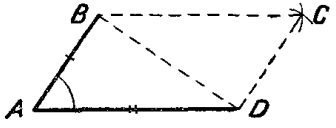


Рис. 87

Теперь необходимо доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Ход доказательства зависит от способа построения, это не всегда понимают учащиеся. Надо, чтобы они усвоили, что при доказательстве мы считаем данными все выполненные построения. Так, в приведенном примере обоснование того, что построенный четырехугольник — параллелограмм, опирается на теорему «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм», если построение выполнено первым способом, а если вторым способом, то на определение параллелограмма.

В восьмилетней школе нецелесообразно решать задачи, требующие сложного исследования, но в тех задачах, которые решаются, необходимо проводить его полностью.

В VI классе даются преимущественно задачи, имеющие одно решение. В тех же случаях, когда решений несколько, выявить различные способы решения можно, изменяя данные задачи так, чтобы при построении получались различные случаи (по существу решается несколько задач с конкретными данными).

Так, при построении треугольника по трем сторонам можно менять длины двух сторон, например, давая такие значения:

1) $a=10$ *см*, $b=8$ *см*, $c=7$ *см*;
2) $a=10$ *см*, $b=6$ *см*, $c=4$ *см*;
3) $a=10$ *см*, $b=6$ *см*, $c=3$ *см*.

Решая эти конкретные задачи, ученики делают вывод о невозможности решения во втором и третьем случаях и выясняют причины этого.

[1] См. [260], № 359 (а).

В VII и VIII классах необходимо путем вопросов выяснять, когда задача имеет несколько решений и когда не имеет решения.

Так, приведенная выше задача № 303 может быть в VII классе решена с данными в общем виде, то есть если даны: катет, равный a, и биссектриса прямого угла l. После построения следует выяснить, что задача не имеет решения, если BK не пересечет CN (рис. 88), это будет, если $l \geqslant a\sqrt{2}$.

Если $BK \| CN$, то $\triangle CKB$ — прямоугольный, равнобедренный, следовательно $CK^2 = 2a^2$ и $CK = a\sqrt{2}$. Задача может быть дана после изучения теоремы Пифагора.

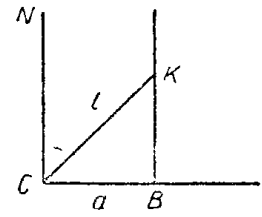


Рис. 88

В некоторых задачах, чтобы облегчить проведение исследования, можно ввести в условие задачи ограничение относительно расположения данных, их величины, соответствия и др.

Решая задачу «Через две данные точки провести окружность с центром на данной окружности»[1], введем в условие ограничение: «данные точки расположены вне окружности». На выполнении анализа и построения это ограничение не отразится, но исследование значительно упростится.

Для его проведения хорошо иметь на кальке чертеж с изображенными на нем двумя точками A и B и перпендикуляром l к отрезку AB, проведенным через его середину. Начертив на доске данную окружность с центром O (в дальнейшем будем говорить «окружность O»), можно по-разному располагать точки (передвигая кальку), показать все случаи расположения прямой l относительно окружности O (рис. 89).

Рассматривая эти чертежи, учащиеся делают вывод: если l пересекает окружность O, то задача имеет два решения (рис. 90); центры искомых окружностей — точки K и K_1, радиусы $KA = KB$ и $K_1A = K_1B$ и т. д.

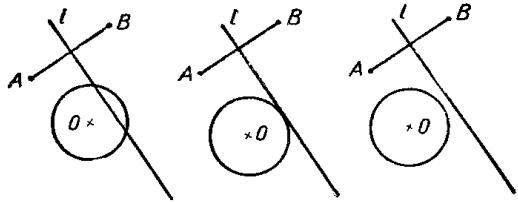


Рис. 89

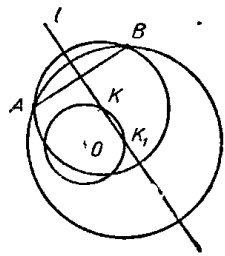


Рис. 90

[1] См [260], № 614 (2).

Решая задачу, мы ограничили условие; если бы этого не сделали, надо было бы рассмотреть и другие случаи расположения точек относительно окружности.

Приведем пример ограничения другого характера. Чтобы ученики успешно справились с задачей «Построить треугольник по отношению его сторон 4 : 6 : 7, если одна из его сторон равна a», имеющей 3 решения, полезно раньше решить задачу с конкретными данными.

Такова задача «Построить треугольник по отношению его сторон 4 : 6 : 7, если меньшая из его сторон равна 15 *мм*»[1], эта задача имеет одно решение.

Запись решения задачи должна быть краткой. Как производятся основные построения (каким инструментом и т. п.) и выполняется решение задач, перечисленных на стр. 574, не описывается подробно, а только фиксируется сам факт выполнения этого построения[2]. Анализ иногда проводится устно, иногда можно ограничиться чертежом и отмеченной на нем первоначальной фигурой, с которой начинается построение. Запись доказательства аналогична записи решения задач на доказательство.

Давая задание в классе или на дом, учитель должен оговорить, какие моменты решения задачи ученик должен записать и каким образом; предварительно формы записи должны быть рассмотрены с учащимися.

В исследовании должны быть сделаны чертежи с различно расположенными друг относительно друга данными, от которых зависит число решений.

На чертежах, сопровождающих исследование задачи, не обязательно соблюдать точное соответствие между данными, чертежи могут быть сделаны от руки, главное в исследовании — понимание учениками различных случаев возможных решений, а не точность построения.

В некоторых случаях исследование задачи можно показать на готовых чертежах, изготовленных заранее[3]. Полезно иметь и образцы различных форм записи решений.

Приведем возможное оформление решения задачи на построение

З а д а ч а. «Построить треугольник по стороне, медиане, проведенной к другой стороне, и углу, который образует эта медиана с данной стороной»[4].

---

[1] См. [260], № 815 (1; 2).

[2] См. ниже запись первого пункта построения.

[3] См. рис 98

[4] См. [260], № 305.

Данные (рис. 91). Анализ (рис. 92).

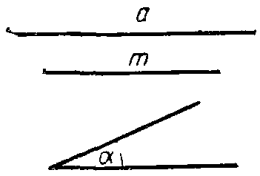


Рис 91

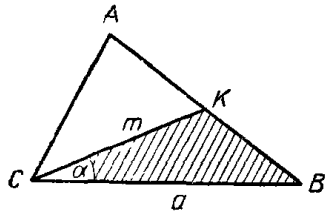


Рис 92

Построение (рис. 93).

1) $\triangle CKB$, $CB=a$, $\angle BCK=\alpha$, $CK=m$.

2) Продолжаем BK.

3) $KA=KB$.

4) AC, $\triangle ABC$.

Доказательство.

1) CK — медиана, так как $BK=KA$.

2) $CK=m$, $CB=a$, $\angle KCB=\alpha$, следовательно, $\triangle ABC$ — искомый.

Исследование

Построение всегда возможно. Решение единственное.

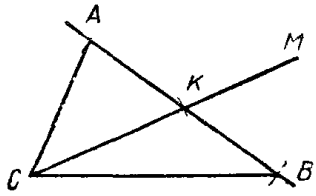


Рис. 93

Ознакомление с понятием геометрического места точек и решение задач на построение методом геометрических мест.

Большинство задач в восьмилетней школе решается методом геометрических мест. Им пользуются неявно уже при решении первых задач на построение отрезков, углов, треугольников.

Понятие о геометрическом месте точек, обладающих определенным свойством,— одно из существенных понятий геометрии. На нем учащиеся знакомятся с понятием множества, совокупности, играющим большую роль в современной математике.

Однако понимание определения геометрического места точек представляет для учащихся значительные трудности, так как заключает в себе два предложения (прямое и обратное или прямое и противоположное). Определение *гмт* [1], данное в учебнике Н Н Никитина [2], заключает в себе прямое и противоположное предложения: «Фигура (например, линия), все точки которой обладают одним и тем же свойством, а ни одна из других точек плоскости этим свойством не обладает, называется геометрическим местом точек, обладающих данным свойством».

В соответствии с этим определением при рассмотрении конкретных *гмт* каждый раз формулируются два предложения:

[1] В дальнейшем иногда вместо полного термина «геометрическое место точек» мы будем писать *гмт*.

[2] См. [258].

1) если точка принадлежит фигуре l, то она обладает свойством A, и 2) если точка лежит вне фигуры l, то она не обладает свойством A.

Известно, что можно дать и другие определения понятия *гмт*. Приведем некоторые из них. В учебнике А. П. Киселева дано такое определение: «Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такая линия (или поверхность в пространстве) или вообще такая совокупность точек, которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им». Это определение чрезвычайно громоздко и малодоступно учащимся. Более короткое определение дает Д. И. Перепелкин: «Геометрическим местом точек называется совокупность всех точек, обладающих некоторым свойством, и только этих точек» [1]. Н М. Бескин предлагает такое определение: «Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется множество всех точек, обладающих этим свойством» [2]. Это определение подразумевает знакомство с понятием множества точек, обладающих данным свойством, как такого, в котором нет точек, этим свойством не обладающих.

В программе восьмилетней школы нет общего понятия геометрического места точек, обладающих некоторым свойством. Однако в восьмилетней школе фактически рассматриваются конкретные геометрические места точек, обладающих определенным свойством — перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину, и другие, которые затем используются при решении задач и доказательстве теорем.

Учитель может вводить термин *гмт* или не вводить его, в последнем случае надо каждый раз говорить о свойстве точек, принадлежащих соответствующей линии, выясняя при этом, что вне этой линии точек, обладающих данным свойством, нет.

Может быть введен и термин «множество» точек, обладающих определенным свойством, если учащиеся уже ознакомлены с ним на уроках арифметики и правильно его понимают.

Мы считаем, что введение понятий *гмт* или «множество точек» облегчает формулировки многих предложений и терминологию при решении задач на построение. Необходимо только, не требуя заучивания каких бы то ни было определений, путем специальной работы постепенно подготовить учащихся к усвоению сущности понятия и научить применять понятие *гмт* к решению несложных задач.

---

[1] Д И Перепелкин, Геометрические построения в средней школе. М., Учпедгиз, 1953

[2] См [22]. Некоторые авторы просто указывают, что *гмт* есть только другой термин, синоним «множества точек». См. [253].

В дальнейшем изложении мы будем употреблять термин *гмт*.

В VI классе могут быть рассмотрены три линии как *гмт* — окружность, перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину, и биссектриса угла.

Чтобы в каждом случае ученики правильно усвоили рассматриваемые *гмт*, лучше всего ставить перед ними конкретные вопросы, обобщать решение конкретно поставленных задач. Например, чтобы подвести учеников к усвоению понятия об окружности как о *гмт*, надо предложить им построить несколько точек плоскости, находящихся на расстоянии 2 *см* от данной точки A. Если надо построить все такие точки, то где они будут находиться? Будут ли точки, не лежащие на окружности, находиться от точки A на расстоянии 2 *см*? Выяснив это, можно сказать, что всякая точка окружности находится на расстоянии 2 *см* от точки A, а точки плоскости, не лежащие на окружности, этим свойством не обладают.

Если учитель вводит термин *гмт* (или «множество точек»), обладающих данным свойством, то он сообщает ученикам, что построенную окружность принято называть геометрическим местом (или множеством всех) точек плоскости, удаленных от точки A на 2 *см*. Далее можно задать расстояние отрезком a, который изобразить графически, и провести аналогичное рассуждение.

Чтобы сделать ясным недостаточность одного первого положения, следует начертить из центра O дугу AB радиуса, равного, например, 10 *см*. Каждая точка дуги AB удовлетворяет условию — отстоит от точки O на 10 *см*. Можно ли сказать, что все точки, не лежащие на дуге, этим свойством не обладают? Является ли дуга *гмт* плоскости, отстоящих от точки O на 10 *см*?

Введение понятия *множества точек* требует несколько иного рассуждения. После того как выяснено, что каждая точка дуги отстоит от точки O на 10 *см*, следует спросить: «Все ли точки плоскости, удаленные от точки O на 10 *см*, лежат на дуге? Является ли дуга множеством всех точек плоскости, удаленных от точки O на 10 *см*?»

Если ни один из терминов не вводится, учитель, рассмотрев задачу на построение точек плоскости, удаленных от точки A на 2 *см*, ограничивается выводом, что каждая точка окружности находится на расстоянии 2 *см* от точки A, а точки плоскости, не лежащие на окружности, этим свойством не обладают (второе положение может быть заменено обратным — «Все точки плоскости, отстоящие от точки A на 2 *см*, лежат на проведенной окружности»). Здесь следует заметить, что установленными свойствами ученики будут пользоваться при решении задач.

Рассмотренное понятие об окружности как о *гмт* плоскости, удаленных от данной точки на данное расстояние, необходимо сразу же применять к решению несложных задач [1].

Изучение *гмт* плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка, можно начать с задачи.

На плоскости дан отрезок AB длиной 3 *см*. Построить точку плоскости, удаленную от точки A на 2 *см* и от точки B на 2 *см*; точку, удаленную от A на 1,5 *см* и от B на 1,5 *см*, и т. д.

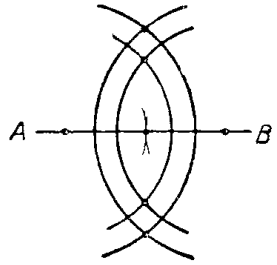


Рис. 94

Построив ряд точек по этому заданию, учащиеся наблюдают их расположение (рис. 94). Если точки соединить, то делается очевидным, что они расположены на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину.

Учащиеся вспоминают соответствующие теоремы, доказанные ранее (прямую и противоположную), и заключают, что на этом перпендикуляре лежат точки, равноудаленные от точек A и B, а вне его таких точек нет. Делается вывод, что перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину, есть *гмт* плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка.

В восьмилетней школе рассматриваются только геометрические места точек на плоскости. Так как мы это подразумеваем, то, формулируя соответствующие выводы, иногда не делаем должной оговорки. Однако учитель должен понимать, что если эту оговорку снять, то получится совсем другой геометрический объект. Например, если говорить о геометрическом месте точек, удаленных на определенное расстояние от данной точки, не ограничиваясь плоскостью, то получим сферическую поверхность; геометрическим местом точек, удаленных от прямой на данное расстояние, является цилиндрическая поверхность и т. д.

Полезно при рассмотрении какого-либо *гмт* плоскости, обладающих определенным свойством, поставить перед учениками вопрос о расположении точек, обладающих тем же свойством, в пространстве. При этом следует показать соответствующие модели. Постановка такого рода вопросов развивает пространственное воображение учащихся, расширяет их кругозор.

Параллельно с рассмотрением *гмт* надо решать задачи, приводящие к ним. Решение должно сопровождаться построением точек, обладающих определенным свойством. Приведем примеры.

1. При рассмотрении окружности как *гмт* можно решить задачу: «Найти геометрическое место середин радиусов данной окружности». Если ученики не овладели термином *гмт*, следует выяснить его смысл путем постановки нескольких во-

[1] См. приведенные ниже задачи, стр. 583, 584.

просов. Постройте несколько радиусов данной окружности, отметьте их середины (рис. 95, *а*). На какой линии лежат отмеченные точки? Каждая ли точка проведенной окружности (рис. 95, *б*) есть середина какого-либо радиуса данной окружности? Выберем произвольную точку M проведенной окружности; проведем радиус данной окружности через точку M. Является ли точка M его серединой? Ставим точку N вне проведенной окружности (см. рис. 95, *б*). Может ли точка N быть серединой какого-либо радиуса данной окружности?

2. «На какой линии расположены вершины треугольников, которые имеют общее основание $AB=7$ *см* и стороны которых, выходящие из вершины A, имеют данную длину 5 *см*?»

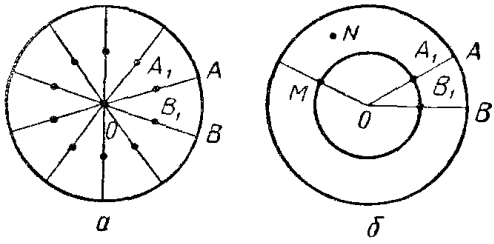


Рис. 95

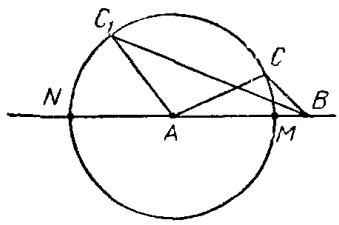


Рис. 96

Решая эту задачу, выясняем, что не все точки окружности с центром в точке A радиуса 5 *см* (рис. 96) могут быть вершинами треугольника, основание которого равно AB. Точки M и N не могут быть вершинами треугольника с основанием AB.

3. «Как располагаются вершины равнобедренных треугольников, имеющих общее основание $AB=6$ *см*? Каково геометрическое место вершин таких треугольников?»

4. «Построить несколько треугольников, имеющих данное основание $AB=4$ *см* и $\angle A=40°$. Сколько треугольников можно построить? Как расположены их третьи вершины? Каково геометрическое место этих вершин?» (Если рассмотреть обе полуплоскости относительно прямой AB, то геометрическим местом вершин будет совокупность двух лучей, за исключением точки A. Для облегчения задачи можно ограничиться рассмотрением одной полуплоскости).

Много несложных задач на отыскание *гмт* имеется в учебнике Н А. Глаголева [1].

Кроме задач на отыскание *гмт*, надо решить ряд задач на построение методом *гмт*. Задачи не должны быть трудными. Решая их, ученики постепенно осознают, что при геометрических построениях всякая точка (если она не является заданной и не взята произвольно) находится на пересечении двух линий, точки каждой из которых обладают определенным свойством.

[1] См. [227], стр. 75, 113.

При решении таких задач в VI классе вопросы ставятся конкретно, применительно к данной задаче. Приведем несколько примеров.

1. «На гипотенузе прямоугольного треугольника построить точку, равноудаленную от катетов».

Путем постановки вопросов выясняем, какими свойствами должна обладать искомая точка. Во-первых, она должна лежать на гипотенузе, во-вторых, точка должна быть равноудаленной от катетов. Спрашиваем, на какой линии могут лежать точки, равноудаленные от сторон угла.

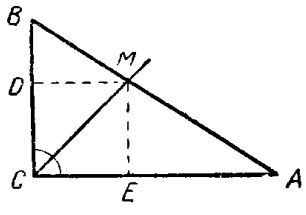


Рис. 97

Ученики вспоминают свойства точек, лежащих на биссектрисе угла; указывают, что вне биссектрисы нет точек, обладающих данным свойством, и делают соответствующий вывод.

Затем проводится построение (рис. 97). Можно провести устно доказательство (ученики проведут отрезки $ME \perp AC$, $MD \perp BC$ и докажут их равенство).

Выясняем, что такая точка существует, так как биссектриса прямого угла обязательно пересекает гипотенузу в одной точке.

2. «На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построить точку, равноудаленную от концов катета BC».

Позже можно решить:

3. «Дана прямая a и точка M вне ее. Построить точку, лежащую на прямой a и находящуюся на расстоянии 3 *см* от точки M». Эта задача требует исследования. На первом этапе можно ограничиться рассмотрением одного конкретного случая. Для этого надо при изображении данных ввести ограничение; например, точка M находится на расстоянии 2 *см* от прямой a; другие случаи расположения данных можно показать на готовом чертеже (рис. 98). Полное решение этой задачи может быть дано в VII классе, когда будет рассмотрено взаимное положение прямой и окружности.

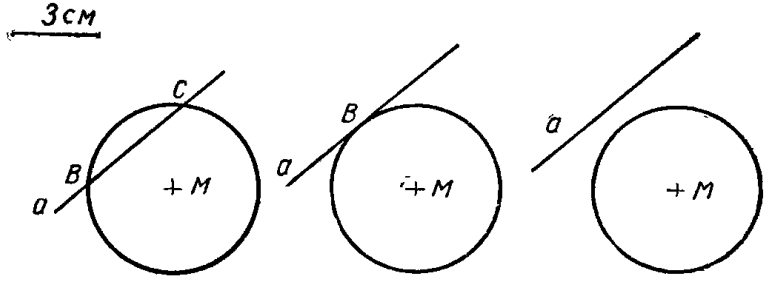


Рис. 98

4. Задачи из сборника Н. Н. Никитина, Г. Г. Масловой № 332 (1); 333 (2, 3); 334. Задачи № 332 (3); 333 (1) лучше отнести к VII классу.

В VII и VIII классах работа по овладению методом *гмт* продолжается, представления учащихся о *гмт* расширяются. В VII классе рассматривается *гмт* плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, представляющее собой совокупность двух прямых.

В VIII классе в качестве задачи можно рассмотреть *гмт*, «отношение расстояний которых до двух прямых (параллельных или пересекающихся) равно данному числу»[1].

В VII классе метод *гмт* применяется при построении четырехугольников и окружностей. При отыскании путей построения ставятся следующие вопросы: 1) Положение какой точки (или каких точек) надо определить, чтобы затем выполнить все построение? Иногда это вершина фигуры или какая-либо внутренняя точка, например точка пересечения диагоналей параллелограмма. 2) Какими условиями задачи определяется положение искомой точки? 3) На какой линии лежат все точки, удовлетворяющие только первому условию (только второму), то есть какому *гмт* должна принадлежать искомая точка? В результате делается вывод, что точка должна быть найдена как пересечение двух *гмт*.

Такое рассуждение во многих несложных задачах может быть выполнено без чертежа. Построение обычно не затрудняет учащихся, если они поняли анализ.

При доказательстве приходится повторить рассуждения, проведенные в анализе, только в обратном порядке.

Наиболее сложной частью решения часто оказывается исследование. Вместе с тем работа по исследованию решений является очень плодотворной, творческой и повышает математическое развитие учащихся. Для того чтобы исчерпывающе провести исследование, ученик должен хорошо представлять взаимное расположение различных линий на плоскости.

Выше уже было сказано, как учитель может помочь ученикам провести исследование.

Рассмотрим полное решение задачи на построение методом *гмт*.

Пример 1. «Найти точку, которая была бы удалена на расстояние a от данной точки B и от данной прямой MN»[2] (рис. 99).

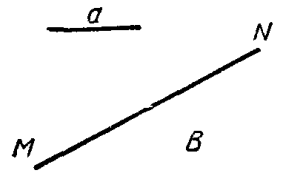


Рис. 99

Анализ.

1) Все точки, удаленные от точки B на расстояние a, лежат на окружности, центр которой B, радиус равен a.

[1] См. [260], № 788, 789.
[2] См [260], № 399 (1).

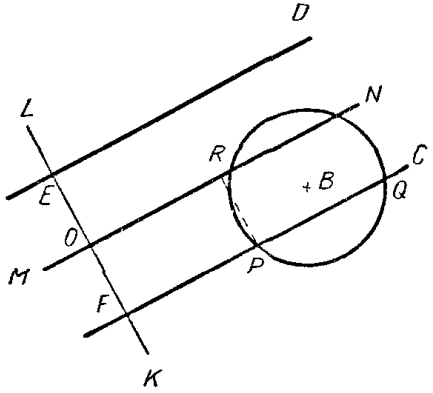


Рис 100

2) Все точки, удаленные от MN на расстояние a, находятся на двух прямых, параллельных MN и проведенных от MN на расстоянии a.

Построение (рис 100).

1) $LK \perp MN$, $OE=OF=a$.

2) $ED \parallel LK$, $FC \parallel LK$.

3) Окружность $(B;\ r=a)$[1].

4) P, Q — точки пересечения FC и окружности B.

Доказательство:

1. $PR \perp MN$; $PR=FO=a$ (отрезки параллельных, заключенные между параллельными)

2. $PB=a$ — радиус окружности. P — удовлетворяет условию задачи.

Исследование.

Обозначим расстояние точки B до MN буквой d.

1) $d > 2a$ — нет решения (рис. 101, *а*).

2) $d=2a$ — одно решение (рис. 101, *б*).

3) $d < 2a$ — два решения (рис. 101, *в*).

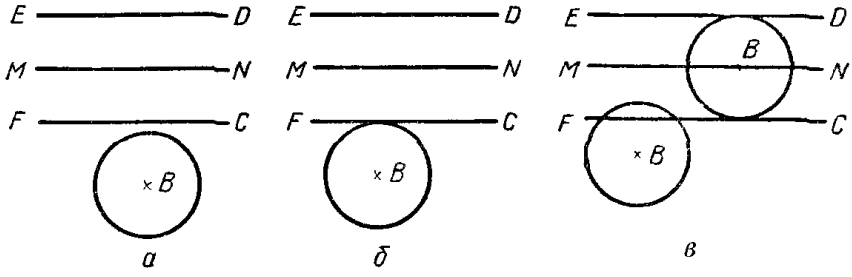


Рис 101

При решении этой задачи анализ и доказательство целесообразно провести устно Чтобы провести исследование, хорошо *подготовить заранее чертеж, на котором изображены* прямая MN и параллельные ей прямые ED и FC, а на кальке изобразить точку B и окружность Накладывая кальку на чертеж параллельных прямых и передвигая ее, покажем все возможные случаи.

Пример 2. «Построить параллелограмм по стороне a, острому углу α и диагонали d, лежащей против этого угла[2] (рис. 102).

[1] При обозначении окружности (дуги) в скобках мы указываем ее центр и величину радиуса

[2] См. также [260], № 359(е).

Решение этой задачи в общем виде требует большого исследования, поэтому мы ограничили условие тем, что заданный угол острый. Анализируя данные и изображая их, целесообразно ввести еще одно ограничение, например: пусть длина диагонали меньше, чем длина стороны. Обозначим данные и изобразим их.

Отыскивая путь построения, выясняем, что для построения параллелограмма $ABCD$ (рис. 102) достаточно построить вершину B, так как вершины A и D — концы данного отрезка. Точка B лежит: а) *на стороне угла, равного* α, вершина которого A и одна из сторон AD, и б) на окружности, центр которой D, а радиус равен d. Делаем вывод: построим точку B как точку пересечения луча с окружностью, затем достроим $\triangle ABD$ до параллелограмма.

Данные. Сторона a, диагональ d, угол α.

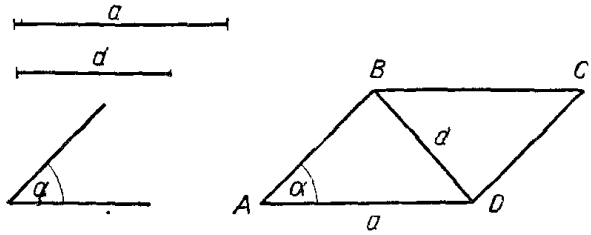


Рис. 102

Построение (записывается, рис. 103).

1) $AD=a$;
2) $\angle MAD=\alpha$;
3) дуга окружности $e(D; r=d)$;
4) B — точка пересечения e и AM;
5) $BC=AD$; $DC=AB$; $ABCD$.

Для второй полученной точки B_1 проводим построение, но не записываем.

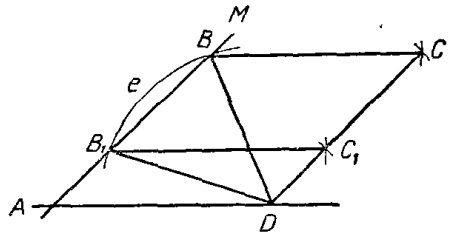


Рис. 103

Доказательство (проводится устно). $ABCD$ — параллелограмм, так как $BC=AD$ и $AB=DC$, $AD=a$; $\angle BAD=\alpha$, $BD=d$.

Исследование.

Учитель задает вопрос: почему в данном случае получили два параллелограмма? Изменяет данные, например d, так, чтобы получить один; опустим $DK \perp AB$, пусть $d=DK$. Сколько будет решений? Может ли случиться так, что совсем не будет решений? Пусть $d<DK$; можно ли построить параллелограмм?

В результате этой работы получим такие чертежи (рис. 104).

Если учитель считает, что проведение исследования в общем виде преждевременно, то можно привести конкретные данные, чтобы все же выяснить возможность получения различных случаев, например, можно предложить выполнить серию аналогичных построений при следующих данных:

1) $a=4$ *см*, $\alpha=30°$, $d=3$ *см* (2 решения);
2) $a=4$ *см*, $\alpha=30°$, $d=2$ *см* (1 решение);
3) $a=4$ *см*, $\alpha=30°$, $d=1{,}5$ *см* (нет решения).

Можно показать исследование на готовых чертежах, если время не позволяет выполнить серию чертежей.

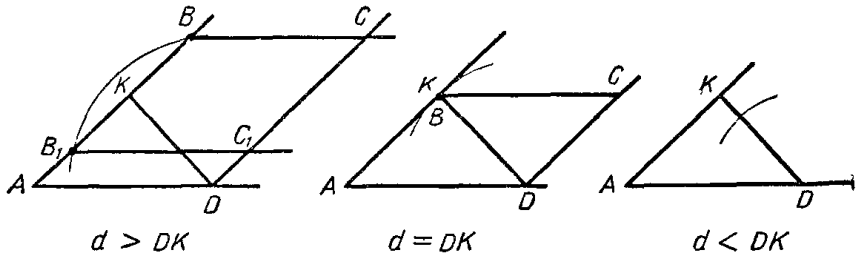


Рис. 104

Заметим, что решение этой задачи сводилось к построению треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них. Мы ограничили условие так, что сторона, против которой лежит данный угол, меньшая из двух данных, поэтому получили три возможных случая при решении задачи. Если же ввести другое ограничение, $d>a$, то решение будет одно. Решение задачи в общем случае требовало бы рассмотрения трех вариантов: $d<a$, $d=a$, $d>a$, причем в первом и втором случаях данный угол α должен быть острым, а в третьем может быть также прямым или тупым.

В заключение отметим, что среди задач на геометрические места можно предлагать задачи практического содержания. Они вызывают большой интерес учащихся. Например, указать на карте, в каком месте железной дороги надо устроить станцию, чтобы она была одинаково удалена от двух селений. Рассмотреть два случая: 1) селения расположены по одну сторону от железной дороги; 2) селения расположены[1] по разные стороны железной дороги (рис. 105).

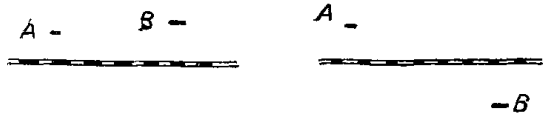


Рис. 105

[1] Полное решение этой задачи дано в работе [18].

Использование симметрии, параллельного переноса и подобия при решении задач на построение.

В программе средней школы рассмотрение различных методов построений отнесено в старшие классы. Однако некоторые задачи на построение, решаемые в VI—VIII классах, требуют использования свойств симметрии фигур, при решении других задач приходится изменять положение отдельных элементов фигуры путем их параллельного переноса. Использование подобия, метрических соотношений в треугольнике, свойств равновеликости фигур при построениях помогает ученикам закрепить знания соответствующих разделов курса.

Симметрия осевая, так же как и центральная, применяется при доказательстве теорем и решении различных задач.

Применение симметрии при доказательствах и решении задач на вычисление и доказательство рассмотрено в § 18.

Изучение симметрии сопровождается построением точек и фигур, симметричных данным относительно определенного центра или оси [1]. Здесь мы рассмотрим простейшие случаи использования симметрии при решении задач на построение.

В VI классе осевая симметрия применяется при построении равнобедренных треугольников, например при решении задачи: «Построить равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине» [2].

После изучения теоремы о сумме углов треугольника может быть решена задача: «Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание», а также задача на построение равностороннего треугольника по его высоте.

В VII классе осевая симметрия используется при построении ромба, например: «Построить ромб по углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла» [3].

Центральная симметрия используется при построении параллелограммов в тех задачах, где сначала можно найти положение двух его вершин и точки пересечения диагоналей [4].

В VII классе в ряде задач на построение четырехугольников, особенно при построении трапеций, применяют параллельный перенос, когда желательно сблизить какие-нибудь элементы фигуры и получить новую фигуру, которую учащиеся умеют строить.

Необходимость параллельного переноса можно показать на задаче: «Построить трапецию по четырем сторонам».

Так как ученики умеют строить треугольник по трем сторонам, то вначале им кажется, что так же просто построить и

---

[1] См. [260], № 129—131, 360, 361 и др.

[2] См. [260], № 186 (2). Подробное решение см. [256]

[3] См [260], № 410 (д), см также № 410 (е)

[4] См. [260], № 359 (г, д), 391 (г), 410 (б), 386 (2).

трапецию Они скоро убеждаются в неумении осуществить построение, и тогда им будет понятен анализ, в котором мы параллельным переносом одной из боковых сторон трапеции получаем треугольник с тремя известными сторонами (рис. 106). Построение и доказательство не может вызвать затруднений, а исследование сводится к выяснению условий возможности построения треугольника по трем сторонам:

$$|b-d|<a-c<b+d,\ (a>c).$$

Решая эту задачу, следует обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что для образования треугольника ABE, три стороны которого оказываются известными, пришлось перенес-

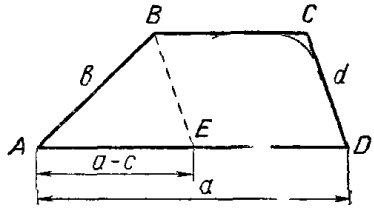


Рис 106

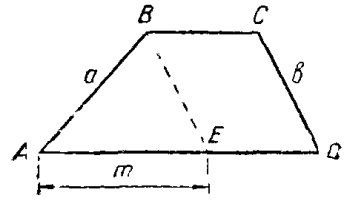


Рис. 107

ти боковую сторону CD на расстояние $BC=c$ параллельно основаниям. При этом величина стороны CD не изменилась и отрезок в новом положении (BE) параллелен его первоначальному положению (CD).

Необходимость параллельного переноса ясна учащимся и при решении такой задачи: «Построить трапецию по разности оснований, двум боковым сторонам и диагонали» [1].

Отыскивая путь построения, надо обратить внимание учащихся на отрезок m — разность оснований — и спросить, нельзя ли сделать такое дополнительное построение, чтобы этот отрезок стал элементом какой-либо фигуры. После того как будет проведен отрезок $BE \| CD$, выясняется, что $\triangle ABE$ может быть построен (рис. 107) по трем сторонам.

Положение точки C (или D, так как не сказано, какая диагональ задана) находится методом *гмт* — точка C должна лежать на луче, выходящем из точки B параллельно AE, и на расстоянии, равном величине диагонали, от точки A.

В этой задаче довольно сложное исследование. Проводя его, надо, оставляя неизменными три данных (m, a, b), менять величину диагонали (обозначим через d), начав с небольшой величины и постепенно ее увеличивая. В результате получим следующие выводы.

[1] См. [260], № 462, а также № 466 и др.

а) $d \leqslant a$ — нет решения;

б) $a < d \leqslant b$ — одно решение (из B нельзя провести диагональ; рис. 108, *а*);

в) $d > b$ — два решения (диагональ можно провести как из A, так и из B; рис. 108, *б*).

В VII классе могут быть предложены задачи, требующие применения теоремы Пифагора, например: «Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух квадратов со сторонами 3 *см* и 7 *см*» [1].

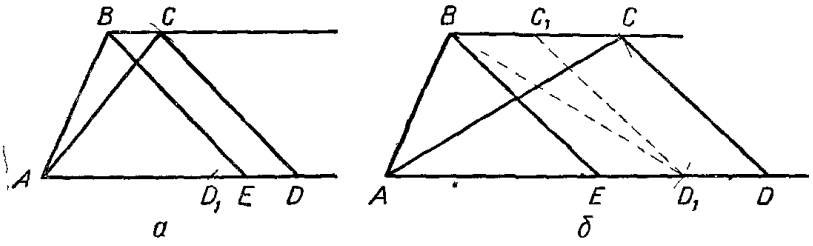


Рис 108

Также должны быть рассмотрены задачи на построение равновеликих фигур, например: «Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника было равно какой-либо стороне данного треугольника» [2]. Решение подобных задач может быть связано с рассмотрением геометрического места вершин треугольников, имеющих общее основание и равные площади (равные высоты).

В VIII классе решаются задачи методом подобия. Как известно, метод подобия при построениях применяется в тех случаях, когда в числе данных имеется совокупность таких, по которым можно построить бесчисленное множество фигур, подобных между собой. Оставшиеся данные определяют размер фигуры и позволяют путем подобного преобразования получить фигуру, имеющую размеры, указанные в условии задачи.

Условия, определяющие размер фигуры, могут быть двоякого рода: это или длина какого-либо элемента фигуры (высота в задаче: «Построить треугольник по двум углам и высоте, выходящей из вершины одного из них»), или условия расположения фигуры относительно других данных фигур («Вписать квадрат в данный треугольник» — размер квадрата определяется расположением его вершин на сторонах данного треугольника).

Использование при решении задач условий второго рода требует подробного рассмотрения свойств гомотетии, что про-

[1] См также 260], № 574—576

[2] См [260], № 542, а также № 526, 527.

граммой восьмилетней школы не предусмотрено. Поэтому в VIII классе следует ограничиться задачами, в которых размер фигуры определяется длиной какого-либо элемента или указанной в условии задачи величиной коэффициента подобия.

Прежде чем решать задачи с применением подобия, необходимо провести ряд упражнений подготовительного характера, направленных на выяснение сущности подобного преобразования и наиболее удобных приемов его осуществления, а также на выявление тех совокупностей данных для различных фигур, по которым можно построить множество подобных фигур.

Приведем примеры.

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Преобразовать его в подобный с коэффициентом подобия $k=2$, взяв центр подобия: а) в вершине A, б) на стороне AB, в) внутри $ABCD$, г) вне $ABCD$.

2. Дан $\triangle ABC$. Преобразовать его в подобный так, чтобы медиана m_a увеличилась в 1,5 раза.

3. Равносторонний треугольник преобразовать в подобный так, чтобы высота его стала равна отрезку n.

4. Преобразовать данный параллелограмм $ABCD$ в подобный так, чтобы: а) высота его увеличилась вдвое, б) диагональ стала равной отрезку m.

5. Преобразовать данную трапецию $ABCD$ в подобную так, чтобы: а) диагональ ее увеличилась в 1,5 раза, б) средняя линия уменьшилась вдвое.

Необходимо добиться того, чтобы учащиеся понимали, что выбор центра подобия может упрощать построение и что само построение может быть выполнено различными способами.

Рассмотрим, например, как может быть выполнено построение в задаче 5(б).

Коэффициент подобия $k=\frac{1}{2}$.

1-й способ (рис. 109).

1) S — центр подобия.

2) Проведем лучи SA, SB, SC, SD.

3) $SC_1=\frac{1}{2}SC$; $SB_1=\frac{1}{2}SB$; $SA_1=\frac{1}{2}SA$; $SD_1=\frac{1}{2}SD$.

4) $A_1B_1C_1D_1$.

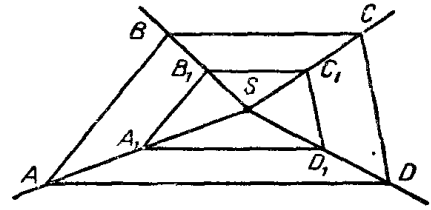


Рис. 109

2-й способ (рис. 109).

1) S — центр подобия.

2) Проведем лучи SA, SB, SC, SD.

3) $SC_1=\frac{1}{2}SC$.

4) $C_1D_1 \parallel CD$; $D_1A_1 \parallel DA$; $A_1B_1 \parallel AB$.

5) $A_1B_1C_1D_1$.

3-й способ (рис. 110).

1) KL — средняя линия; KC; KD

2) $KL_1 = \frac{1}{2}KL$.

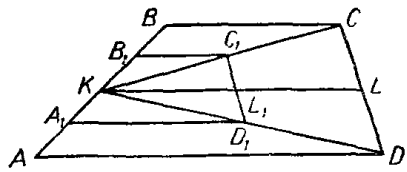


Рис. 110

3) $C_1D_1 \parallel CD$ через точку L_1.

4) $C_1B_1 \parallel CB$; $D_1A_1 \parallel DA$.

5) $A_1B_1C_1D_1$.

Возможны и другие варианты построения.

Приведем примеры упражнений, чтобы выяснить, какие совокупности данных определяют форму фигуры.

1. Построить треугольник по двум углам. Сколько решений имеет задача?

2. Построить треугольник, стороны которого относились бы как $4:2:5$ $(m:n:p)$.

3. Построить параллелограмм по отношению его диагоналей $2:3$ и углу α между ними.

Такие упражнения закрепляют знания учащихся о подобии фигур и готовят к решению задач, включающих данные, определяющие как форму фигуры, так и ее величину. Приступая к решению первой задачи методом подобия, учитель ставит предварительно две частные задачи, соответствующие каждой из двух частей решения задачи этим методом. Поясним это примерами.

Пример 1.

Задача. «Построить треугольник по отношению двух его сторон $2:3$ и углу α между ними.

Задача. Дан $\triangle ABC$ и отрезок a. Построить треугольник, подобный данному, так, чтобы сторона, сходственная стороне BC, равнялась отрезку a.

Обе задачи разбираются устно, решение их не записывается. Затем ставится задача общего вида.

Задача. «Построить треугольник по отношению двух его сторон $2:3$, углу α между ними и третьей стороне a» [1].

Анализ (рис. 111).

Пусть в $\triangle ABC$ имеем $\angle A = \alpha$; $AB:AC = 2:3$. По этим данным можно построить бесчисленное множество треугольников, подобных между собой. Построив один из них, преобразуем его так, чтобы сторона, сходственная стороне BC, стала равной отрезку a.

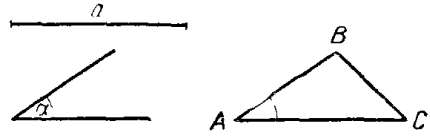


Рис. 111

[1] См [260], № 814 (2), а также № 813–819.

Построение (рис. 112).

1) $\triangle ABC$; $\angle A=\alpha$; $AB:AC=2:3$.

2) B — центр подобия; $BC_1=a$; $C_1A_1 \parallel CA$.

3) $\triangle A_1C_1B$.

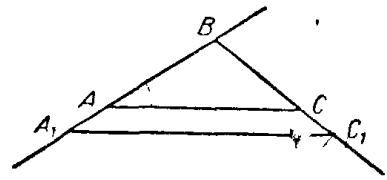


Рис. 112

Доказательство.

1) $\triangle A_1C_1B \backsim \triangle ACB$, поэтому $\frac{A_1B}{A_1C_1}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$; $\angle A_1=\angle A=\alpha$

2) $BC_1=a$, следовательно $\triangle A_1BC_1$ — искомый.

Исследование.

Решение всегда возможно, единственно.

Пример 2. «Построить параллелограмм по углу, отношению сторон и диагонали» [1].

Условия даны в общем виде, поэтому задаем угол α, диагональ l и отрезки m и n, отношение которых должно быть равно отношению сторон (рис. 113). Анализируя условие, выделяем совокупность данных α, $AB:AD=m:n$, по которым можно построить множество подобных между собой параллелограммов.

Построив один из них, преобразуем его в подобный так, чтобы диагональ, сходственная BD (или AC), стала равной отрезку l. Задача имеет два решения.

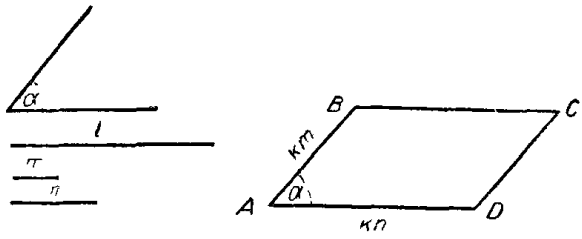


Рис. 113

Перед решением этой задачи можно рассмотреть также частные задачи:

а) Построить параллелограмм по углу α и отношению $m:n$ сторон параллелограмма.

б) Дан параллелограмм. Преобразовать его в подобный так, чтобы диагональ его стала равной отрезку l.

После этого ученики могут самостоятельно решить приведенную задачу.

---

[1] См. [260], № 1038, а также № 1036, 1037.

Еще раз отметим, что решение задач на построение необходимо проводить систематически при изучении каждого из разделов программы.

§ 15. Устные задачи и упражнения

На уроках геометрии, так же как и на уроках арифметики и алгебры, надо систематически проводить устные упражнения. Они преследуют те же цели, которые были рассмотрены выше, но имеют свои особенности, вызываемые характером предмета. Большинство геометрических задач связано с чертежом. Для развития пространственного воображения школьников полезно предлагать им некоторые вопросы без чертежа, но эти вопросы должны быть очень просты и связаны с такими геометрическими фигурами, наглядное представление о которых имеет каждый ученик. Постепенно учитель может несколько усложнять такие вопросы.

Необходимость в чертежах при проведении устных упражнений затрудняет учителей. Нецелесообразно тратить на уроке время на чертеж для упражнения, которое займет 2—3 минуты. Поэтому необходимо в школе иметь достаточное число готовых чертежей на больших листах или заготовлять чертежи на переносной или классной доске заранее.

Можно иногда использовать чертеж, который уже имеется на доске и выполнен при доказательстве теоремы или решении письменной задачи. В этом случае учитель, готовясь к уроку, должен заранее предусмотреть возможность использования такого чертежа и подготовить соответствующие вопросы.

При изучении стереометрии вопросы могут относиться к моделям геометрических тел и быть направлены на выяснение особенностей формы граней, расположения граней, ребер и других элементов рассматриваемых тел.

Рассмотрим отдельные виды упражнений.

1. Устные вопросы и задачи, не требующие чертежа.

К ним относятся: 1) простейшие задачи на вычисление, решение которых требует применения только одного какого-либо свойства фигуры [1]; 2) задачи-вопросы, для ответа на которые надо сделать некоторые логические выводы, провести исследование; 3) упражнения чисто логического характера.

Примеры задач, требующих логического вывода или некоторого исследования.

VI класс

1. Периметр равнобедренного треугольника 20 *см*, одна его сторона равна 4 *см*. Определить длину его других сторон.

[1] См. § 12.

2. Та же задача, но длина данной стороны 6 *см*

В первой задаче ученик должен выяснить, что задана длина основания; во второй — дать два ответа.

VII класс

1. Могут ли три угла выпуклого четырехугольника быть соответственно равными трем углам треугольника?

2. Могут ли две хорды окружности точкой пересечения взаимно делиться пополам? Если могут, то при каком условии?

VIII класс

1. Даны две окружности. В каждую из них вписан равносторонний многоугольник; число сторон их одинаково. Подобны ли эти многоугольники?

2. Как изменится объем правильной четырехугольной призмы, если сторону основания ее увеличить вдвое, а высоту уменьшить вдвое?

3. Какая из величин больше: sin 40° или cos 40°?

После решения каждой задачи должно быть дано обоснование решения.

Упражнения на составление теоремы, обратной или противоположной данной теореме, на выявление необходимых и достаточных условий, на проверку правильности вывода и т. п. мы относим к упражнениям чисто логического характера. Например:

1. В театр пошли все пионеры нашего класса. Иванов не пионер, значит, он в театр не пошел. Правилен ли вывод? (VI класс).

2. Диагонали ромба в точке пересечения взаимно делятся пополам. Является ли это свойство необходимым признаком ромба? Является ли оно достаточным признаком? (VII класс.)

Те же вопросы относительно параллелограмма.

3. Параллелепипед — четырехугольная призма. Справедливо ли обратное утверждение? (VII, VIII классы.)

4. В основании пирамиды — квадрат. Можно ли утверждать, что пирамида правильная? (VIII класс.)

4. Упражнения и задачи по готовым чертежам.

К ним относятся: 1) элементарные упражнения, требующие умения разбираться в чертеже плоской фигуры (VI класс) или в чертеже пространственной фигуры (VII, VIII классы);

2) задачи на вычисление;

3) задачи на доказательство

Примеры.

1. Сколько отрезков на прямой MN? Назвать все отрезки (рис. 114, *а*).

2. Сколько треугольников на чертеже? Назвать все треугольники. Назвать два треугольника, имеющих общую сторону; два треугольника, имеющих общий угол; три треугольника, имеющих общий угол, и т. п. (рис. 114, *б*).

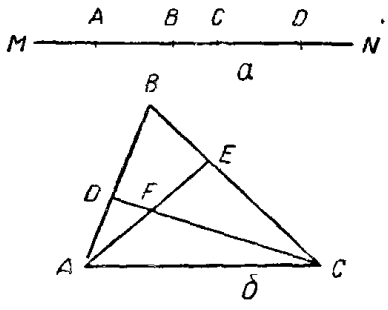


Рис. 114

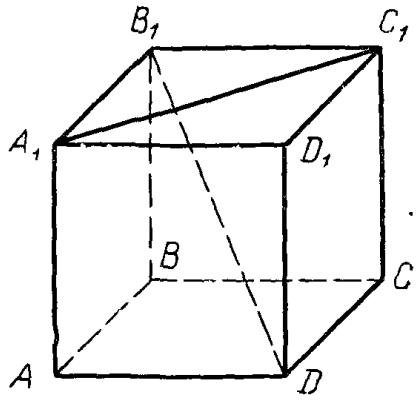


Рис. 115

3. На рисунке 115 дано изображение куба. Показать на нем:

а) ребра, перпендикулярные к грани $ABCD$ (AA_1B_1B);

б) ребра, скрещивающиеся между собой;

в) пересекаются ли диагональ куба B_1D и диагональ его верхнего основания A_1C_1?

Вопросы *а*), *б*) могут быть отнесены к проволочной модели, а ответ на вопрос в) может иллюстрироваться показом на модели.

Примеры устных задач на вычисление и доказательство приведены нами в § 11, 12, 13. Одни и те же чертежи часто могут быть использованы для решения задач и того и другого вида или для задач с разными данными; тогда на чертежах не помечается, что дано и что требуется найти. Приведем примеры задач на вычисление, в которых данные элементы отмечены на чертеже, а искомый обозначен буквой x (равные элементы отмечены одинаковыми значками, рис. 116—119).

В VII классе могут предлагаться задачи на вычисление площадей фигур или составление буквенной формулы для площади фигуры по данному чертежу, например, по чертежам (см. рис. 120, 121) составить формулу для вычисления площади заштрихованной фигуры.

Чертежи геометрических тел могут быть выполнены в аксонометрии или в прямоугольных проекциях на две плоскости. На рисунке 122—124 даны изображения тел, объемы которых требуется вычислить.

Решение задач по готовым чертежам вызывает обыкновенно большой интерес учащихся. Если на чертеже помечены дан-

Задачи VI класса

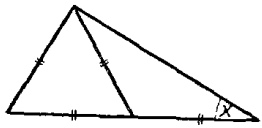


Рис. 116

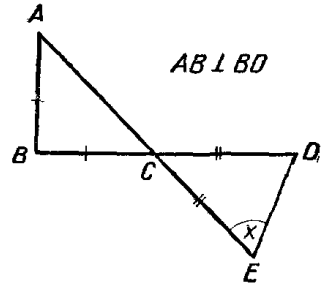


Рис 117

Задачи VII класса

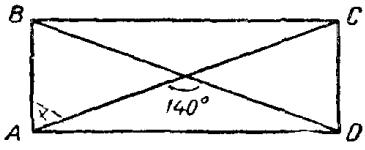


Рис. 118

$ABCD$ — прямоугольник.

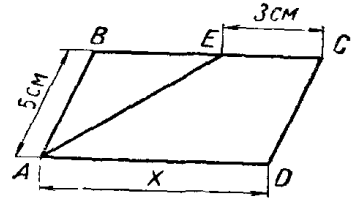


Рис. 119

$ABCD$ — параллелограмм.
$\angle BAE = \angle EAD$

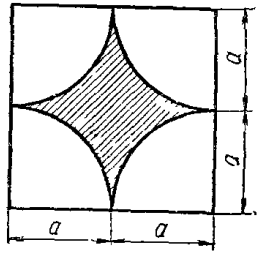


Рис 120

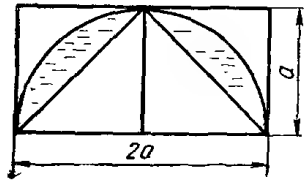


Рис 121

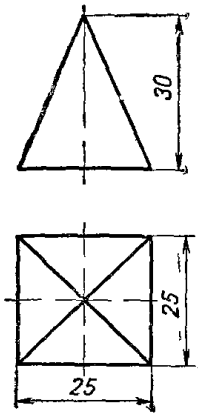


Рис 122

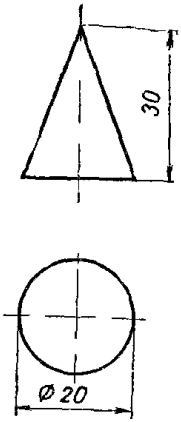


Рис 123

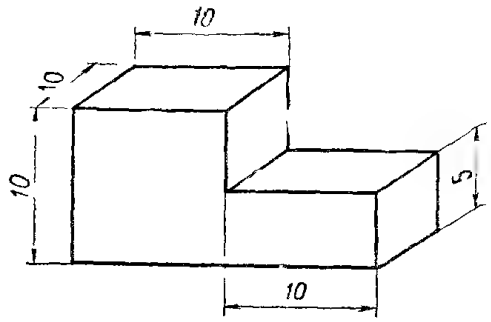


Рис 124

ные и неизвестные (рис 116—119), то, вывешивая чертеж, учитель ничего не поясняет Ученики сами должны разобраться в том, что дано и что требуется определить После того как задача решена, ученик должен сформулировать условие задачи и дать обоснование решения Если решение вызывает затруднение, учитель предлагает одному из учеников сформулировать условие задачи или сам четко его сообщает К другим чертежам учитель сам формулирует задание (рис 120—124)

Необходимо рассмотреть различные способы решения и выбрать наиболее рациональный.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ ТЕМЫ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

§ 16. Первая тема курса геометрии VI класса

Первые уроки геометрии должны показать учащимся, что геометрия изучает пространственные формы действительного мира Как уже было сказано, учитель должен исходить из конкретных представлений учащихся Какие либо попытки разъяснить ученикам, в чем сущность отвлеченных понятий, например в чем различие между геометрическим и физическим телом, могут вызывать только их недоумение Длинные разъяснения учителя могут привести к отрицательному результату Надо возможно скорее привлечь школьников к действию, к выполнению конкретных заданий, в результате чего и будут складываться отвлеченные понятия, но не заставлять представить линию, не имеющую ширины и толщины

Учитель не должен забывать, что основные понятия (прямая линия, точка, плоскость) не определяются В учебнике даются только их описания, которые не нужно заучивать [1]

Остановимся подробнее на проведении первых уроков геометрии

Учитель начинает с краткого введения рассказав, как геометрия возникла в глубокой древности из потребности людей измерять землю, можно объяснить само слово «геометрия» Надо указать и другие потребности (измерение объемов тел, выполнение механических конструкций и т п), которые повлияли на развитие геометрии В дальнейшем геометрия стала изучать особые свойства тел и плоских фигур Знание геометрии необходимо сейчас и инженеру, и мореплавателю, и артиллеристу, и астроному Какие же свойства тел изучает геометрия?

[1] См § 2, стр 475

Рассмотрев различные тела: предметы классной обстановки, производственные детали, модели геометрических тел, надо выяснить, что геометрия изучает форму тел, их размеры, расположение их элементов (частей). Из какого материала сделано тело, каковы его вес, цвет, твердость — не рассматривается в геометрии. Можно показать несколько тел разного материала и окраски, но одинаковой формы; одинаковой формы, но разной величины и т. п.

Чтобы дать понятие о поверхности, учитель предлагает провести рукой по поверхности какого-либо тела (парты, глобуса, стола, карандаша и т. д.). Ученики указывают линию пересечения двух стен; линию, ограничивающую основание цилиндра; линию, разделяющую два государства на карте; находят точку, в которой сходятся три грани куба; точку пересечения двух железных дорог на карте и т. п. Они указывают линию, точку, называют их, но никаких определений не дают. Надо напомнить им, что и в младших классах они изучали различные геометрические фигуры (какие?); теперь будут более подробно изучать свойства фигур.

После введения учитель переходит к выявлению понятия «прямая линия».

Если предложить учащимся начертить на доске разные линии, то, вероятно, среди различных кривых линий будет изображена и прямая. Легко выяснить, что кривых линий, отличных одна от другой, можно начертить сколько угодно, но прямые линии все одинаковы; они отличаются только положением. Надо напомнить, что край линейки помогает начертить прямую линию. Выполняя по заданию учителя чертежи, ученики выявляют свойства прямой. Например, им предлагают взять точку, обозначить ее буквой A, провести через нее прямую линию; провести вторую прямую через ту же точку; третью... Следует вывод: через одну точку можно провести сколько угодно прямых, или одна точка не определяет прямую.

Аналогично задаются две точки A и B, предлагается провести прямую через эти две точки. Оказывается, что *через две точки можно провести прямую и притом только одну*; две точки определяют прямую. Поэтому прямую удобно обозначать двумя буквами.

Надо требовать, чтобы школьники аккуратно выполняли чертежи в тетрадях; карандаш должен быть хорошо очинен. Каждый чертеж должен быть снабжен краткой надписью, например «прямая AB». При этих построениях следует настойчиво подчеркивать, что всякая прямая мыслится неограниченной. Изображение прямой на доске или на бумаге является условным. Ученик должен понять, что он может начертить только часть прямой. Можно предложить учащимся вообразить прямую, проведенную через две намеченные в классе точки, и мыс-

ленно следить за тем, как она пройдет дальше: пройдет ли эта прямая за стену класса? через дом напротив? через поле? и т. д. Учащиеся уже проводили практическую работу: провешивание прямой на открытой местности. Теперь следует уточнить, как проводилась работа, то есть выяснить, что прямая определялась двумя точками, что вехами отмечается часть прямой. Провешивание прямой на местности надо провести и в VI классе, объединив эту работу с измерением расстояний.

В дальнейшем, выполняя конкретные построения, учащиеся закрепляют понятия «точка на прямой», «точка вне прямой». Прямые чертятся в различном положении. Необходимо сделать на доске (или показать на плакате) построение, изображенное на рисунке 125, и спросить, лежит ли точка C на прямой AB или

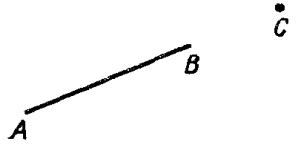


Рис. 125

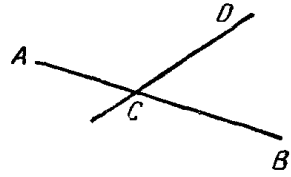


Рис. 126

вне этой прямой. Для ответа на вопрос надо воспользоваться линейкой. Такие вопросы приучают учащихся мыслить прямую бесконечной.

Задается и такое построение. Взять на прямой AB точку C и вне прямой точку D; провести прямую через точки C и D (рис. 126). Сколько общих точек имеют прямые AB и CD? Могут ли две различные прямые иметь две общие точки? Надо вспомнить, что через две точки можно провести только одну прямую; если две прямые будут иметь две общие точки, то они сольются. *Две прямые, которые имеют одну общую точку, называются пересекающимися.*

Выясняется, что все чертежи выполнялись на *плоской поверхности* (на доске или на листе бумаги). Сравнить с плоскостью другие поверхности, например поверхность глобуса, боковую поверхность цилиндра и т. п. Особое *свойство плоскости: любая прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит на ней всеми своими точками.*

Надо напомнить, как проверялось в столярной мастерской при помощи линейки, плоская ли поверхность доски. Полезно при этом показать, что и к цилиндрической поверхности[1] (не давая этого названия) можно приложить линейку так, что она

[1] Можно использовать кружку.

совпадет всеми своими точками с поверхностью, но только в одном направлении.

Учащиеся уже знакомы с понятиями луча и отрезка. Теперь эти понятия уточняются и каждому дается определение — описание[1]. Перед тем как дать определение, учащиеся выполняют соответственные построения. На прямой берут точку; эта точка делит прямую на две части — два луча. Учащиеся должны мыслить луч неограниченно продолженным. *Часть прямой, ограниченная с одной стороны, называется лучом.* Взяв также на прямой две точки, выясняем, что они выделяют отрезок — *часть прямой, ограниченную с двух сторон.* В дальнейшем надо строго различать понятия *прямой линии, луча* и *отрезка.* Затем рассматривается равенство отрезков. С понятием равенства геометрических фигур учащиеся встретятся еще неоднократно. Уже в первой теме будет рассмотрено равенство углов, равенство дуг, затем равенство треугольников. В школьных курсах геометрии равенство фигур обычно определяется на основании возможности их совмещения. Таким образом в геометрию вводится понятие движения. В современных научных курсах принято определять равенство путем введения специальной группы аксиом, а понятие движения не используется[2]. Однако и определение равенства фигур при помощи движения может быть строго обосновано путем введения особых аксиом движения. При этом движение рассматривается не с точки зрения перемещения фигуры вне зависимости от времени ее перемещения, а лишь как возможность совпадения соответственных точек двух фигур[3]. Поскольку школьный курс геометрии не является аксиоматическим, теоретическое обоснование понятия движения не дается, но использование движения для проверки равенства двух фигур наиболее естественно и понятно учащимся и согласуется с повседневной жизненной практикой. В VI классе школы к вопросу о равенстве двух отрезков надо подойти конкретно; начертив на доске два отрезка, учитель спрашивает, как узнать, равны ли они (не измеряя отрезков). Чтобы выяснить, какие отрезки мы назовем равными, можно взять две узкие полоски бумаги разного цвета. Для того чтобы их сравнить по величине, надо наложить одну на другую. Учащиеся должны уметь описать наложение: «Мы накладываем отрезок AB на отрезок CD так, чтобы точка A совпала с точкой C», и т. д. После этого показывается, как сравнить при помощи циркуля два отрезка, начерченных на доске. Учащиеся должны усвоить, что концы раскрытого циркуля определяют некоторый отрезок, должны «видеть» этот отрезок; должны понимать, что при срав-

[1] О более строгом определении этих понятий см. [223], стр 19, 23; [253], § 3; [262], стр. 14.

[2] См. [262], § 9, 11

[3] См. [223], приложение 11; [221], гл. V, § 2.

нении отрезков при помощи циркуля они заменяют один из данных отрезков равным ему отрезком (между концами циркуля), который мы и накладываем на второй данный отрезок.

Затем может быть дана задача: построить отрезок, равный данному. Это — основное построение, которое учащиеся выполняют в тетрадях.

Взяв на прямой три точки: A, B и C, можно дать понятие о сумме и о разности двух отрезков. Учащиеся решают задачи на построение суммы двух и нескольких отрезков. При этом может быть проверена справедливость переместительного и сочетательного законов для суммы отрезков. При построении разности отрезков должно быть выяснено, при каком условии построение возможно. Дальше строится отрезок, равный удвоенному, утроенному данному. Решение этих задач тщательно оформляется (см. рис. 85, § 14).

Способ деления отрезка пополам, а тем более на любое число частей еще не может быть обоснован. Однако надо выяснить, что отрезок может быть разделен на две равные части, то есть что существует средняя точка отрезка. Сам факт для учеников очевиден, но его обоснование им недоступно. Отрезок можно разделить путем проб, проверяя циркулем или перегибая полоску бумаги. При построении медианы треугольника учащиеся будут находить среднюю точку отрезка, поэтому надо выполнить деление отрезка пополам.

Теоретическое обоснование измерения отрезков в восьмилетней школе не дается [1]. Однако уже ученики начальных классов и пятиклассники измеряют отрезки при помощи масштабной линейки. Поэтому надо проверить умение учащихся измерить данный отрезок и выяснить, что, измеряя отрезок, откладывают на нем другой отрезок, принятый за единицу длины, например 1 *м* или 1 *см*. Если единица длины откладывается в измеряемом отрезке целое число раз, то длина отрезка выражается целым числом, например 7 *см*; если же измеряемый отрезок больше 7 *см*, но меньше 8 *см*, то в нем откладывают некоторую часть отрезка, принятого за единицу, например 0,1 *см*. Если эта часть отложится в нем несколько раз, то длина отрезка выразится дробным числом, например 7,3 *см*. На практике измерение всегда приближенное. Например, длина отрезка равна 7,3 *см* приблизительно, с точностью до 0,1 *см*, то есть ошибка меньше 0,1 *см*.

Учащиеся часто говорят, когда откладывают циркулем отрезок: «Измерим отрезок циркулем». Надо объяснить, что это выражение неверно, так как в результате измерения получается некоторое число.

---

[1] См. § 22.

Надо, чтобы учащиеся применили свое умение строить и измерять отрезки к практическим задачам, например к определению расстояния по плану, пользуясь линейным масштабом.

Упражнения на построение и измерение отрезков легко увязываются с первой темой арифметики «Приближенные вычисления». Например, можно предложить построить отрезок, равный произведению данного отрезка на 5, и найти его длину измерением с точностью до 0,5 *мм*. Затем измерить длину данного отрезка с точностью до 0,5 *мм* и умножить ее на 5. Полученные результаты сравнить.

В программе VI класса при изучении отрезка прямой дается и следующее его свойство: «Отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками». В научных курсах доказывается теорема о том, что отрезок короче всякой ломаной, соединяющей его концы: теорема является следствием теоремы о соотношении сторон треугольника. Сравнение длины отрезка и длины кривой, соединяющих две данные точки, делается возможным только после того, как дается определение длины кривой.

В школьных систематических курсах геометрии обычно давалась теорема о том, что отрезок прямой короче всякой ломаной, соединяющей его концы [1]. Однако в методической литературе неоднократно указывалось, что ученики совершенно не понимают смысла доказательства очевидного для них факта так же, как и довольно сложного доказательства теоремы о том, что сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон [2]. Поэтому из школьного курса геометрии теперь исключены эти две теоремы. Предложение о кратчайшем расстоянии между двумя точками формулируется как очевидное, на основании восприятия наглядного образа. Было бы излишним проводить при этом какие-либо измерения. Примеры использования этого свойства отрезка в жизненной практике легко могут привести сами учащиеся.

Угол.

Каждый ученик VI класса уже имеет представление об угле. Однако мы не можем дать исчерпывающее определение угла, так как это понятие в дальнейшем курсе обобщается. При первом знакомстве с углом ученик воспринимает его как некоторую фигуру, которую образуют два луча, исходящие из одной точки; в дальнейшем он должен видеть, что два луча, исходящие из одной точки, образуют не один, а два угла. При обобщении понятия тригонометрической функции считают, что определенному положению двух лучей, исходящих из одной точки,

---

[1] См., например, [248], § 51

[2] См. [221], гл. III, § 2; в кн. [230] это предложение дается как аксиома.

соответствует бесчисленное множество углов; угол при этом рассматривается как мера поворота, с учетом и направления вращения. В курсе стереометрии вводятся понятия об угле между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, о двугранном и многогранном углах и каждому из этих понятий должно быть дано определение.

В учебной литературе для VI класса дается определение угла, которое является описанием [1]. Угол определяется или как «фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки», или как «часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки».

Если в дальнейшем понятия, «многоугольник» и «треугольник» определяются как часть плоскости, то естественно так же определять и угол. В таком случае, говоря об угле, мы имеем в виду определенную часть плоскости, что упрощает и вопрос о внутренней области угла: рассматриваемая часть плоскости и есть внутренняя область угла.

Начать надо с рассмотрения тех образов, которые известны учащимся, не переходя сразу к обобщению понятия угла. Учащиеся строят два луча, исходящие из одной точки. Какую фигуру образовали эти лучи? Они видят, что образовался угол, при этом они воспринимают один угол, тот, который меньше развернутого. Учитель выясняет, что лучи как бы вырезали часть плоскости. На доске и в тетрадях надо заштриховать эту часть плоскости или отметить ее дугой. Затем выделяются элементы угла, его вершина, стороны, вводятся обозначения.

Особенно важно снова подчеркнуть, что сторонами угла являются лучи, то есть они мыслятся неограниченными. Поэтому фраза «величина угла не зависит от его сторон» не имеет смысла. Учащиеся должны понимать, что угол не меняется, как бы они ни изменяли длину тех отрезков, которые на чертеже изображают стороны угла.

Следует вырезать несколько моделей углов из плотной бумаги или картона. Учащиеся опять должны понимать, что стороны угла и часть плоскости, которую они ограничивают, продолжаются дальше «без конца», а на модели их обрывают произвольно. При этом бумагу надо обрезать неровно, чтобы не создавалось ни образа треугольника, ни образа сектора (рис. 127).

Рис. 127

В дальнейшем учащиеся встретятся с углами в различных фигурах: углами многоугольника, различными углами в круге. Необходимо, чтобы учащиеся правильно представляли каждый угол. Так, например, им должно быть ясно, что сторонами угла A треугольника ABC (рис. 146) являются лучи, образованные продолжением сторон AB и AC

[1] Об определении угла см. [221], стр. 85; [223], § 4; [262], § 4.

за концы стороны BC; что стороны центрального угла — это лучи, являющиеся продолжением радиусов и пересекающие окружность Однако, чтобы не усложнять формулировок, принято говорить, что угол треугольника образован его сторонами, а центральный угол — радиусами окружности.

Сравнение углов по величине Учащиеся, которые уже измеряли углы в V классе, могут предложить для сравнения углов измерить их транспортиром. Поэтому следует напомнить, что для определения равенства двух отрезков нам не надо было знать, какова их длина. Вспоминаем, какие два отрезка называются равными, как накладывались отрезки, а затем, пользуясь моделями углов, показываем, как накладывается один угол на другой. При этом полезно показать различие между *наложением* одного угла на другой и *приложением* одного угла к дру-

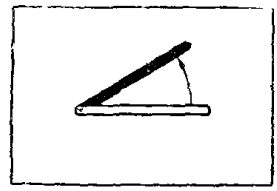
Рис. 128

гому Модели углов надо сделать из бумаги разного цвета, причем один край бумаги должен быть срезан так, чтобы модели равных углов не совпадали полностью при наложении (см. рис 128, *а*, *б*). Сравнивая углы наложением, ученик должен уметь подробно рассказать, в какой последовательности оно осуществляется· «Совместим вершину первого угла с вершиной второго и накладываем угол так, чтобы сторона одного угла пошла по стороне другого; если и другие две стороны совпадут, то углы равны». Так же выясняется и случай неравенства углов: «. .если вторая сторона первого угла пойдет внутри второго угла, то первый угол меньше второго». Впоследствии ученики мысленно смогут воспроизвести процесс наложения углов. Это чрезвычайно важно, так как поможет сознательному усвоению доказательства многих теорем.

Для сравнения двух углов по величине можно использовать столярную малку — инструмент, знакомый учащимся. С помощью малки может быть построен и угол, равный данному. Каждый ученик может изготовить маленькую подвижную модель, которую будет применять для построения угла, равного данному, и для образования углов разного вида (рис. 129).

Обобщение понятия угла должно быть проведено так, чтобы сделать для учащихся психологически приемлемым применение знакомого термина к чуждому им, непривычному образу. Фор-

Рис. 129



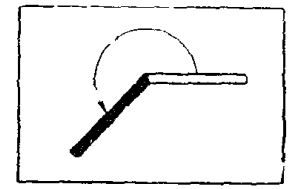


Рис. 130

мальное введение определения «условимся...» не может быть понято. Лучше всего рассмотреть непрерывное изменение угла, для чего использовать подвижное наглядное пособие — на фанере две палочки, скрепленные гвоздиком (рис. 130). Вращая одну из палочек, преподаватель предлагает наблюдать за изменением угла. Когда одна сторона становится продолжением другой, учащиеся считают, что угол исчез, но преподаватель показывает, что вершина его и стороны сохранились, но заняли

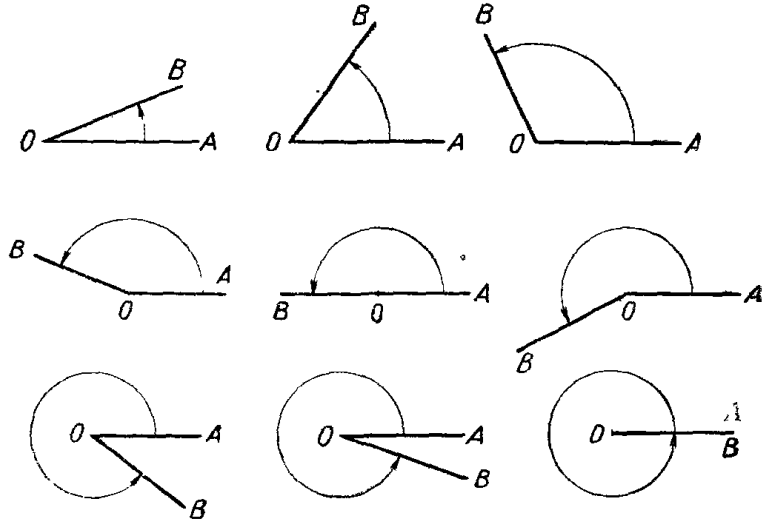


Рис. 131

особое положение, потому и эту фигуру мы называем углом; такой угол называется развернутым. Так же приходим к понятию угла больше развернутого и, наконец, к полному углу. В последнем случае надо особенно четко разъяснить, что оба луча (стороны угла) слились. На доске учителю и в тетрадях учащимся надо начертить последовательное изменение угла, отметив часть плоскости, принадлежащую углу, дужкой или заштриховав ее (рис. 131).

Рассматривать угол больше полного в VI классе преждевременно.

Переходя к понятию о сумме углов, надо еще раз уточнить понятие об углах прилежащих, выяснить, что два прилежащих угла имеют общую сторону (следовательно и общую вершину), но не покрывают один другого. Начертив на доске два прилежащих угла, то есть три луча, исходящие из одной точки (см. рис. 132), можно дать понятие об угле, являющемся суммой двух углов, разностью двух углов.

Ученики могут у себя в тетрадях построить угол, равный сумме двух или трех данных углов, разности двух углов, угол, равный утроенному данному, и т. п. При построении может быть использован изготовленный ими подвижной угол.

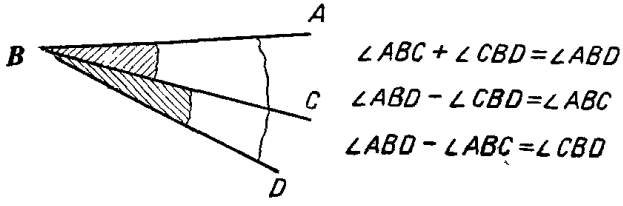


Рис. 132

Построение при помощи циркуля и линейки угла, равного данному, рассматривается в теме «Треугольник»; учащиеся могут использовать транспортир, но его применение для решения этих задач дает и величину заданных углов, то есть меняет содержание задачи; лучше отложить применение транспортира до измерения углов.

Представление о биссектрисе угла можно дать, перегибая пополам модель угла, вырезанную из бумаги. Существование луча, делящего угол на две равные части, принимается учениками как очевидное, как и существование средней точки отрезка. Затем дается определение биссектрисы угла.

Учитель не должен забывать, что учащиеся уже знакомы с углами, могут узнать прямой, острый и тупой угол и правильно их назвать; теперь надо дать этим углам определения. В учебной литературе мы встречаемся с разными определениями прямого угла. Прямой угол определяется как угол в 90°, как угол, равный половине развернутого угла, и как угол, равный своему смежному. Из этих определений следует предпочесть последнее. Градус есть произвольно выбранная единица измерения углов; построение прямого угла может быть осуществлено независимо от единицы измерения, поэтому нет оснований связывать определение прямого угла именно с этими единицами. Определяя прямой угол при помощи развернутого угла, мы для определе-

ния понятия, хорошо знакомого ученикам и наглядно воспринимаемого ими, используем понятие, чуждое для них. Опыт показывает, что учащимся вполне доступно определение прямого угла как угла, равного своему смежному.

К понятию о смежных углах можно подойти различно. Можно предложить продолжить одну из сторон заданного угла за его вершину и этим получить второй угол, *прилежащий* первому; особенностью этих углов будет то, что их необщие стороны образуют одну прямую. Можно рассмотреть подвижное наглядное пособие (рис. 133), на котором имеются два прилежащих угла; поворачивая необщую сторону одного из углов, мы можем сделать так, что она образует со стороной первого угла одну прямую. Такие два прилежащих угла и называются *смежными*

После определения смежных углов можно сразу обнаружить, что их сумма составляет развернутый угол.

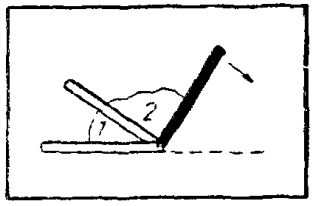


Рис. 133

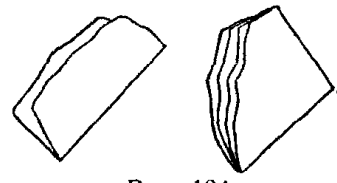


Рис. 134

Возможный переход к определению прямого угла как угла, равного своему смежному углу, был нами рассмотрен выше (см. § 6 стр. 509). Это определение дает и способ образования прямого угла. Необходимо каждому ученику сделать модель прямого угла, для чего перегнуть кусок бумаги по прямой, затем выбрать на этой прямой некоторую точку и снова согнуть лист так, чтобы эта точка была вершиной двух равных друг другу смежных углов. Эти углы равны, так как при наложении совпадают. Развернув лист бумаги, можно убедиться, что углы смежные. Так ученик может сделать угольник для построения прямых углов. Желательно, чтобы края бумаги были неровными, то есть чтобы не получался образ прямоугольника (см. рис. 134). Равенство всех полученных прямых углов для учащихся очевидно. Однако следует с ними выяснить, что каждый прямой угол составляет половину развернутого угла, а так как все развернутые углы равны (при наложении они совпадают), то равны между собой и прямые углы.

Непосредственно из определения смежных углов вытекает и то, что их сумма равна двум прямым углам. Мы уже выяснили, что сумма смежных углов — это развернутый угол, а развернутый угол равен двум прямым углам. Кажущаяся простота

доказательства при очевидности доказываемых положений и представляет большую трудность для учащихся. Поэтому преждевременно оформлять эти доказательства в виде теорем и требовать их воспроизведения.

Определения острого и тупого углов не могут вызвать затруднений; необходимо только показать, что недостаточно сказать, что тупой угол больше прямого, надо добавить, что он меньше развернутого.

Построение прямого угла при помощи чертежного треугольника и линейки уже знакомо ученикам; поэтому можно после определения перпендикуляра к прямой дать две основные задачи на построение перпендикуляра к прямой через данную точку: 1) точка задана на прямой и 2) точка задана вне прямой. Построения должны выполняться при различных положениях прямых; в том числе надо задать точку вне прямой так, чтобы при построении начерченный отрезок прямой пришлось продолжить (рис. 135). Такие построения можно задавать и на дом. Естественно возникает вопрос, сколько перпендикуляров можно провести к прямой через данную точку. Ответ подсказывается опытом: один. Этот ответ легко обосновать, если точка лежит на прямой, так как в этом случае второй луч прошел бы внутри прямого угла. Если точка лежит вне прямой, то обосновать единственность перпендикуляра трудно[1]. Можно только показать наглядно, приложив чертежный треугольник раньше с одной стороны от заданной точки, а потом — с другой, или использовать перегибание чертежа по прямой[2]. Доказательство может быть дано или с помощью симметрии относительно прямой, или с помощью свойства внешнего угла треугольника, то есть уже в теме «Треугольник»[3].

Рис. 135

Мы не останавливаемся здесь на методике изучения вертикальных углов, так как эти вопросы были рассмотрены в § 7.

Окружность. Измерение углов.

Измерение углов при помощи транспортира, а в связи с этим и некоторые понятия об окружности даются учащимся уже в V классе. В VI классе учителю придется не просто повторить то, что изучено в V классе, но и систематизировать материал, ввести некоторые определения, обоснования, а также закрепить практические навыки.

Проведение уроков на темы, уже в некоторой мере известные учащимся, вызывает особые затруднения: учитель не может

---

[1] См. [248], гл. I, п. 24.
[2] См. [266], стр. 142.
[3] См. ч. IV, § 18 и [258], § 26.

игнорировать тот факт, что ученики уже многое знают, но в то же время надо заинтересовать их новыми дополнениями и приведением материала в систему.

Прежде всего обращаемся к *построению окружности.* При этом следует вспомнить, что острие циркуля ставится в некоторую точку, которая будет центром окружности; выяснить, что все точки окружности лежат на той же плоскости и на данном расстоянии от центра (оно задано раствором циркуля). После этого можно ознакомиться по учебнику с определением окружности, круга, радиуса. Ученики должны начертить в круге несколько радиусов, несколько хорд, несколько диаметров. Дается определение хорды и выясняется, что диаметр есть хорда, проходящая через центр. Легко установить, что диаметр равен двум радиусам. В школьном учебнике есть доказательство того, что диаметр есть наибольшая хорда данного круга[1]. Это свойство очевидно из чертежа, в материале, рассматриваемом в VI классе, оно нигде не используется. Вероятно, эту теорему было бы целесообразнее дать в VII классе в теме «Окружность».

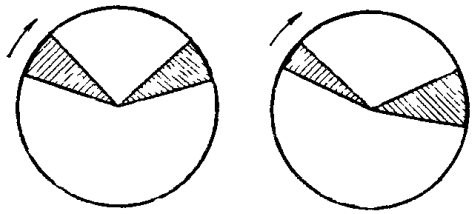


Рис 136

Подробнее надо остановиться на *понятии дуги окружности.* Отметив на окружности две точки, показать, что они разделили окружность на две части: две дуги. Хорошо выделить обе дуги цветным мелом и обозначить каждую тремя буквами. Перегнув круг, вырезанный из бумаги, по диаметру, можно показать, что окружность разделилась на две равные части, так как дуги при наложении совпали. Чтобы показать, как можно сравнить по величине две дуги одной окружности, хорошо использовать наглядное пособие: круг, на котором сектор, выделенный другим цветом, вращается вокруг центра (рис. 136). Вращая сектор, можно совместить его дугу с другой дугой — такие дуги равны. Также можно показать, что при совмещении начальных точек двух дуг конечная точка одной из них может расположиться внутри другой дуги (рис. 136, *б*). *Равенство двух окружностей,* имеющих равные радиусы, тоже может быть иллюстрировано совмещением двух кругов, вырезанных из картона. Полезно показать, что дуги двух окружностей разных радиусов совместить нельзя, даже если можно совместить и начальные и конечные точки. Для упражнения можно предложить учащимся назвать и показать все дуги, которые выделены на окружности тремя точками. При этом можно дать понятие о сумме дуг,

[1] См. [258], § 12.

разности дуг, ввести запись с использованием условного обозначения дуги. Понятия о дуге, которая больше окружности, давать не надо.

Основным вопросом этой небольшой темы является понятие о центральном угле и соответствии между центральными углами и дугами, так как эти знания необходимы для обоснования измерения углов при помощи транспортира. *Понятие центрального угла* и его определение обычно не вызывает затруднений. Легко показать и то, что стороны центрального угла (лучи) вырезают дугу, соответствующую этому углу. Дальше в учебнике доказывается прямая и обратная теоремы о равенстве центральных углов и соответствующих им дуг. При этом мы встречаемся с теми трудностями, на которые указывалось выше (§ 7, стр. 524). Поэтому здесь следует заняться выяснением *понятия обратной теоремы*, то есть необходимо четко выделить, что дано и что требуется доказать. При доказательстве первой теоремы, в которой дано равенство двух центральных углов, следует построить на доске два равных угла, например, при помощи малки, *а затем уже выяснить, что надо доказать равенство соответственных дуг.* Иллюстрация доказательства на наглядном пособии, на котором осуществляется поворот сектора [1], мало помогает усвоению смысла доказательства, так как ученики видят одновременное совпадение и углов и дуг. При доказательстве первой теоремы учитель задает вопрос, почему дуги должны совпадать, если совпали углы. При доказательстве второй теоремы — обратный вопрос. Следует признать, что на этой ступени развития подростков им трудно понять логическую последовательность доказательства.

При переходе к *градусному измерению углов* и *дуг* надо опереться на имеющиеся у школьников знания и умения, но надо помнить, что в V классе многое могло быть усвоено формально. Вероятно, на вопрос «Как мы измеряем угол?» ученики ответят: «Транспортиром» и скажут, что за единицу меры принимается 1 градус; но при этом очень часто «градус» для них это одно деление на транспортире и связи этого измерения с установленными зависимостями между центральными углами и дугами они не сознают. Поэтому прежде всего надо вспомнить вообще об измерении величин; выяснить, что при измерении длины отрезка за единицу принимался определенный отрезок (1 *см* или 1 *м*...), при измерении площади имели единицу площади (1 *кв. см* или 1 *кв. м*) и т. п. Значит, при измерении угла за единицу должен быть взят определенный угол и, чтобы найти величину угла, надо выяснить, сколько раз в данном угле отложится угол, принятый за единицу, или его доля. Полезно при этом показать, что можно было бы за единицу принять прямой

[1] См. рис. 136, *а*.

угол, так как все прямые углы равны. Модель прямого угла каждый ученик умеет сделать, но измерять им неудобно. Путем перегибания бумаги можно получить доли прямого угла: половину, четверть, восьмую. На рисунке 137 показано, как с помощью долей прямого угла можно построить или измерить угол, равный $1\frac{1}{2}d$; $\frac{3}{4}d$. Учащиеся заметят, что измерить транспортиром гораздо легче. Тогда и надо четко выяснить, что за единицу при измерении углов принят угол в 1 *угловой градус*, который составляет $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Но при измерении транспортиром мы измеряем не угол, а дугу, и при том *дуговыми градусами*, которые и отмечены на дуге транспортира. После этого можно снова обратиться к пособию, которое давалось в V классе (см. § 5), и выяснить, что центральный угол содержит столько угловых

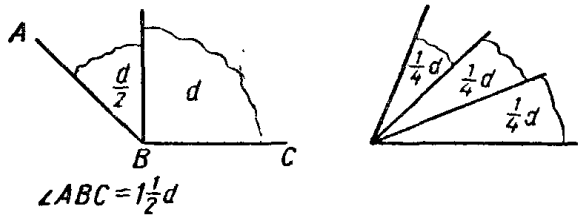


Рис. 137

градусов, сколько соответствующая ему дуга — дуговых. На этом и основано устройство транспортира. В зависимости от того, какие навыки имеют учащиеся, необходимо провести несколько упражнений на построение и измерение углов при помощи транспортира. Углы надо, конечно, задавать в разных положениях и добиваться того, чтобы ученики умели не только правильно приложить транспортир, но и объяснить, что при этом они превращают угол в центральный, что, хотя дуги у разных транспортиров могут быть различной величины, число дуговых градусов всегда будет равно числу угловых градусов центрального угла.

В числе упражнений на применение транспортира могут быть и задания на построение секторных диаграмм. Так же как при построении и измерении отрезков, надо обратить внимание на то, что измерение углов приближенно, и выяснить возможную погрешность.

В этой же теме учащиеся знакомятся с измерением и построением углов на местности при помощи астролябии, а также вспоминают, как строится прямой угол при помощи эккера.

При изучении первой темы решаются несложные задачи на вычисление, на доказательство и выполняются построения с помощью линейки, треугольника, транспортира, малки. Примеры задач и их возможное оформление были даны выше (гл. III).

Большое внимание надо уделить чтению чертежа и умению изобразить на чертеже словесно выраженное условие задачи. Так, например, можно задать учащимся: взять на прямой MN точку P и провести из этой точки по одну сторону от прямой три луча PA; PB, PC; назвать все образовавшиеся углы. Многие ученики заметят только четыре угла; подсчет числа всех углов, образовавшихся по одну сторону от прямой, вызывает живой интерес. Затем на этом же чертеже выделяются 4 угла, попарно прилежащие, и выясняется, чему равна их сумма.

В результате изучения первой темы ученики должны уметь четко формулировать известные им определения, правильно называть геометрические фигуры, уметь найти их среди окружающих предметов, аккуратно выполнять чертежи, пользоваться обозначениями. Умение доказывать теоремы, решать задачи на доказательство и вычисление с полным обоснованием будет еще совершенствоваться при дальнейшем прохождении курса геометрии, но понимание первых несложных логических выводов, стремление найти ответ на вопрос, почему осуществляется какая-либо зависимость, нужно воспитывать уже при прохождении первой темы.

§ 17. Треугольник

Вторая тема VI класса — «Треугольник» — является одной из наиболее обширных тем школьного курса геометрии. Основные вопросы темы: определение треугольника, виды треугольника (классификация), линии в треугольнике; свойства равнобедренного треугольника; равенство треугольников (равенство прямоугольных треугольников); теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника.

В эту тему включены также понятие об осевой симметрии, основные задачи на построение, понятие о проекции отрезка на прямую и свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из некоторой точки к прямой. В программе не упоминается термин «геометрическое место точек», но фактически учащиеся знакомятся с некоторыми геометрическими местами точек плоскости (перпендикуляр, проведенный к отрезку через его середину, биссектриса угла), что позволяет применять эти понятия к решению задач на построение [1].

При изучении этой темы учащиеся знакомятся с новыми способами доказательства теорем: методом наложения, применением осевой симметрии, доказательством «от противного», школьники неоднократно встречаются с образованием обратных теорем; должны приобрести навыки решения несложных задач на доказательство и построение. В § 4 мы уже рассмотрели

[1] См. ч. IV, § 14, стр. 581.

различные системы построения темы «Треугольник». Применение к доказательству теорем понятия симметрии рассмотрено в § 18.

Определение треугольника.

В учебной литературе можно встретить различные определения треугольника: в одних учебниках треугольник рассматривается как частный случай многоугольника, в других — треугольник определяется независимо от многоугольника [1]. И в том и в другом случае треугольник (и многоугольник) может рассматриваться как часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, или как замкнутая ломаная линия. Второе определение вызывает большие усложнения всех формулировок. Так, например, согласно учебнику Н. А. Глаголева фразу «Многоугольник разбит на треугольники» приходится считать сокращенным выражением формулировки: «Часть плоскости, ограниченная данным многоугольником, разбита на части, каждая из которых ограничена треугольником»[2]. *Определение треугольника* как части плоскости соответствует привычному представлению учащихся: они вырезали из бумаги модель треугольника, находили площадь треугольника. Такое определение позволяет не условно, а просто говорить: «Биссектриса треугольника делит его на два треугольника». Как сказано выше, определение угла, треугольника и многоугольника должны даваться аналогично, то есть следует во всех случаях говорить о части плоскости.

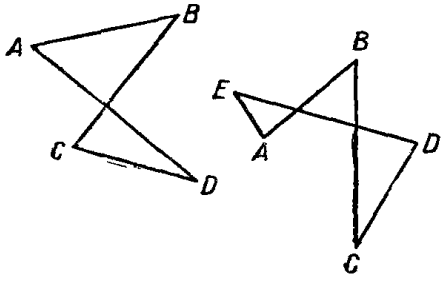


Рис 138

В школе рассматриваются только простые многоугольники, то есть такие, стороны которых не имеют других точек пересечения, кроме вершин. Имея шарнирную модель ломаной линии, состоящей из нескольких отрезков, можно с ее помощью образовать замкнутую ломаную, показать примеры непростого многоугольника (рис. 138), а затем — различных простых многоугольников > Школьники легко заметят, что если наложить шарнирную модель ломаной линии на плоскую поверхность (например, на классную доску), то замкнутая ломаная как бы выделяет часть плоскости, ограничивает плоскость. Это наблюдение поможет сформулировать определение многоугольника, данное в учебнике Н. Н. Никитина. Чтобы установить *понятие выпуклого многоугольника*, лучше всего начертить на доске или рассмотреть на готовом чертеже несколько разных многоуголь-

[1] Сравнить· [227] [248], [258].
[2] См. [227], § 249.

ников и, прикладывая линейку к каждой из сторон выпуклого и невыпуклого многоугольников, показать, в чем их различие При помощи шарнирной модели ломаной линии, состоящей из семи-восьми отрезков, можно образовать выпуклый многоугольник и затем, постепенно уменьшая число отрезков, показать различные многоугольники (шестиугольник, пятиугольник и т. д.). Обнаруживается, что наименьшее число сторон имеет треугольник. Полезно сформулировать *определение треугольника* и независимо от понятия многоугольника: «Часть плоскости, ограниченная ломаной замкнутой линией, состоящей из трех отрезков, называется треугольником».

Все рассмотренные нами определения являются описаниями, так как в них не выделяется, какая именно часть плоскости имеется в виду; описание основывается на наглядном восприятии [1].

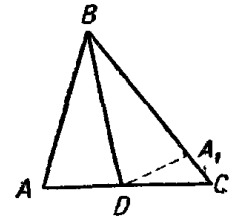


Рис 139

Свойство сторон треугольника может быть рассмотрено сразу после определения, так как сформулированное в первой теме геометрии свойство отрезка обосновывает положение, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Можно при этом использовать три шарнирные модели ломаных линий, состоящие каждая из трех отрезков разной длины. Предлагается при помощи каждой ломаной образовать треугольник; оказывается, что это можно сделать только пользуясь одной из ломаных. Учащиеся сами должны выяснить, почему нельзя выделить части плоскости другими ломаными, и сделать вывод. (На пособиях во второй ломаной средний отрезок равен сумме двух других, а в третьей — больше суммы двух других.)

Сложнее обосновать зависимость стороны треугольника и разности двух других сторон. Выводы, данные в учебниках А. П. Киселева и Н. Н. Никитина, основываются на свойстве неравенств, которые не проходятся в VI классе Поэтому перед формулировкой вывода и его записью в общем виде следует решить несколько примеров, в которых надо к обеим частям числового неравенства прибавить одно и то же число и выяснить, что смысл неравенства от этого не меняется. Такие же примеры даются и на вычитание от обеих частей неравенства одного и того же числа.

Приводим геометрическое доказательство теоремы

В $\triangle ABC$ $BC > AB$ (рис. 139). Перегибаем $\triangle ABC$ по биссектрисе угла B (BD); сторона BA идет по BC, точка A совпадает с точкой A_1 ($BA_1 = BA$). В $\triangle DA_1C$ $DA_1 + DC > A_1C$, но $DA_1 = AD$, $A_1C = BC - BA$, $DA_1 + DC = AC$. Следовательно, $AC > BC - BA$.

[1] Более строгие определения см. в кн. [223], § 5, 6; [262], § 5, [19], стр. 119

Классификация треугольников.

О классификации треугольников мы уже говорили выше (§ 6); там были указаны и наглядные пособия, которые могут быть использованы на уроке (рис. 23 и 24). В результате рассмотрения всех видов треугольника по сторонам и по углам в отдельности следует совместно с учащимися составить таблицу «в два входа», дающую полную классификацию треугольников (рис. 140).

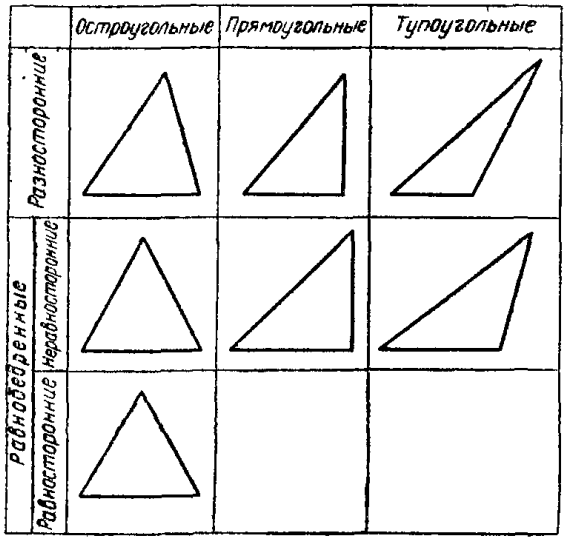


Рис. 140

К этому уроку следует заранее заготовить на плакате или на доске графы с названием видов треугольников по сторонам и по углам, а ученики дома изготовят из бумаги модели треугольников всех видов (подходящего для таблицы размера). На уроке учитель показывает модель треугольника и предлагает определить его вид по сторонам и по углам и найти его место в таблице (куда и прикалывается модель). Опыт проведения такого урока показывает, что он вызывает большой интерес учащихся. В результате наглядно воспринимается, что может существовать только семь частных видов треугольника. Пустые места показывают, что равносторонний треугольник не может быть ни прямоугольным, ни тупоугольным. Обоснование этого факта еще не может быть дано так же, как не может быть обосновано, почему в треугольнике, у которого один угол тупой или прямой, остальные два угла острые. Ученики воспринимают эти положения наглядно: следует предложить каждому из них построить тупой (или прямой) угол и образовать треугольник пересечением сторон угла прямой. Также можно показать, что если начертить острый угол, то, проводя прямую, пересекающую его стороны, можно получить треугольник любого вида (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный). Эти построения поясняют различия в формулировке определений треугольников разного вида.

Линии в треугольнике.

Одни авторы определяют биссектрису, медиану и высоту как отрезки, другие — как прямые. Второе определение мы встречаем в геометрии Н. А. Глаголева. Оно неудобно тем, что

нельзя говорить о длине прямой линии и приходится ввести новое дополнительное определение, вводящее понятие длины биссектрисы, медианы и высоты [1]. Проще каждую из линий в треугольнике определить как некоторый отрезок. Так, например, *биссектрисой треугольника* является отрезок биссектрисы соответственного угла треугольника от вершины до противолежащей стороны. Затруднения возникают при определении *высоты треугольника* Обычно говорят: «Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение, называется высотой треугольника». Неясность происходит от того, что термин «перпендикуляр» применяется и в смысле прямой, и в смысле отрезка (например, когда говорят о длине перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки). Уточнение определения высоты усложняет формулировку [2]. Достаточно достигнуть того, чтобы учащиеся под высотой треугольника понимали определенный отрезок прямой и умели его построить К определению каждой из линий в треугольнике следует идти от построения. Могут быть использованы и подвижные модели треугольников, сделанные из тонких реек; к каждой вершине модели прикреплена палочка, вращая которую можно получить одну из линий треугольника. Необходимо, чтобы каждый ученик выполнил самостоятельно построение, пользуясь масштабной линейкой, чертежным угольником и транспортиром Построение всех трех линий должно быть выполнено в треугольнике каждого вида. Эта работа может быть задана на дом, причем ученики могут использовать имеющуюся у них таблицу классификации треугольников Особенное внимание надо уделять проведению трех высот в тупоугольном треугольнике.

При выполнении построения одной и той же линии в треугольнике из каждой его вершины ученики обнаруживают, что три медианы пересекаются в одной точке, также и три биссектрисы, но не замечают пересечения высот в тупоугольном треугольнике Учитель предлагает продолжить каждую высоту тупоугольного треугольника и выясняет, что продолжения трех высот пересекаются в одной точке. Доказательства этих фактов, установленных путем наблюдения, не могут быть даны в VI классе. Теорема о пересечении медиан дается в VII классе в теме «Четырехугольники»; о точке пересечения трех перпендикуляров, проведенных к каждой стороне треугольника через ее середину, говорится тоже в VII классе при построении окружности через три точки, не лежащие на одной прямой; теорема о пересечении биссектрис треугольника рассматривается только в VIII классе в теме «Вписанные и описанные многоуголь-

[1] См [227], § 57

[2] См [223], стр 86, [248], § 53 (примечание); [18].

ники». Теорема о точке пересечения высот треугольника (или их продолжений) в программу геометрии не включена. Эту теорему, если позволяет время, можно рассмотреть в VIII классе после повторения теоремы о пересечении трех перпендикуляров, проведенных к каждой стороне треугольника через ее середину, как задачу на доказательство. Затем учащихся можно познакомить с так называемыми четырьмя замечательными точками в треугольнике. Этот материал может быть использован и для внеклассной работы с учащимися [1].

Свойства равнобедренного треугольника.

Когда говорят о свойствах равнобедренного треугольника, то обыкновенно подразумевают две различные теоремы: 1) о свойстве биссектрисы угла при вершине и 2) о равенстве углов при основании треугольника. Оба свойства обычно рассматриваются одновременно, так как при доказательстве теоремы о биссектрисе угла при вершине пользуются перегибанием чертежа по биссектрисе; совпадение двух треугольников дает возможность обосновать сразу равенство всех их соответственных элементов, то есть и то, что биссектриса угла при вершине является одновременно медианой, высотой и осью симметрии треугольника, и то, что углы при основании треугольника равны.

Понятие об осевой симметрии вводится до рассмотрения свойств равнобедренного треугольника; поэтому вполне возможно в основу доказательства положить отыскание оси симметрии равнобедренного треугольника. Теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника имеет особое значение, так как она является одной из четырех теорем, устанавливающих соотношение между сторонами и углами треугольника. С этой точки зрения ее и надо рассматривать. В § 18 показано, что все эти теоремы могут быть доказаны на основании свойств осевой симметрии, то есть их можно ввести до рассмотрения признаков равенства треугольников.

Свойство углов при основании равнобедренного треугольника может быть также установлено наложением треугольника на самого себя после поворота его [2] «другой стороной плоскости». Этот способ доказательства удобен тем, что так же может быть доказана и обратная теорема, то есть уничтожается разрыв между прямой и обратной теоремами. Однако ученики не легко понимают смысл наложения треугольника на самого себя; для разъяснения следует использовать соответствующее наглядное пособие.

Равенство треугольников.

Определение равенства треугольников уже подготовлено определением равенства отрезков и углов и потому не вызывает

---

[1] См. [248], § 141—143; [227], § 88, 99—101; [216], гл. VII.

[2] См. [216], гл. I, § 23; [19], § 21.

затруднений. Осуществление совмещения треугольников гораздо сложнее, чем совмещение углов, и поэтому полезно рассмотреть его на наглядных пособиях. При совмещении равных углов безразлично, какой «стороной плоскости» накладывать угол, между тем как при наложении треугольников это имеет существенное значение. Надо иметь три равных треугольника, вырезанных из картона или плотной бумаги, причем «изнанка» каждого из них

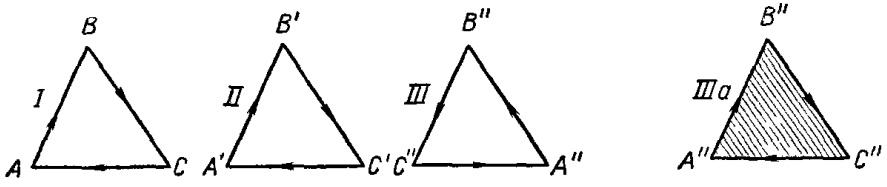


Рис. 141

должна быть другого цвета. На рисунке 141 изображены эти треугольники; вершины соответственно равных углов обозначены одинаковыми буквами. При наложении треугольника II и III на треугольник I выясняется, что II треугольник можно совместить с I, передвигая его в плоскости, III треугольник невозможно совместить с I никаким перемещением его в плоскости; только если перевернуть его «изнанкой», как это показано на рис. III *а*, можно осуществить совмещение. Причиной этого является различная ориентированность сторон (обвод контура) треугольника I и II, что на чертеже отмечено стрелками.

Пользуясь чертежами и пособиями, надо пояснить термины *угол прилежащий* к стороне, *угол противолежащий*. Учащиеся не всегда могут указать угол, противолежащий меньшей стороне тупоугольного треугольника (рис. 142). Полезно на чертеже продолжить стороны треугольника, заключающие некоторый угол, и выяснить, что прилежащие стороны лежат на сторонах угла (лучах), а противолежащая углу сторона расположена внутри угла (рис. 143). Осуществляя совмещение двух равных треугольников, вырезанных из плотной бумаги, следует

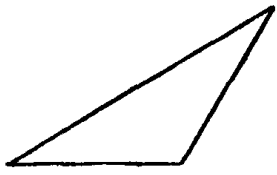


Рис. 142

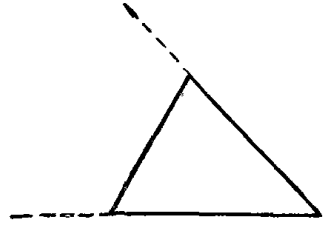


Рис. 143

установить, что в них против равных сторон лежат равные углы (и обратно). На этих пособиях равные стороны должны быть окрашены одинаковым цветом, дужки, проведенные внутри углов, окрашивают в тот же цвет, что и противолежащие стороны. Еще лучше, если один из треугольников начерчен на кальке или прозрачной бумаге.

Выше мы указывали, что ученики активно воспринимают материал и лучше его усваивают, если он рассматривается в ясной для них системе. Раздел «Равенство треугольников» можно изучать в таком порядке. Выяснив, что для установления равенства двух треугольников согласно определению необходимо проверить возможность совмещения их при наложении, естественно поставить задачу отыскать *признаки* равенства. Целевая установка — найти наименьшее число соответственно равных элементов, достаточное для утверждения, что два треугольника равны, то есть выяснить, каковы эти элементы и как они расположены.

Одним из путей, ведущих к разрешению поставленной задачи, является построение треугольников — сначала по недостаточному числу заданных элементов, чтобы показать, что треугольник этими элементами не определяется однозначно; затем осуществляя построение по элементам, которые определяют треугольник. Эта определенность учениками осознается интуитивно. Последующее доказательство признаков равенства треугольников является логическим завершением этих наблюдений. Если при построении треугольника выяснить, что два элемента его не определяют, а затем испробовать все возможные способы задания трех элементов, то могут быть установлены все признаки равенства треугольников (по основным элементам). Тогда все признаки равенства прямоугольных треугольников являются следствием общих признаков и не требуют особого доказательства.

Последующие теоремы о соотношении между равными наклонными и их проекциями (прямая и обратная теоремы) вытекают из установленных признаков равенства прямоугольных треугольников [1].

В программе по геометрии для VI класса указаны только три признака равенства треугольников, поэтому признаки равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу и гипотенузе и катету должны быть доказаны особо.

Если рассматриваются три признака равенства треугольников, к формулировке каждого признака можно подойти от построения треугольника.

---

[1] В приложении к этому параграфу изложена система рассмотрения всех признаков равенства и приведена соответствующая таблица.

Построения могут быть проведены по такому плану:

1) Задается одна сторона треугольника — AB. Построив отрезок AB, мы нашли положение двух вершин треугольника; положение третьей вершины ничем не определено. Можно построить бесчисленное множество различных треугольников (ограничиваемся построением точек по одну сторону от прямой AB) (рис. 144).

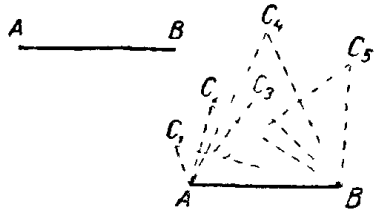


Рис. 144

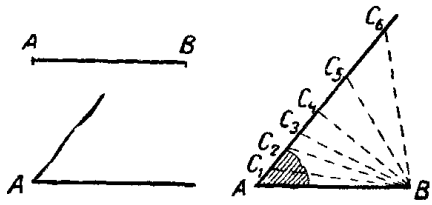


Рис 145

2) Задаем сторону AB и прилежащий к ней угол A. Угол A определяет направление стороны AC. Вершина C должна лежать где-то на луче AC. Можно построить бесчисленное множество различных треугольников (рис. 145).

Учащиеся быстро схватывают, что надо задать еще один элемент — или сторону AC, или направление стороны BC, то есть угол B. В том и в другом случае, осуществляя построение, они получают уверенность в однозначной определенности треугольника. Например: отрезок AC определяет на луче только одну точку C. Точки C и B определяют только одну прямую (рис. 146). В зависимости от того, к формулировке какого признака равенства преподаватель хочет подготовить учащихся, он и добавляет третье данное.

Предложив каждому ученику построить треугольник по трем элементам, которые для всех школьников заданы одинаково, учитель предлагает выяснить, равны ли эти треугольники [1]. Можно предложить ученикам построить дома два треугольника по одним и тем же данным и вырезать эти фигуры. Опытная проверка равенства этих треугольников может показать небольшие расхождения. Обычно ученики утверждают, что построенные треугольники

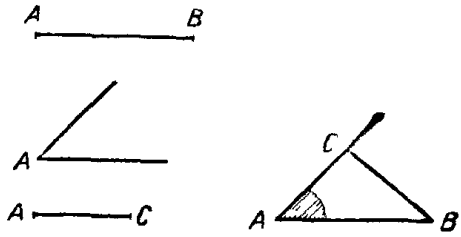


Рис 146

[1] При построении углов учащиеся пользуются транспортиром.

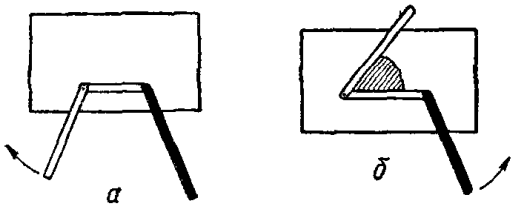


Рис. 147

должны быть равны. Дается формулировка признака и его доказательство.

Кроме построений, может быть использовано и наглядное пособие (рис. 147, *а*). На фанере закреплена тонкая планка, изображающая сторону треугольника. Две другие планки могут вращаться. Кроме того, заготовлены из фанеры или картона модели углов, которые могут вставляться между двумя планками. Вложив один угол (как указано на рис. 147, б), мы тем самым закрепляем направление второй стороны, но направление третьей стороны пока ничем не определено. Остается определить ее величиной второго угла (при вершине B) или отметить мелом точку C (конец стороны AC). Такое же пособие может быть использовано и для построения треугольника по трем сторонам. Ученики могут сконструировать треугольник из трех полосок, вырезанных из цветной бумаги.

Порядок рассмотрения признаков равенства треугольников может быть различен, поэтому лучше, ссылаясь на равенство треугольников, указывать конкретное содержание признака равенства их, а не порядковый номер теоремы.

При традиционном изложении признак равенства треугольников по трем сторонам доказывается приложением и потому рассматривается третьим, так как доказательство опирается на один из ранее доказанных признаков [1].

Однако доказательство этого признака равенства треугольников может быть проведено и наложением [2], независимо от остальных признаков равенства.

Все признаки равенства могут быть доказаны на основании понятия симметрии, что рассмотрено в § 18.

Рассмотрим подробнее метод доказательства наложением Следует отметить, что если равные треугольники определены как такие, которые при наложении могут быть совмещены, то естественно, что для доказательства равенства двух треугольников надо показать, что их действительно можно совместить. Однако при своей кажущейся простоте доказательство не всегда правильно усваивается учащимися. Для них очевидно, что треугольники равны и поэтому должны совпасть. Между тем смысл доказательства в том, что надо обосновать возможность совмещения треугольников, из которого вытекает их равенство, что

[1] См [248], [258].
[2] См. [216], § 24; [240], § 38,

остается иногда непонятным. Обоснование в каждом этапе доказательств ученики также часто усваивают формально. Это легко проследить по ошибкам учащихся. Например, они допускают такие формулировки: «сторона AB пойдет по стороне A_1B_1, так как эти стороны равны» или «треугольники совпали, так как они равны», хотя все доказательство было изложено правильно. Ученики неясно различают и то, что совмещение одних элементов треугольников зависит от нас, а совпадение других не может быть произвольным, оно зависит от данных. Ученики иногда говорят: «Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совпала с вершиной A_1, сторона AB пошла по стороне A_1B_1, вершина B совпала с вершиной B_1» и т. д.

Для иллюстрации мысленного процесса наложения учитель иногда предлагает «постепенно» накладывать модель одного треугольника на другой, равный ему. Этот прием ничего не выясняет; как только ученик совместит одну сторону и повернет треугольник так, чтобы совместился угол,— оба треугольника совместятся всеми своими точками, независимо от того, равенство каких элементов дано, и основание для совмещения каждой пары элементов остается скрытым. Ученик наблюдает то, в чем он не сомневался.

Для выяснения оснований совмещения элементов треугольников можно применить наглядные пособия, но ими должны быть именно неравные треугольники. Среди этих треугольников должны быть:

1) два треугольника. у которых соответственно равны одна сторона и один, прилежащий к ней, угол;

2) два треугольника, у которых соответственно равны две стороны, но углы, заключенные между этими сторонами, не равны.

Соответственно равные элементы должны быть отмечены одинаковым цветом.

Пользуясь такими треугольниками, можно показать:

1) Какие бы два треугольника мы ни взяли, даже если в них совсем нет равных элементов — всегда можно так наложить один из них на другой, чтобы совместилась одна пара вершин, чтобы одна сторона треугольника пошла по стороне другого треугольника, чтобы вершины, противолежащие этим сторонам, лежали по одну сторону от них; совмещение остальных элементов от нас не зависит (рис. 148).

2) Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AC и A_1C_1 совпали, то сторона AB пойдет по стороне A_1B_1 даже если эти стороны не равны, если только угол A равен углу A_1 (рис. 149), и, *несмотря на равенство* AB и A_1B_1, AB не пойдет по A_1B_1, если угол A не равен углу A_1 (рис. 150).

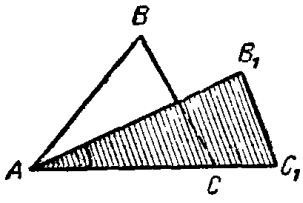


Рис. 148

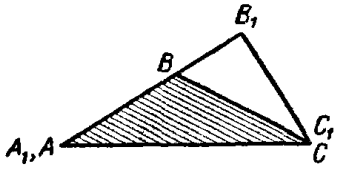


Рис. 149

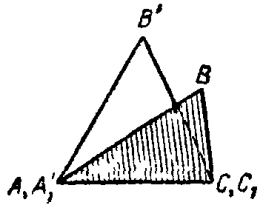


Рис. 150

Применение наглядного пособия не является обоснованием доказательства, но оно помогает ученикам осознать логическое обоснование, которым пользуются при доказательстве. Приводим схематическую запись доказательства признака равенства треугольников по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

Теорема (рис. 151).

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$; $AC=A_1C_1$; $\angle A=\angle A_1$; $AB=A_1B_1$

Требуется доказать:

$\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство.

I. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы:

1) точка A совпала с точкой A_1,

2) AC пошла по A_1C_1.

II. Тогда:

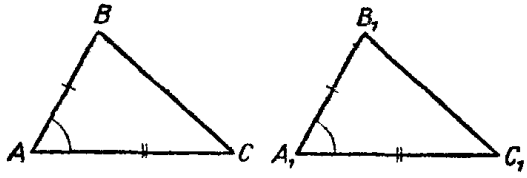


Рис. 151

3) точка C совпадет с точкой C_1 (так как $AC=A_1C_1$);

4) AB пойдет по A_1B_1 (так как $\angle A=\angle A_1$);

5) точка B совпадет с точкой B_1 (так как $AB=A_1B_1$)

6) BC совпадет с B_1C_1 (так как крайние точки этих отрезков совместились).

III. Следовательно, $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (так как они совместились).

Ученики должны понимать, что доказательство относится не к той паре треугольников, которая изображена на доске, а к любым двум треугольникам, имеющим соответственно равные эле-

менты согласно условию теоремы. Должно быть выяснено, в каком звене доказательства использовано каждое данное в условии теоремы; особенно надо выяснить, что пункт 6-й следует не из условия, а из ранее известного положения (какого именно?). Полезно одинаково отметить соответственно равные элементы.

Чтобы выявить, что ученики не механически повторяют обоснования, полезно ставить такие вопросы: как бы пошла сторона AB, если бы угол A был меньше угла A_1 (если уже установлено, что AC совмещено с A_1C_1 и луч AB расположен в той же полуплоскости, где и луч A_1B_1)? если угол A больше угла A_1? и т. п.

Если доказательство одного из признаков равенства треугольников наложением тщательно проработано и учениками усвоено, то доказательство другого признака тем же способом усваивается гораздо легче.

Доказательство признака равенства треугольников по трем сторонам в учебниках А. П. Киселева и Н. Н. Никитина проводится приложением. Если учащиеся попробуют по аналогии с доказательством предыдущих признаков осуществлять мысленное наложение, то они убедятся, что нельзя рассуждать по-прежнему, так как недостает равенства углов. Поэтому учитель и предлагает новый способ доказательства; не следует только говорить, что теорему нельзя доказать наложением [1]. Целевая установка нового способа доказательства заключается в том, чтобы свести его к уже известному признаку равенства треугольников. Для этого необходимо доказать равенство хотя бы одной пары углов.

Чтобы ученики поняли, почему применяется именно способ приложения, следует предварительно решить соответственные задачи на доказательство [2].

При доказательстве не надо ограничиваться рассмотрением одного случая расположения чертежа, на котором отрезок, соединяющий вершины треугольников, проходит внутри треугольников (рис. 152) Следует рассмотреть и другие возможные случаи (рис. 153), что́ будет хорошей задачей на доказательство.

---

[1] Доказательство наложением, данное в книге Ж. Адамара (§ 24), проводится методом «от противного» и очень сложно для учащихся Доказательство, приведенное в учебнике Н. А. Извольского (§ 38), нагляднее, но в нем используется совмещение двух окружностей, что требует дополнительного изучения. Интересно отметить, что если рассмотрена система теорем о зависимости между сторонами и углами в двух треугольниках, имеющих две соответственно равные стороны, то признак равенства треугольников по трем сторонам является одной из теорем этой системы и доказывается «от противного» как одна из обратных теорем. Это положение рассмотрено в кн [216], § 28 Подробнее этот вопрос изложен в кн. [19].

[2] См. ч. IV, § 11, рис. 50 и 51.

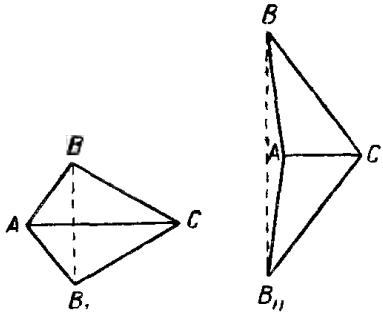


Рис. 152 Рис. 153

Если бы теорема о зависимости между сторонами и углами треугольника была уже доказана, то можно было бы обосновать, что, приложив треугольники большими сторонами, мы всегда получим расположение I (сумма углов при вершине A и при вершине C должна быть меньше развернутого угла).

Рассмотрев равенство треугольников по трем сторонам, учащимся надо пояснить, что треугольник — фигура «жесткая», то есть не меняет своей формы при данной длине сторон. Следует показать, что этим свойством объясняется применение треугольной формы в технических конструкциях: подъемных кранах, стропильных фермах и пр. На моделях шарнирных четырехугольников можно убедиться, что четырехугольники этим свойством не обладают.

Непосредственно после доказательства каждого признака равенства треугольников надо показать его применение к решению задач на доказательство, что помогает выявить значение признаков равенства [1]. После изучения всех признаков равенства треугольников особенно полезны задачи, решая которые ученик должен выбирать, каким признаком равенства ему надо воспользоваться [2]. В задачнике Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой приведено много таких задач.

Рассмотрение признаков равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу, гипотенузе и катету тоже следует начать с построения. Эти теоремы могут быть доказаны методом симметрии [3]. Во всяком случае не следует делать так, как это дается в учебнике А. П. Киселева, где один из признаков доказывается на основании зависимости между наклонными и их проекциями (§ 57); в то же время при доказательстве теоремы о наклонных и их проекциях пользуются признаком равенства треугольников, который был дан раньше (§ 54).

[1] См. § 13.
[2] См, например, § 13, рис. 72.
[3] См. § 18.

Здесь нет логической ошибки, но создается трудно воспринимаемый учащимися порядок теорем и логической зависимости между ними. Лучше все теоремы о наклонных и их проекциях рассматривать после изучения равенства треугольников.

Знакомство с некоторыми геометрическими местами точек и задачи на построение рассматриваются в § 14.

Приложение

На таблице I (стр. 630) показано построение треугольника по трем основным элементам, взятым в любом сочетании, в следующем столбце дана формулировка признаков равенства, вытекающих из этих построений, и в последнем столбце — соответствующие признаки равенства прямоугольных треугольников

Если равенство треугольников рассматривается после изучения параллельных прямых, то есть когда известна сумма углов треугольника, то равенство треугольников по стороне и двум углам (одному — прилежащему к ней, и другому — противолежащему, рис. II) является следствием признака равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам[1]. Но этот признак может быть доказан и независимо, если известно, что внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним. Доказательство дано еще Евклидом[2].

Построение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них (рис. IV), дает определенный треугольник (в частности, и прямоугольный), из чего и вытекает формулировка соответствующего признака равенства треугольников (обычно называемого «четвертым»). Если же треугольник строится по двум сторонам и углу против меньшей из них (рис. V), то могут быть разные случаи[3], так что для формулировки признака нужна еще оговорка о виде углов, лежащих против равных сторон. В учебнике Н. А. Глаголева дана общая формулировка признака, объединяющего оба случая. Эта формулировка трудна для учащихся так же, как и приведенное в учебнике доказательство[4].

Рисунок VII показывает, что три угла не определяют треугольника. Если известна сумма углов треугольника, то ясно, что имеются только два независимых данных.

В заключение приводим еще доказательство признака равенства треугольников по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, методом приложения.

Если ученики доказывали этим методом признак равенства треугольников по трем сторонам, то это доказательство вполне может быть ими усвоено и углубит понимание применяемого метода.

Приведенный материал может быть использован во внеклассной работе с учащимися. Их заинтересует приведение всех признаков равенства в систему и вывод, что признаки равенства прямоугольных треугольников особого доказательства не требуют.

После доказательства теоремы о сумме углов треугольника можно дополнительно рассмотреть признак равенства треугольников по двум углам и стороне, лежащей против одного из них. Среди задач на построение полезно дать задачу: «построить треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них». Выполняя построение, школьники убедятся в том, что решение единственное, то есть что эти данные определяют треугольник. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету является частным случаем этой задачи.

---

[1] См. [227], § 67.

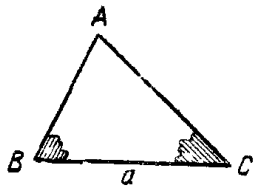
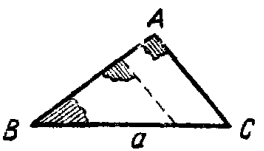
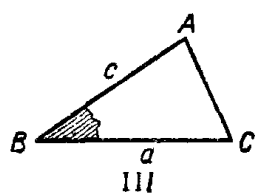
[2] См. [238], предложение 26.

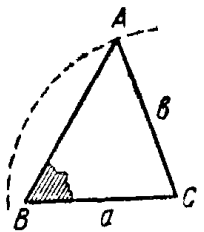
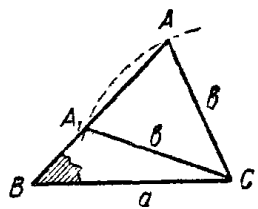
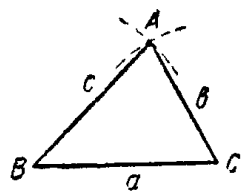
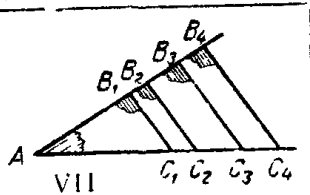
[3] Если b равно расстоянию от точки C до BA (черт. V), то получается прямоугольный треугольник.

[4] См. [227], § 69.

Таблица 1

Признаки равенства треугольников

Построение: данные элементы	Построение: чертеж	Формулировка признаков равенства треугольников		Признаки равенства прямоугольных треугольников	
a $\angle B$ $\angle C$	 I	Если сторона и два угла, прилежащие к ней, одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам, прилежащим к ней, другого треугольника, то эти треугольники равны	Если сторона и два угла в одном треугольнике соответственно равны так же расположенным стороне и двум углам в другом треугольнике, то эти треугольники равны	Если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого треугольника, то эти треугольники равны	Если катет и один острый угол одного треугольника соответственно равны катету и так же расположенному углу другого треугольника...
a $\angle B$ $\angle A$	 II	Если два угла и сторона, лежащая против одного из них, в одном треугольнике соответственно равны двум углам и стороне, лежащей против соответственно равного угла, в другом треугольнике, то эти треугольники равны		Если катет и противолежащий ему угол одного треугольника соответственно равны... Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны...	
a $\angle B$ c	 III	Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то эти треугольники равны		Если два катета одного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то эти треугольники равны	

a b $\angle B$ $b > a$	 IV	Если две стороны и угол, лежащий против большей из них, в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, в другом треугольнике, то эти треугольники равны	Если две стороны и угол, лежащий против одной из них, в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против соответственно равной стороны, в другом треугольнике, причем углы, лежащие против других равных сторон, оба одного вида, то эти треугольники равны	Если катет и гипотенуза одного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого треугольника, то эти треугольники равны
a $\angle B$ b $b < a$	 V	Если две стороны и угол, лежащие против меньшей из них, в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них, в другом треугольнике, причем углы, лежащие против других равных сторон, оба одного вида, то эти треугольники равны		—
a b c	 VI	Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны		—
$\angle A$ $\angle B$ $\angle C$	 VII			—

Теорема. Если две стороны и угол, лежащий против большей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, другого треугольника, то эти треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.
$\angle B = \angle B_1$;
$AC = A_1C_1$;
$AB = A_1B_1$;
$AC > AB$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ к $\triangle ABC$; для этого мы поворачиваем $\triangle A_1B_1C_1$ вокруг стороны A_1C_1 на 180° и совмещаем вершину A_1 с вершиной A, направляя сторону A_1C_1 по стороне AC. Вершина C_1 совмещается с вершиной C, а вершина B_1 располагается по другую сторону прямой AC (по отношению к вершине B.)

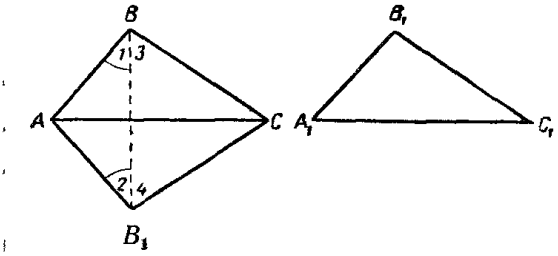


Рис. 154

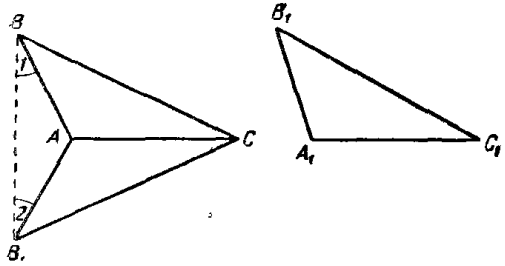


Рис. 155

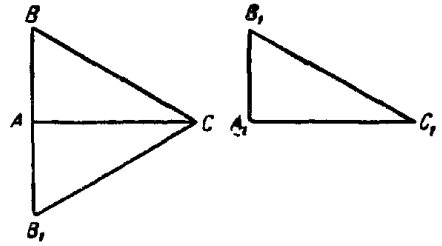


Рис. 156

Рассматриваем углы. $\angle B$ и $\angle B_1$ могут быть любыми, углы C и C_1, наверно, острые, так как лежат против меньших сторон. Так как сумма углов C и C_1 меньше $2d$, то точки B, C и B_1 не лежат на одной прямой; соединяя отрезком прямой точки B и B_1, мы можем иметь один из трех возможных случаев: 1) прямая BB_1 пересекает отрезок AC (рис. 154); 2) прямая BB_1 пересекает продолжение отрезка AC (рис. 155); 3) прямая BB_1 проходит через вершину A (рис. 156).

Докажем теорему для 1-го случая. $\triangle ABB_1$ равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$; тогда и $\angle 3 = \angle 4$ (из равных углов вычитаем поровну). В треугольнике BCB_1 против равных углов лежат и равные стороны, то есть $BC = B_1C_1$. Теорема сводится к одному из доказанных признаков равенства треугольников.

Доказательство теоремы для второго случая аналогично (приходится рассматривать сумму равных углов, а не их разность). В третьем случае мы имеем $\triangle BB_1C$, в котором два угла равны, то есть мы непосредственно усматриваем и равенство сторон BC и B_1C_1.

§ 18. Симметрия

С целью приблизить школьный курс геометрии к современной науке в программе отведено значительное место изучению геометрических преобразований.

Идея *преобразования* имеет большое значение в воспитании материалистического мировоззрения учащихся. Она прививает ученикам взгляд на геометрию как на предмет, изучающий пространственные формы в их движении, изменении и преобразовании одной в другую. Изучение геометрических преобразований благоприятно влияет на развитие пространственного воображения школьников и содействует более глубокому усвоению свойств геометрических фигур. Геометрические преобразования дают новый метод доказательства теорем и решения многих задач на построение. Знакомство с основными геометрическими преобразованиями имеет и практическое значение. Так, например, осевая симметрия используется на практике при раскрое тканей, принцип осевой симметрии положен в основу схемы устройства домкрата, изображенного на рисунке 157 (при уменьшении длины CD точка B поднимается вверх, при этом стержень AB всегда сохраняет вертикальное положение, так как точки A и B остаются симметричными относительно горизонтальной прямой).

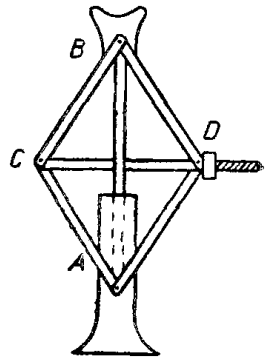


Рис. 157

В восьмилетней школе ученики знакомятся с двумя видами геометрических преобразований: с осевой и центральной симметрией. Изучение этого материала должно подготовить учащихся к применению его на практике и к более глубокому усвоению в средней школе.

Согласно указаниям к программе в восьмилетней школе ученики должны не только получить понятие об осевой симметрии, но и научиться пользоваться им при доказательстве ряда предложений.

Понятие центральной симметрии по сравнению с осевой симметрией труднее усваивается и меньше применяется в последующем материале. Однако в дальнейших темах курса геометрии следует применять центральную симметрию при доказательстве теорем и решении задач во всех случаях, где это возможно и целесообразно.

Симметрия относительно прямой.

Симметрия относительно прямой изучается в теме «Треугольник» VI класса. Введению этого понятия предшествует рассмотрение следующих вопросов темы: 1) понятие о многоугольнике и треугольнике; 2) классификация треугольников; 3) линии в

треугольнике. Рассматривается и зависимость между сторонами треугольника.

Раздел «Осевая симметрия» содержит следующий материал: определение симметричных фигур, свойства симметричных фигур, фигуры, имеющие оси симметрии.

Изучение осевой симметрии в ряде учебников начинается с определения симметричных точек (учебники А. П. Киселева, Н. А. Глаголева). Затем дается определение двух фигур, симметрично расположенных относительно оси, как фигур, состоящих из точек, соответственно симметричных относительно этой оси.

Встречаются различные определения точек, симметричных относительно оси. А. П. Киселев определяет точки, симметричные относительно прямой, как две точки, расположенные по разные стороны от этой прямой, на одном и том же перпендикуляре к ней и на равном расстоянии от основания перпендикуляра. Н. А. Глаголев называет две точки симметричными относительно прямой, если они совмещаются при перегибании плоскости чертежа по этой прямой до совпадения одной части плоскости с другой. Второе определение нагляднее: в нем отчетливее выступает идея преобразования, поэтому его следует предпочесть первому.

Если дано первое определение симметричных точек, то устанавливается, что при повороте одной полуплоскости вокруг оси симметрии до совпадения ее с другой эти точки совмещаются [1].

Если дано второе определение, то из него выводится расположение симметричных точек относительно оси [2].

Изучение осевой симметрии можно начать и с определения понятия двух фигур, симметрично расположенных относительно оси [3]. *В таком случае две фигуры, симметрично расположенные* относительно оси, определяются как фигуры, совмещающиеся при перегибании плоскости чертежа по данной прямой до совпадения одной части плоскости с другой. Понятие симметричных относительно прямой точек является следствием определения симметричных фигур, так как точка тоже фигура.

Последний вариант построения определения мы считаем более удачным. Он более соответствует требованиям дидактики: каждому ученику с раннего детства знакомы конкретные образы двух предметов, симметрично расположенных относительно оси; на их основе и создаются представления о соответственно расположенных геометрических фигурах. Хотя точка тоже фигура, понятие математической точки более отвлеченно и воспринимается учащимися с трудом.

---

[1] См. [248], § 37.
[2] См. [227], § 43.
[3] См. [258], § 17.

Преимущество последнего варианта определения в том, что изучение осевой симметрии можно начать с наблюдения конкретного физического движения, легко осуществляемого на моделях. При этом наглядно воспринимается связь между осевой симметрией и одним из важнейших понятий геометрии — понятием равенства фигур: могут быть совмещены наложением как две фигуры, симметричные относительно оси, так и любые две равные фигуры. Понимание этой связи поможет учащимся усвоить применяемый в дальнейшем общий метод доказательства равенства двух фигур.

Использование предлагаемого варианта построения определения только первый этап в работе над формированием понятия осевой симметрии. По мере усвоения свойств симметричных точек ученики все больше опираются на эти свойства при доказательствах и все меньше обращаются к непосредственному перегибанию. Таким образом, постепенно в их сознании создается понятие об осевой симметрии как о точечном преобразовании.

В том случае, когда понятие точек, симметричных относительно оси, предшествует понятию симметричных фигур, изучение осевой симметрии начинают с демонстрации учащимся различных пар фигур, симметрично расположенных относительно оси (рисунки орнаментов, чертежи геометрических фигур, изображения некоторых цветов, листьев растений, крыльев бабочек и др.). Ученики воспринимают какую-то правильность в расположении соответственных точек этих фигур и легко замечают всякое отступление от нее. После наблюдения достаточного числа примеров симметричных и несимметричных точек равных фигур ставится вопрос об определении понятия симметрично расположенных относительно оси точек, а затем и любых фигур.

Если изучение осевой симметрии начинается с определения понятия симметрично расположенных относительно оси фигур, то следует вначале предложить ученикам проследить различные движения, с помощью которых можно совместить две равные фигуры на плоскости. Сопоставляя эти движения, ученики уясняют особенности изучаемого преобразования. При этом полезно применить наглядные пособия. Нужно показать плакат с изображенными на нем парами равных фигур (рис. 158). Следует обратить внимание шестиклассников на то, что две фигуры могут находиться на плоскости в разных положениях, и предложить им указать, как проще всего передвинуть одну из них, чтобы она совместилась с другой. Вначале даются изображения предметов окружающей действительности (рис. 158), а затем изображения геометрических фигур (рис. 159). Школьникам предлагается набор моделей фигур, равных изображенным на плакате. Лицевая и оборотная стороны модели окрашены в разные цвета. Модель прикладывается к одной из двух данных фигур и перемещается до совпадения с другой. Ученики без труда

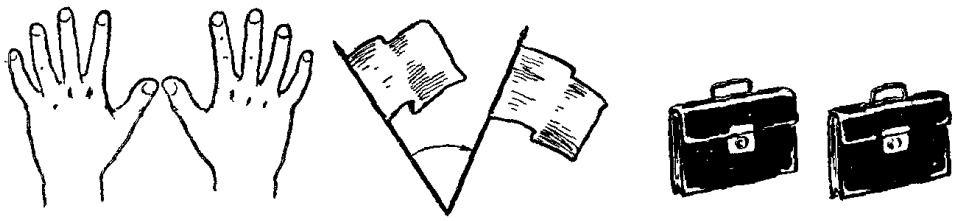


Рис. 158

находят перенос и поворот, которые должны быть выполнены в первых двух случаях. В третьем случае они часто предлагают перевернуть фигуру обратной стороной и произвольно передвинуть ее на плоскости до совмещения со второй фигурой. Учитель укажет более простую операцию: перегибание по некоторой прямой плоскости чертежа до совмещения одной части плоскости с другой. Это преобразование иллюстрируется на плакате, перегибаю-

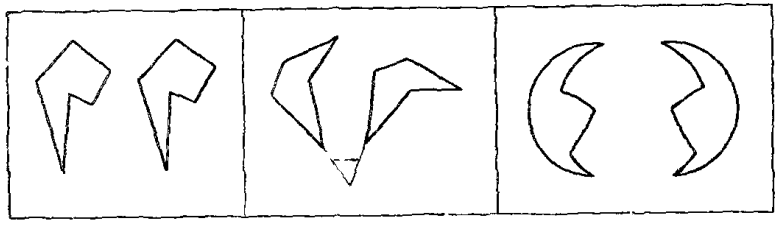


Рис. 159

щемся по оси симметрии. Одна из двух симметричных частей плаката сделана из прозрачного материала (рис. 160), что позволяет наблюдать совпадение соответствующих элементов обеих фигур.

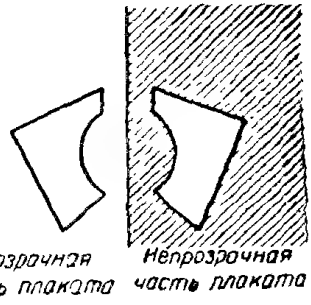


Рис. 160

После рассмотрения ряда примеров дается определение двух фигур, симметрично расположенных относительно оси. С помощью плакатов, подобных приведенным на рисунке 160, следует проделать упражнения на закрепление определения. На плакатах изображены пары равных фигур как симметрично, так и несимметрично расположенных относительно оси. Учащимся предлагается выяснить в каждом случае расположение данных фигур относительно оси. Ученики отвечают на основе своих зрительных представлений, и затем их ответы проверяются перегибанием чертежа по оси. Полезно предложить привести из окружающей природы примеры фигур, симметрично расположенных

относительно оси[1]. Можно показать простой способ получения симметричных фигур: изобразить фигуру чернилами и перегнуть лист с чертежом до совпадения одной его части с другой. На второй половине листа отпечатается фигура, симметричная данной. Следует заметить, что способ получения одной из двух симметричных фигур с помощью другой используется в практике.

Затем рассматриваются точки, симметричные относительно оси: изобразив на бумаге прямую и точку, перегибаем лист с чертежом по этой прямой до совпадения обеих частей листа. На другой части листа получим точку, симметричную данной относительно оси.

Рассмотрев ряд примеров пар симметричных точек устанавливаем следующие их свойства: 1) каждой точке соответствует единственная точка, ей симметричная относительно данной оси; 2) если точка лежит на оси симметрии, то она симметрична сама себе относительно этой оси; 3) если две различные точки симметричны относительно оси, то они лежат по разные стороны от оси, на одном и том же перпендикуляре к оси и на равном расстоянии от основания перпендикуляра; 4) если точка лежит на оси симметрии двух данных точек, то она одинаково удалена от этих точек; 5) две различные точки имеют только одну ось симметрии.

Рассмотрев третье свойство симметричных точек, следует доказать теоремы: а) стороны угла симметричны относительно его биссектрисы; б) если две точки лежат на сторонах угла и одинаково удалены от его вершины, то они симметричны относительно биссектрисы этого угла. Из второй теоремы вытекает следствие: если две точки лежат по разные стороны от прямой на одном и том же перпендикуляре к ней и на равном расстоянии от основания перпендикуляра, то они симметричны относительно этой прямой. Это предложение необходимо для обоснования построения точек, симметричных относительно оси. Полезно указать, что два последние предложения являются признаками точек, симметричных относительно оси.

Если единственность перпендикуляра, проведенного к прямой из точки вне данной прямой, не была доказана в теме «Основные понятия», то первое свойство симметричных точек принимается без доказательства, а единственность перпендикуляра может быть обоснована с помощью этого свойства и второго из указанных только что признаков симметричных точек. Приведем это обоснование: если бы из точки A (рис. 161) к прямой BC можно было провести два перпендикуляра, то на каждом из них можно было бы построить точку, симметричную точке A относи-

[1] Здесь и в дальнейшем могут быть использованы кадры из диафильма «Осевая симметрия в природе и технике» Г. Воробьева.

тельно прямой BC. Назовем эти точки D и D'. Таким образом, точке A соответствуют две точки D и D', симметричные относительно оси BC, чего не может быть, согласно первому свойству симметричных точек, следовательно, из точки A и прямой BC можно провести только один перпендикуляр.

Затем доказывается, что если концы двух отрезков соответственно симметричны относительно некоторой прямой, то и данные отрезки симметричны относительно этой прямой. Пользуясь приведенным утверждением, можно обосновать симметричное расположение относительно данной прямой двух многоугольни-

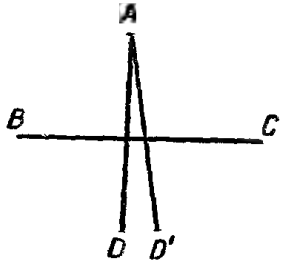


Рис. 161

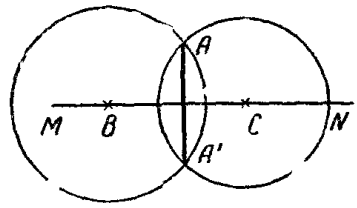


Рис. 162

ков, у которых вершины соответственно симметричны относительно этой прямой.

Только после перечисленных предложений доказываются свойства 4 и 5 симметричных точек. За свойством 4 следует предложение, ему обратное.

Изученные предложения целесообразно применить затем при обосновании решения некоторых так называемых основных задач на построение циркулем и линейкой. Разбор этих задач в данном месте курса поможет усвоению учащимися определения и свойств симметричных фигур.

Приведем, например, решение и обоснование задачи на построение перпендикуляра к прямой MN из точки A вне ее (рис. 162).

Построение. Берем на прямой MN произвольные точки B и C и проводим из них, как из центров, окружности радиусов BA и CA. Построенные окружности, кроме точки A, имеют еще одну общую точку A'. Соединим точки A и A'. Прямая AA' перпендикулярна к прямой MN.

Доказательство. Точка B равноудалена от точек A и A', следовательно, она лежит на оси симметрии точек A и A'. То же можно утверждать относительно точки C. Так как две различные точки A и A' имеют только одну ось симметрии, то этой осью является прямая, проходящая через точки B и C, то есть прямая MN; следовательно, прямая MN перпендикулярна к прямой AA', или прямая AA' перпендикулярна к прямой MN.

Для применения осевой симметрии в дальнейших темах курса восьмилетней школы потребуется доказать и следующие предложения:

1) *две прямые симметричны относительно оси, если две точки одной прямой соответственно симметричны относительно этой оси двум точкам другой прямой;*

2) *если две прямые пересекаются, то их ось симметрии проходит через точку их пересечения;*

3) *если две прямые пересекаются в некоторой точке A, то симметричные им относительно некоторой оси прямые пересекаются в точке A_1, симметричной точке A относительно той же оси;*

4) *если дан отрезок AB, соединяющий две точки A и B, симметричные относительно оси, и из этих точек по одну сторону от прямой AB проведены два луча под равными углами к отрезку AB, то эти лучи симметричны относительно той же оси;*

5) *если две прямые симметричны относительно некоторой оси, то перпендикуляры к ним, проведенные из одной и той же точки оси, симметричны относительно этой оси.*

Эти предложения могут быть доказаны или сразу после приведенного выше материала или непосредственно перед теми теоремами, при доказательстве которых они используются.

Затем учащиеся знакомятся с фигурами, имеющими оси симметрии. Следует рассмотреть не только фигуры, имеющие одну ось симметрии, но и фигуры, имеющие несколько осей симметрии. Отмечается, что у окружности бесконечное множество осей симметрии. Примеры фигур, имеющих оси симметрии, приводятся из окружающей природы, а также используются чертежи и модели фигур, перегибающиеся по их осям симметрии.

Доказательство большинства указанных нами предложений дается в учебнике Н. А. Глаголева [1] и в статьях А. И. Фетисова [2].

Предложения о симметричных фигурах могут сообщаться в виде задач на доказательство. Формулировка и доказательство каждого предложения должны быть подготовлены системой соответственно подобранных упражнений. Приведем, например, упражнения, подготавливающие учеников к формулировке и доказательству свойства, утверждающего, что точка пересечения двух прямых, соответственно симметричных относительно оси двум другим пересекающимся прямым, симметрична точке пересечения второй пары прямых.

1. Построить прямую, симметричную прямой a относительно данной оси.

2. На какой линии расположены точки, симметричные точкам прямой a относительно данной оси?

3. Даны две пересекающиеся в точке A прямые a и b и пря-

---

[1] См. [227]

[2] См. [266], геометрия и см. «Математика в школе», 1940, № 4.

мая c (рис. 163, $а$). На какой линии расположены точки, симметричные относительно прямой c: а) точкам прямой a, б) точкам прямой b? На каких линиях расположена точка, симметричная точке A относительно оси c?

Доказательство первых свойств симметричных фигур проводится главным образом путем мысленного перегибания плоскости чертежа по оси симметрии. Фактическое перегибание чертежа, иллюстрирующее определение симметричных фигур, не помогает осмыслить последовательно этапы доказательства. Как уже указывалось в § 17, в подобных случаях учащиеся наблюдают совпадение сразу всех элементов совмещаемых фигур, в то время как при доказательстве приходится обосновывать последовательное совмещение каждой пары соответственных элементов Чтобы помочь восприятию доказательства посредством мысленного перегибания чертежа, полезно первые доказательства сопровождать показом на заданном чертеже положения элементов фигуры, преобразованной симметрично относительно данной оси. С этой целью следует использовать цветные мелки и карандаши. Так, например, при доказательстве только что рассмотренного свойства данные прямые a и b (рис. 163) изображаются одним цветом (на рис. 163 — сплошными линиями), а симметричные им относительно прямой c прямые a' и b' — другим цветом (на рис. 163 — штриховыми линиями). Новое же положение прямых a и b, полученных после симметричного преобразования, изображается тем же цветом, что и прямые a и b. Симметричное преобразование получается постепенно в процессе рассуждений, которые проводятся так: перегнем чертеж (рис. 163) по прямой до совпадения части плоскости, содержащей точку A, с другой частью плоскости. Так как прямые a и a' симметричны относительно прямой c, то прямая a совпадает с прямой a' (новое положение прямой a изображается тем же цветом, что и прямая a). Так как прямые b и b' также симметричны относительно прямой c, то прямая b совпадает с прямой b' (новое положение прямой b изображается тем же цветом, что и прямая b). Так как прямые a' и b' (или совпавшие с ними прямые a и b) пересекаются только в одной точке, то точка A совпадет с точкой A'.

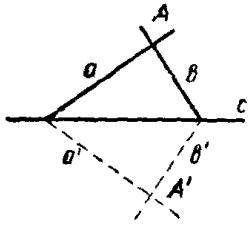


Рис. 163

В процессе доказательства, иллюстрированного подобным образом, ученики лучше представляют себе и легче обосновывают совмещение соответственных элементов двух данных фигур, чем при проведении доказательства по заданному чертежу.

Доказательство предложений о симметричных фигурах не заучивается, а формулировка должна усваиваться постепенно в

процессе применения. В дальнейшем при доказательстве теорем учащиеся пользуются теми из рассмотренных предложений о симметричных фигурах, которые помнят, в основном же доказательство проводится путем мысленного перегибания чертежа по оси симметрии. Постепенно в процессе многократного повторения запоминается все больше предложений и учащиеся все больше ссылаются на них при доказательстве. Тогда уже можно потребовать проведения доказательства только с помощью предложений о симметричных фигурах. Приведем пример доказательства, выполненного этим способом.

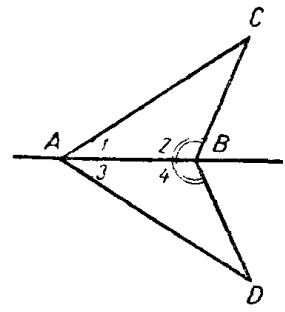


Рис. 164

Дано: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (рис. 164). Симметрично ли расположены треугольники ABC и ABD относительно прямой AB?

Решение. Так как $\angle 1 = \angle 3$, то AB — биссектриса угла CAD, следовательно, лучи AC и AD симметричны относительно оси AB. Так как $\angle 2 = \angle 4$, то лучи BC и BD тоже симметричны относительно прямой AB. Так как C и D — точки пересечения лучей, соответственно симметричных относительно прямой AB, то они симметричны относительно этой прямой. Таким образом, вершины треугольников ABC и ABD соответственно симметричны относительно данной прямой, следовательно, и данные треугольники симметричны относительно той же прямой.

При изучении осевой симметрии ученики должны хорошо усвоить то, что две фигуры, симметрично расположенные относительно оси, равны. Вместе с тем следует показать на примере двух равных фигур, произвольно расположенных на плоскости, что две равные фигуры, вообще говоря, не симметричны. Полезно также заметить, что ось симметрии делит фигуру на равные части, но не всякая прямая, делящая фигуру на равные части, является ее осью симметрии. Последнее можно иллюстрировать на модели параллелограмма, перегибающейся по его средней линии и по диагонали.

Следует обратить внимание учащихся и на то, что две фигуры, симметричные относительно оси, вообще говоря, не могут быть совмещены никаким движением их в плоскости, в которой они лежат, в то время как многие из двух равных фигур совмещаются движением в данной плоскости. Для закрепления изученного нужно после каждого предложения о симметричных фигурах решить несколько несложных задач на доказательство.

Приведем пример задачи, которая может быть дана после предложения о симметрии точек, лежащих на сторонах угла и одинаково удаленных от его вершины (см. стр. 637).

Точки A, B, C, D, E и K (рис. 165) удалены от точки O на расстояния $OA = 8$, $OB = 7$, $OC = 8$, $OD = 5$, $OE = 7$, $OK = 5$. Расстояние между точками E и F равно 1.

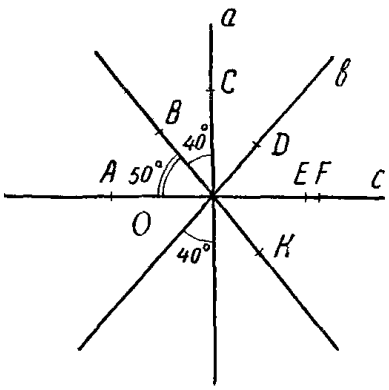


Рис. 165

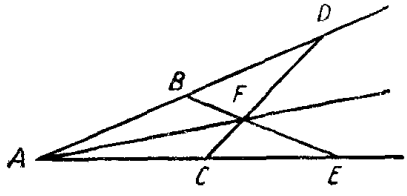


Рис. 166

Есть ли среди этих точек точки, симметричные относительно прямых a, b и c?

После того как учащиеся хорошо усвоят свойства симметричных фигур, можно перейти к решению более сложных задач на доказательство. Примером такой задачи может служить следующая.

«Чтобы построить биссектрису данного угла, имея только масштабную линейку, поступают так: на сторонах угла A отмечают отрезки $AB=AC$ (рис. 166) и от их концов B и C откладывают на сторонах угла отрезки $BD=CE$ и находят точку F пересечения прямых BE и CD. Прямая AF — искомая биссектриса. Обосновать правильность решения».

Обоснование решения. Прямые BE и CD симметричны относительно биссектрисы угла A, так как точки B и D соответственно симметричны точкам C и E относительно этой биссектрисы, а их общая точка F лежит на оси симметрии на основании предложения 2, стр. 639, следовательно, AF — искомая биссектриса.

Полезно предложить учащимся решить ту же задачу, не пользуясь осевой симметрией, а при помощи признаков равенства треугольника. Это покажет, насколько доказательство первым способом короче и проще.

Решение более сложных задач следует подготавливать вспомогательными упражнениями. Приведем, например, вопросы и упражнения, подготовительные к только что рассмотренной задаче.

1. Дан угол. Является ли биссектриса данного угла его осью симметрии?

2. Дан угол A и на его сторонах отложены отрезки $AB=AC$. Симметричны ли точки B и C относительно биссектрисы угла A?

3. На сторонах угла A отложены отрезки $AB=AC$ и от их концов — отрезки $BD=CE$. Доказать, что биссектриса угла A является осью симметрии: а) точек D и E, б) пересекающихся прямых BE и CD.

Полезно решать с учащимися конструктивные задачи по разделу «Осевая симметрия», используя не только циркуль и линейку, но и другие инструменты (угольник, масштабную линейку, малку, транспортир). Следует предложить упражнения на

построение точки, отрезка, прямолинейной фигуры, окружности, луча, расположенных симметрично относительно данной оси заданным фигурам.

При этом надо задавать фигуры, различно расположенные на чертеже относительно оси. Можно также предложить построить оси симметрии: двух точек, отрезка, прямой, окружности, двух пересекающихся прямых.

В дальнейшем могут быть даны и более сложные задачи на построение, в которых используется симметричное преобразование. Примером такой задачи служит задача № 139 из задачника Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой.

Целесообразно некоторым задачам на построение и доказательство придать практическое содержание. Так, например, задача № 139 может быть сформулирована так.

«На берегу канала требуется построить водонапорную башню для снабжения водой двух селений A и B. Выбрать место для строительства башни с таким расчетом, чтобы общая длина труб от водонапорной башни до обоих селений была наименьшей».

Следует поставить задачи, подготавливающие учеников к выполнению измерений на местности. Так, например, приведенная ниже задача подготавливает к выполнению работы № 4 из учебника Н Н. Никитина (стр. 89).

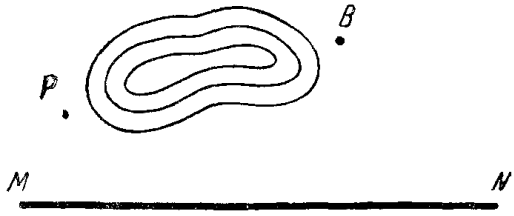


Рис 167

«Между пунктами P и B (рис. 167), расположенными по одну сторону от дороги MN, находится непроходимое болото. По другую сторону дороги расположен луг, на котором можно выполнить любые измерения. Как удобно измерить расстояние PB?»

Применение осевой симметрии в последующих темах курса геометрии

Понятие и свойства осевой симметрии могут быть положены в основу дальнейшего изучения темы «Треугольник».

Последующий материал темы содержит такие вопросы: свойство равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников, зависимость между сторонами и углами треугольника, сравнительная длина наклонных и перпендикуляра, проведенных из одной точки.

Покажем, как можно использовать осевую симметрию при изучении этого материала.

Доказательство теоремы о свойстве равнобедренного треугольника является конкретным приложением понятия о фигуре, имеющей оси симметрии, и о свойствах симметричных фигур. В результате доказательства можно сделать вывод, что если в треугольнике равны только две стороны, то он имеет единственную ось симметрии, если же равны все три стороны, то он имеет три оси симметрии.

Осевая симметрия применяется в теме треугольник главным образом при доказательстве тех предложений, в которых требуется установить равенство двух данных фигур. При отыскании доказательств создается единый план рассуждений: надо доказать, что две фигуры равны, то есть что их можно совместить наложением. Для этого достаточно так расположить данные фигуры или так провести некоторую прямую между ними, чтобы они оказались симметричными относительно прямой.

Именно этим методом могут быть доказаны три признака равенства треугольников, указанные в программе [1]. Учитель должен продумать, какими предложениями приходится пользоваться при доказательстве каждой теоремы, и позаботиться о том, чтобы учащиеся их хорошо усвоили.

Чтобы повторить те предложения о симметричных фигурах, которые потребуются при доказательстве, а также чтобы помочь учащимся найти необходимое для доказательства расположение фигур или правильно выбрать их ось симметрии, полезно перед каждой теоремой дать подготовительные упражнения. Приведем доказательство признака равенства двух треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам, а затем подготовительные упражнения, которые могут быть даны перед доказательством этой теоремы.

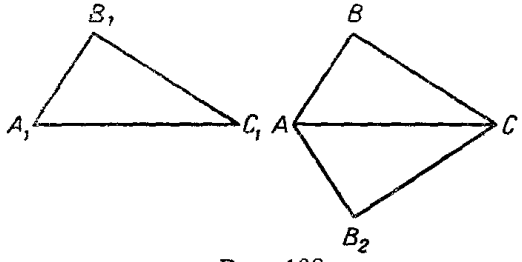


Рис. 168

Дано (рис. 168):

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$;

$AC = A_1C_1$;

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$;

$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а сторона A_1C_1 пошла по стороне AC; тогда вершина C_1 совместится с вершиной C, так как $AC = A_1C_1$. Треугольник $A_1B_1C_1$ зай-

[1] См. доказательство в кн. [227], § 66—68.

мет положение треугольника AB_2C, причем $\angle B_2AC = \angle BAC$ и $\angle ACB_2 = \angle ACB$. Так как $\angle B_2AC = \angle BAC$, то прямые AB_2 и AB симметричны относительно оси AC; также из равенства углов ACB_2 и ACB следует, что прямые CB_2 и CB симметричны относительно той же оси AC. Следовательно, точки пересечения прямых AB и CB и AB_2 и CB_2 тоже симметричны относительно той же оси, то есть точка B_2 симметрична точке B относительно AC. Значит, треугольники ABC и AB_2C симметричны относительно оси AC, поэтому они равны, а значит, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Упражнения, подготавливающие доказательство рассмотренной теоремы, могут быть следующие.

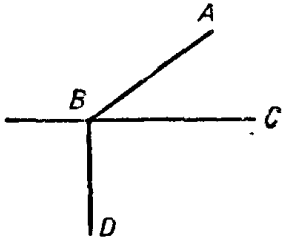


Рис 169

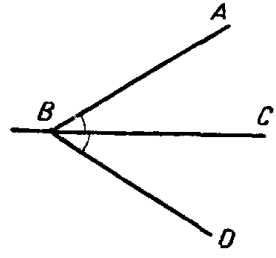


Рис. 170

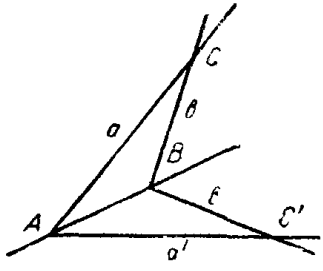


Рис. 171

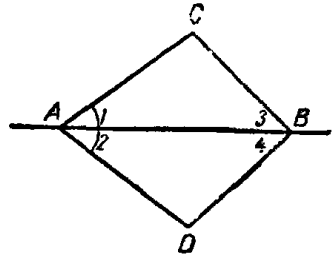


Рис. 172

1. Дано: $\angle ABC < \angle CBD$ (рис. 169). Является ли прямая BC осью симметрии лучей BA и BD?

2. Дано: $\angle ABC = \angle CBD$ (рис. 170). Является ли прямая BC осью симметрии лучей BA и BD?

3. Прямые a и a', b и b' (рис. 171) соответственно симметричны относительно прямой AB. Какая точка симметрична точке пересечения прямых a и b (точке C) относительно прямой AB?

4. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 172). Симметричны ли треугольники ABC и ABD относительно прямой AB? Как ответить на тот же вопрос, если добавлено условие, что $\angle 3 = \angle 4$? (Доказательство аналогично приведенному на стр. 641.)

Признак равенства треугольников по трем сторонам тоже доказывается прикладыванием одного из двух данных треугольников к другому. Доказательство его основывается на следующих утверждениях: осью симметрии точек B и B_2 (рис. 168) является, с одной стороны, биссектриса угла A, так как эти точки равноудалены от вершины угла A, с другой стороны, биссектриса угла C, так как эти же точки равноудалены от вершины угла C. Но две различные точки имеют единственную ось симметрии, следовательно. этой осью симметрии может быть только прямая AC.

С помощью осевой симметрии могут быть доказаны и признаки равенства прямоугольных треугольников. Приведем, например, до-

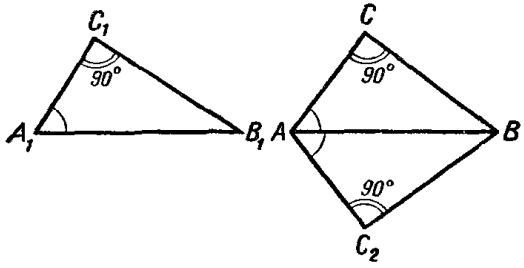


Рис. 173

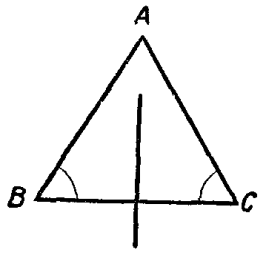


Рис. 174

казательство признака равенства двух треугольников по гипотенузе и острому углу.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 173); $AB=A_1B_1$; $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1=90°$; $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$.

Доказать: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а гипотенуза A_1B_1 пошла по гипотенузе AB, тогда вершина B_1 совместится с вершиной B, так как $AB=A_1B_1$. Треугольник $A_1B_1C_1$ займет положение ABC_2, причем $\angle AC_2B=\angle ACB=90°$ и $\angle C_2AB=\angle CAB$. Так как $\angle C_2AB=\angle CAB$, то прямые AC и AC_2 симметричны относительно оси AB, следовательно, и перпендикуляры, опущенные на них из точки B, тоже симметричны относительно той же прямой. Значит, треугольник ABC можно совместить с треугольником ABC_2, а значит, и с треугольником $A_1B_1C_1$. Таким образом, доказано, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны[1].

Покажем, как могут быть доказаны теоремы о зависимости между сторонами и углами треугольника. Первая теорема, утверждающая, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, доказывается при изучении свойств равнобедренного треугольника. Вторая, обратная ей, теорема доказывается так:

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B=\angle C$ (рис. 174).

[1] Доказательство дано в статье А. И. Фетисова, см [266].

Доказать: $AB=AC$.

Доказательство. Проведем ось симметрии точек B и C. Тогда получим два луча BA и CA, симметричных относительно этой оси (пользуемся п. 4 на стр. 639). Так как эти лучи пересекаются, то точка их пересечения A лежит на оси симметрии (п. 2 на стр. 639), откуда $AB=AC$[1].

Доказательство теоремы, устанавливающей, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и теоремы, ей обратной, можно провести независимо от теоремы о свойстве внешнего угла треугольника, если предварительно рассмотреть следующие два вспомогательных предложения: 1) если точка K (рис. 175) не лежит на оси симметрии MN двух данных точек A и B, то она неодинаково удалена от этих точек, причем она ближе к той из них, с которой находится по одну сторону от оси; 2) если точка K (рис. 175) неодинаково удалена от двух данных точек A и B, симметричных относительно оси MN, то она не лежит на их оси симметрии и расположена по ту сторону от оси, что и более близкая к ней из данных симметричных точек. Первое из этих предложений доказано в статье А. И. Фетисова[2]. Рассмотрим доказательство второго предложения. Если сделать чертеж, на котором изображены 3 точки A, B и K, причем $AK>BK$ (рис. 175), то очевидно, что ось симметрии точек A и B пересечет отрезок AK, то есть точка K окажется по одну сторону от оси симметрии с точкой B. Это наблюдение легко проверить на опыте, перегнув сделанный на прозрачной бумаге чертеж по оси симметрии точек A и B. Следует теперь выяснить путем рассуждения, почему не может быть другого расположения точки K. Не делая другого чертежа, мы устанавливаем путем рассуждений (методом «от противного»), что ось симметрии не может пройти через точку K, так как тогда $KA=KB$, что противоречит условию; не может ось симметрии MN пройти и между точками K и B, то есть пересечь отрезок KB, так как в этом случае точки A и K лежали бы по одну сторону от оси и отрезок AK был бы меньше KB, что тоже противоречит условию. Остается одна возможность, что ось симметрии MN пересечет отрезок AK, то есть точки K и B будут находиться по одну сторону от нее[3].

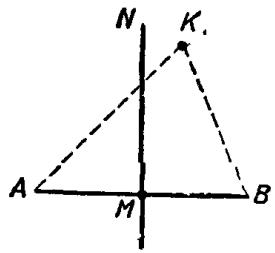


Рис. 175

Пользуясь вторым из рассмотренных только что предложений, уже нетрудно доказать теорему о том, что в треугольнике против

---

[1] См. [266].

[2] См [266], ст. А. И Фетисова.

[3] Вывод остается справедливым и для случая, когда точка K лежит на прямой AB. О доказательстве методом «от противного» см § 7.

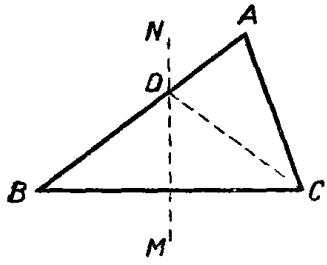


Рис. 176

большей стороны лежит больший угол. Приведем это доказательство (рис. 176).

Дано: $\triangle ABC$; $AB > AC$.

Доказать: $\angle C > \angle B$.

Доказательство: 1) Проведем ось симметрии MN точек B и C; она пересечет сторону AB в некоторой точке D (так как $AB > AC$, то точки A и C должны лежать по одну сторону от оси MN).

2) Точка D лежит внутри угла BCA, следовательно, отрезок CD пройдет внутри угла ACB и $\angle ACB > \angle DCB$.

3) Точка D лежит на оси симметрии точек B и C, следовательно, $DB = DC$, откуда $\angle ABC = \angle DCB$; следовательно, $\angle ACB > \angle ABC$, или $\angle C > \angle B$.

Если предварительно не рассматривать второго вспомогательного предложения, то доказательство теоремы станет громоздким, так как для обоснования того, что точка D лежит на стороне AB, придется провести те же рассуждения.

Теорема о том, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, легко доказывается с помощью первого вспомогательного предложения или методом «от противного».

Приведенные нами доказательства теорем о зависимости между сторонами и углами треугольника, очевидно, могут быть рассмотрены и сразу после свойства биссектрисы угла равнобедренного треугольника, то есть перед признаками равенства треугольников.

При доказательстве теорем о свойстве перпендикуляра и наклонных, проведенных из некоторой точки к прямой, выполняется симметричное преобразование данных фигур относительно построенного перпендикуляра или оси проекций. Если давать доказательство теоремы о сравнительной длине наклонных, проведенных из некоторой точки к прямой и имеющих неравные проекции, то предварительно следует доказать предложение: ломаная, состоящая из двух отрезков, короче объемлющей ломаной, состоящей также из двух отрезков. Приведем доказательство.

Дано: ломаная ACB (рис. 177) и объемлющая ломаная ADB.

Продолжим отрезок AC до пересечения с отрезком DB в точке E, тогда из $\triangle ADE$ имеем $AC + CE < AD + DE$,

из $\triangle BCE$ имеем $CB < BE + EC$.

Сложив почленно оба неравенства, получим:

$$AC + \underline{CE} + CB < AD + DE + BE + \underline{CE}.$$

Вычтя из обеих частей последнего неравенства поровну (отрезок CE), получим

$$AC + CB < AD + DE + BE,$$

то есть $AC + CB < AD + DB$.

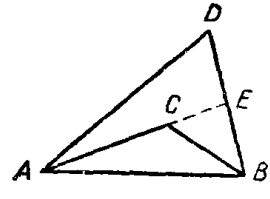


Рис. 177

Как уже указывалось в § 17[1], доказательства, аналогичные приведенному, основываются не на свойствах неравенств, а на следующих фактах, известных из арифметики: а) сумма двух меньших чисел меньше суммы двух бо́льших, б) если из меньшего и большего чисел вычесть поровну, то первая разность меньше второй.

Свойства биссектрисы угла и перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину, как геометрических мест точек, могут быть тоже легко обоснованы при помощи осевой симметрии.

В теме «Параллельность» понятие осевой симметрии применяется к новым образам — к параллельным прямым. Следует обратить внимание учащихся на то, что две параллельные прямые симметричны относительно прямой, им параллельной, проходящей через середину отрезка, перпендикулярного к этим прямым и расположенного своими концами на данных прямых. Две параллельные прямые симмегричны также относительно любой прямой, им перпендикулярной. Можно использовать понятие осевой симметрии и при доказательстве отдельных теорем этой темы. Приведем, например, доказательство теоремы существования параллельных прямых с помощью осевой симметрии, практикуемое в польской школе[2].

Дано. AB и CD — два перпендикуляра к прямой MN (рис. 178).

Доказать: $AB \| CD$.

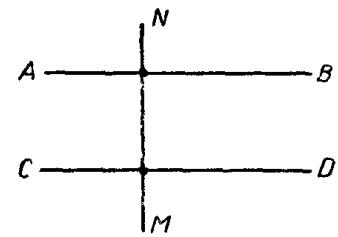


Рис. 178

Доказательство. Луч NA симметричен лучу NB, а луч MC — лучу MD относительно прямой MN. Допустим, что лучи NB и MD пересекаются в точке справа от прямой, тогда в силу симметрии лучи NA и MC пересекаются в точке слева от прямой MN, следовательно, две различные прямые AB и CD имеют две общие точки, что невозможно, значит, эти прямые параллельны.

В теме «Четырехугольники» осевая симметрия используется при изучении свойств четырехугольников разного вида. Надо, например, доказать, что некоторые четырехугольники (равнобедренная трапеция, отдельные виды параллелограммов и др.) имеют оси симметрии.

Осевая симметрия обычно устанавливается путем наблюдения свойств фигур по чертежам соответствующих четырехугольников или их моделям, перегибающимся по осям симметрии. Обоснование выводов из наблюдений затем дается как решение задач на доказательство, например:

---

[1] См. § 17, стр. 617.

[2] См. статью Н. З. Гречкина в журнале «Математика в школе», 1960, № 3.

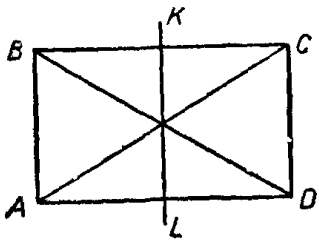


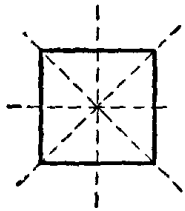
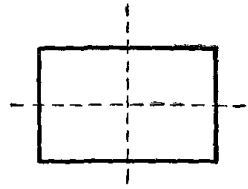
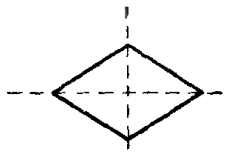
Рис. 179

«Доказать, что средние линии прямоугольника являются его осями симметрии».

Доказательство: Пусть KL (рис. 179) — средняя линия прямоугольника $ABCD$. Четырехугольник $ABKL$ — параллелограмм, так как $AL \# BK$, следовательно, $KL \perp BC$ и $KL \perp AD$. Значит, KL — ось симметрии точек B и C, A и D, а следовательно, и всего прямоугольника.

Сделанные выводы можно оформить в виде таблиц. Приведем в качестве примера таблицу классификации параллелограммов с учетом их осевой симметрии.

Таблица 2

По сторонам / По углам	Смежные стороны равны (ромб)	Смежные стороны не равны
Углы прямые (прямоугольник)	 квадрат — 4 оси симметрии (2 диагонали и 2 средние линии)	 разносторонний прямоугольник — 2 оси симметрии (2 средние линии)
Углы не прямые	 косоугольный ромб — 2 оси симметрии (2 диагонали)	разносторонний косоугольный параллелограмм — Нет осей симметрии

Осевая симметрия некоторых видов параллелограммов может быть использована затем для доказательства других их свойств. Так, например, с помощью приведенного выше предложения о средних линиях прямоугольника легко доказать теорему: *диагонали прямоугольника равны.*

Доказательство. Так как в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 179) точки B и C, A и D симметричны относительно оси KL, то диагонали BD и AC симметричны относительно той же оси, следовательно, они равны.

Можно показать ученикам, что наличие определенных осей симметрии служит признаком некоторых видов четырехугольников. Это иллюстрируется на примерах задач, подобных следующей.

«Доказать, что если диагонали четырехугольника являются его осями симметрии, то такой четырехугольник — ромб».

Осевая симметрия четырехугольников используется и при решении задач на построение. Приведем пример такой задачи.

«На стороне квадрата взята точка N. Построить точки, симметричные точке N относительно осей симметрии квадрата. Сколько таких точек можно построить? Рассмотреть разные случаи».

Осевая симметрия может быть положена в основу доказательств ряда теорем темы «Окружность»[1].

Большой материал на закрепление и применение понятия осевой симметрии дает раздел «Правильные многоугольники», изучаемый в VIII классе.

Центральная симметрия.

Понятие центральной симметрии вводится, согласно программе, в VII классе после изучения свойств и признаков параллелограмма. Затем доказывается, что параллелограмм имеет центр симметрии.

Целесообразнее дать понятие центральной симметрии фигур перед изучением параллелограмма, а все свойства параллелограмма вывести, пользуясь этим понятием. При таком порядке изучения материала понятие центральной симметрии получит непосредственное приложение и все свойства параллелограмма будут доказаны одним методом, в основе которого лежит движение.

Возможен такой путь построения определения фигур, симметричных относительно центра. Сначала дается определение симметричных точек, затем — симметричных фигур. При этом две точки называют симметричными относительно третьей точки O, если эта последняя является серединой отрезка прямой, проходящей через две данные точки. Точка O называется центром симметрии данных точек. Две фигуры называются симметричными относительно центра, если каждой точке одной фигуры соответствует относительно данного центра симметрии точка другой фигуры.

Можно начать с определения фигур, симметричных относительно центра, а затем перейти к определению симметричных точек. При этом дать такие определения: две *фигуры* называются *симметричными* относительно точки O, если при повороте одной из них около этой точки в плоскости чертежа на 180° обе фигуры совместятся всеми своими точками. Точка O называется центром

[1] См. [227], § 131, 144—146.

симметрии двух данных фигур. Две точки называются симметричными относительно центра, если при повороте одной из них около этого центра на 180° они совместятся.

Более целесообразно выбрать второй из указанных путей. Такой выбор диктуется не только соображениями единообразия в построении определений понятий осевой и центральной симметрии, но главным образом тем, что в этих определениях подчеркивается идея движения.

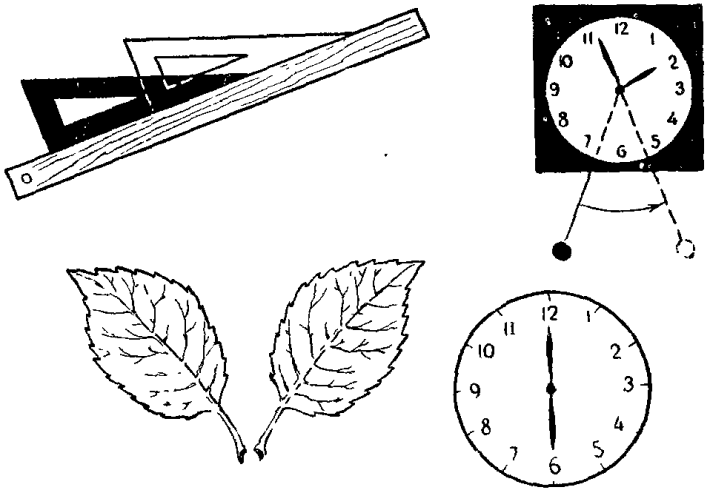


Рис. 180

Ученики меньше знакомы с фигурами, симметричными относительно центра, чем с фигурами, симметричными относительно оси, поэтому особенно важно при введении понятия симметрии относительно центра использовать наглядные пособия. Первые представления о центральной симметрии следует дать в процессе сопоставления с другими движениями. Это поможет учащимся лучше усвоить особенности данного движения.

Для введения понятия фигур, симметрично расположенных относительно центра, могут быть использованы плакаты (рис. 180), аналогичные плакату, изображенному на рисунке 158. Перенос и осевая симметрия иллюстрируются на этих плакатах так же, как и на приведенных выше плакатах (рис. 158, 159). Поворот на некоторый угол и центральная симметрия иллюстрируются с помощью такого пособия: фигура наложена на равную ей фигуру, изображенную на листе картона, и свободно закреплена в центре вращения.

Следует обратить внимание учеников на то, что точка, являющаяся центром симметрии фигур, может быть взята как на фигуре, так и вне ее. Это также иллюстрируется на соответствующих пособиях.

Для закрепления определения и подготовки к доказательству свойств точек симметричных относительно центра, полезно предложить несложные задачи на доказательство, например:

1. Доказать, что стороны развернутого угла симметричны относительно его вершины.

2. Доказать, что два вертикальных угла симметричны относительно их общей вершины.

Пару точек, симметричных относительно центра, можно построить так: описав с помощью транспортира дугу в 180° и обозначив ее начало и конец буквами A и A_1, замечаем, что достаточно повернуть точку A на 180° относительно центра дуги, чтобы она совпала с точкой A_1, следовательно, точки A и A_1 симметричны относительно центра дуги. Путь точки A показываем, проведя указкой по дуге от начала ее до конца. Следует установить свойства симметричных точек: 1) каждой точке соответствует единственная точка, ей симметричная относительно данного центра; 2) точка, симметричная центру симметрии, есть центр симметрии; 3) если две различные точки симметричны относительно центра, то они лежат с этим центром на одной прямой по разные стороны от него и на равном расстоянии; 4) две различные точки имеют только один центр симметрии. После свойства 3) целесообразно доказать и предложение, ему обратное.

Полезно решить задачи на построение точек, отрезков прямых, прямолинейных фигур, окружностей, симметричных данным относительно центра. При этом выбираются различные положения центра относительно данных фигур [1].

Можно решить и более сложные задачи на доказательство. Приведем пример такой задачи.

«Через концы отрезка AB (рис. 181) проведены равные между собой отрезки AC и BD, так что точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB и $\angle CAB = \angle ABD$. Доказать, что отрезки AC и BD симметричны относительно середины отрезка AB».

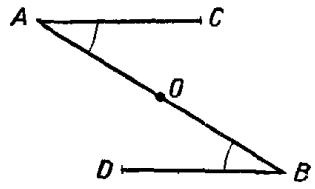


Рис. 181

Нужно выяснить, что из определения фигур, симметрично расположенных относительно центра, следует их равенство.

Необходимо познакомить учеников с фигурами, имеющими центр симметрии, и дать следующее определение: фигура, которая при повороте около некоторой своей точки на 180° в новом положении совпадает с первоначальным, называется фигурой, имеющей центр симметрии.

Это понятие вводится с помощью наглядных пособий, представляющих собой вращающиеся около определенной точки фи-

[1] См. [260], упражнения № 360—361.

гуры, изображенные на прозрачной бумаге и наложенные на равные им фигуры, вычерченные на плотной бумаге (рис. 182). Среди пособий полезно иметь различные орнаменты и изображения предметов, взятых из природы и техники (рис. 183). Предлагается повернуть вращающуюся фигуру на 180° около точки, в которой она укреплена, и выяснить, совпадает ли она со своим первоначальным положением. Задаются фигуры как имеющие центр симметрии, так и не имеющие его.

Рис. 182

Рис. 183

Закрепляется определение с помощью аналогичных упражнений. Можно предложить найти центры симметрии ряда заданных фигур [1], а также привести примеры фигур, имеющих центр симметрии, из жизни, из техники.

В заключение следует проделать упражнения на закрепление понятий осевой и центральной симметрии фигур. Можно предложить выбрать из данных фигур те, которые имеют только центр симметрии, только оси, а также фигуры, имеющие и центр, и оси симметрии (рис. 184). Надо заметить, что если фигура, имеющая ось симметрии, имеет и центр симметрии, то центр симметрии всегда располагается на оси симметрии.

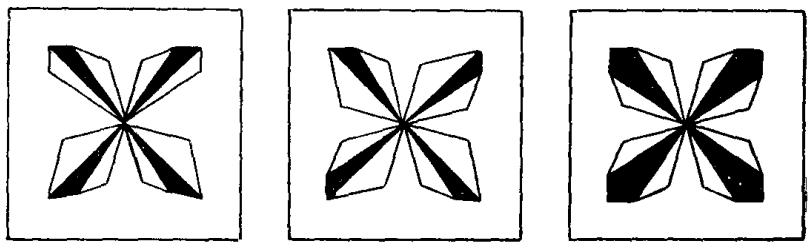


Рис. 184

Понятие центральной симметрии может быть использовано затем при изучении параллелограмма, даже если основные свойства параллелограмма были выведены раньше. Можно предложить упражнения на доказательство новых свойств параллелограмма. Примером могут служить свойства, сформулированные в задаче № 363 задачника Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой. Можно предложить также упражнения на доказательство с по-

[1] См [260], № 365.

мощью центральной симметрии известных уже свойств параллелограмма, например:

«Доказать с помощью центральной симметрии, что противоположные стороны параллелограмма попарно равны».

Понятием центральной симметрии следует пользоваться при изучении видов параллелограммов. На ряде задач можно показать, что каждый параллелограмм имеет центр симметрии. Например:

«На рисунке 185 представлен участок $ABCD$ прямоугольной формы, точка K — колодец, M и N — два дома. Как надо провести изгородь, чтобы участки, прилегающие к домам M и N, были равны и колодец K находился на границе участков?»

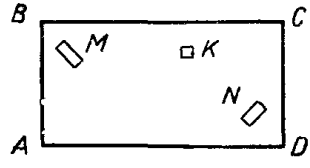


Рис. 185

Понятие центральной симметрии может быть использовано при изучении дальнейших тем курса геометрии восьмилетней школы. К этому понятию, например, следует вернуться в теме «Правильные многоугольники».

Опыт использования осевой и центральной симметрии в системе, указанной в настоящем параграфе, проводился в VI и VII классах школ № 216 и 221 Ленинграда в 1960/61 и 1962/63 учебных годах и дал положительные результаты.

§ 19. Параллельные прямые

Основными разделами темы являются: определение параллельных прямых и доказательство их существования; признаки параллельности двух прямых; аксиома параллельных; теоремы об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей; теоремы об углах с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами.

В программе тема «Параллельность» расположена после темы «Треугольник», а поэтому в нее включена теорема о сумме внутренних углов треугольника и следствия из нее (свойство внешнего угла треугольника, сумма острых углов прямоугольного треугольника, свойство катета, лежащего против угла в 30°).

Изучение темы «Параллельность» дает возможность углубить ряд понятий.

1) Давая определение параллельных прямых, можно познакомить учеников с теоремой существования, так как отсутствие общей точки у двух прямых не может быть проверено опытным путем (см. § 7, стр. 520 и ч. I, § 7).

2) Углубляется понятие об образовании обратной теоремы. При решении задач, в которых требуется определить, парал-

лельны ли две прямые, если даны какие-либо углы, образованные при пересечении этих прямых третьей, учащиеся должны правильно пользоваться прямой или обратной теоремами. А затем могут быть сформулированы и противоположные теоремы.

3) Доказательство методом «от противного» позволяет углубить понимание этого способа рассуждения.

4) Введение аксиомы о параллельных позволит лучше уяснить понятие аксиомы, чем это можно было сделать в предыдущей теме (см. § 7, стр. 541).

5) Теоремы об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, об углах с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами, о сумме углов треугольника и их следствия дают возможность решать многие задачи на вычисление и доказательство.

6) Тема о параллельных прямых невелика по объему и потому в ней легко установить связь между теоремами, понять и запомнить их последовательность.

В то же время в теме о параллельных прямых вводятся и закрепляются практические навыки: построение прямой, параллельной данной, с помощью чертежного треугольника и линейки, с помощью малки, рейсмаса; проводится на местности построение прямой, параллельной данной.

Поскольку многие вопросы этой темы были нами рассмотрены выше, в главе II (§ 6 и 7), остановимся лишь на некоторых деталях.

Пересечение двух прямых третьей и названия образовавшихся пар углов полезно дать до введения определения параллельных прямых, так как иначе ученики нередко относят названия этих углов только к случаю пересечения параллельных прямых секущей прямой. Прямые и секущую при этом надо строить в разных направлениях, отмечать углы дужками и цифрами. Учащиеся должны перечислить образовавшиеся при каждой точке пересечения пары смежных углов, вертикальных углов и только после этого следует ввести названия новых пар углов.

Перед введением понятия *параллельные прямые* необходимо вспомнить, какое расположение прямых на плоскости уже рассматривалось: две прямые могут иметь одну общую точку, тогда они называются пересекающимися (§ 16, стр. 602); выяснить еще раз, почему две различные прямые не могут иметь двух общих точек, при этом вспоминается и формулируется аксиома прямой. Естественно возникает вопрос, могут ли две прямые на плоскости не иметь ни одной общей точки. Выше уже были рассмотрены определение параллельных прямых (§ 6, стр. 510, 511) и доказательство первой теоремы о том, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны (§ 7, стр. 537). Эта теорема служит признаком параллельности двух

прямых, а также доказывает их существование. Следующий признак параллельности (равенство внутренних накрест лежащих углов) предлагается доказать на основании уже известного признака[1]. Этот способ дает возможность избежать трудно усваиваемого учащимися доказательства методом от противного[2]. Однако сознательное усвоение доказательства по учебнику[3] тоже дается с трудом, так как цель дополнительного построения для учеников долго остается непонятной. Это доказательство может быть усвоено учениками формально, тем более что для них из чертежа очевидно, что прямая, перпендикулярная к одной из данных прямых, образует прямой угол и с другой.

Вскроем ход рассуждения, приводящий к дополнительному построению и последующему доказательству, то есть проведем анализ:

1) Нам надо доказать, что две прямые AB и CD (на рис. 186, $а$) параллельны. Мы знаем, что две прямые параллельны, если они перпендикулярны к одной и той же третьей прямой; постараемся построить такую прямую, к которой были бы перпендикулярны и AB и CD.

2) Мы можем провести из любой точки плоскости прямую, перпендикулярную к одной из данных прямых, например к AB, но мы не знаем, пересечет ли эта прямая под прямым углом вторую данную прямую (CD); это надо будет доказать. Чтобы доказать, что угол, образованный прямой NM (перпендикуляр-

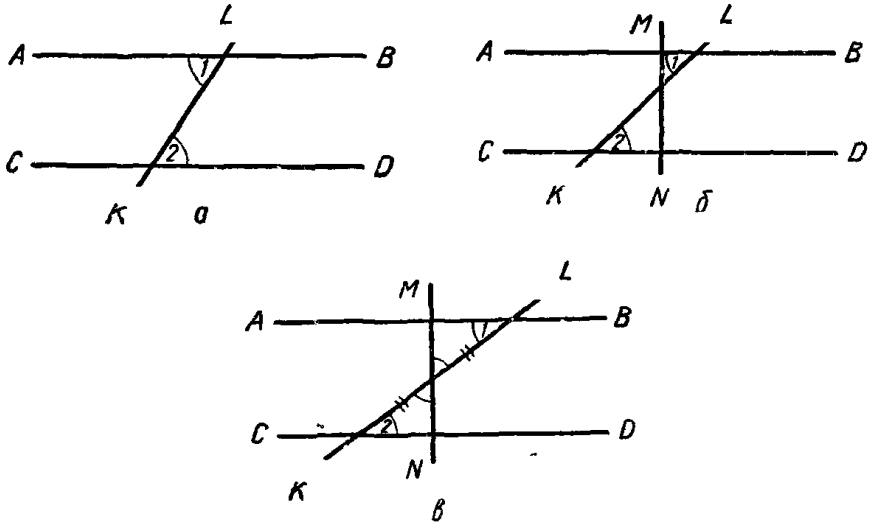


Рис. 186

[1] См. [258], § 35.
[2] См. [248], [227].
[3] См. [258].

ной к AB) и прямой CD, тоже прямой, достаточно доказать, что он равен углу, который прямая MN образует с прямой AB.

3) Для доказательства равенства двух углов удобно сделать такое построение, чтобы они были углами равных треугольников, лежащими против равных сторон. Такие треугольники и надо построить.

4) Если перпендикуляр к прямой AB пересечет секущую KL и прямую CD (рис. 186, *б*), то получатся два треугольника, в них можно найти равные элементы: $\angle 1 = \angle 2$ по условию, а еще два угла равны как вертикальные. Но равенства двух углов недостаточно для доказательства равенства треугольников; надо, чтобы были равны и стороны, к которым прилегают эти углы. Значит, прямая MN, перпендикулярная к AB, должна пересекать отрезок секущей KL в его середине.

Отсюда вытекает построение: делим отрезок KL пополам и из его середины (точки O) опускаем перпендикуляр на AB и т. д., следует доказательство равенства полученных треугольников и окончательный вывод (рис. 186, *в*).

Мы подробно провели анализ, чтобы показать, что он сложен и малодоступен для учеников (как и анализ доказательства теоремы о внешнем угле треугольника). В таком случае учитель после синтетически проведенного доказательства должен пояснить учащимся смысл дополнительного построения.

При проведении анализа доказательства мы не остановились на выяснении вопроса, почему прямая, перпендикулярная к AB, пересечет прямую CD, считая этот вопрос слишком тонким для учащихся. Примечание, данное в учебнике Н. Н. Никитина (стр. 76), о возможности доказать пересечение прямых MO и CD путем поворота треугольника MOD вокруг точки O на 180° вряд ли может быть использовано, так как такой поворот с трудом может быть осознан учениками. Если же действительно использовать указанный поворот, то им может быть доказана и перпендикулярность прямых MO и CD.

Для лучшего усвоения способа доказательства можно воспользоваться и другим приемом, рассмотренным нами в § 7, предложить предварительно маленькие задачи на доказательство на готовом чертеже (см. рис. 187 и 188).

Можно задать дополнительный вопрос: могли бы мы доказать равенство треугольников AOB и COD, если бы не было дано, что $OB = OC$?

Доказательство других признаков параллельности прямых, рассматриваемых как следствие из доказанного, обычно не вызывает затруднений и дает хороший материал для самостоятельного решения задач на доказательство.

Признаки параллельности прямых дают обоснование для построения прямой, параллельной данной, разными способами. Учащиеся должны получить навык в построении параллельных

Задача 1

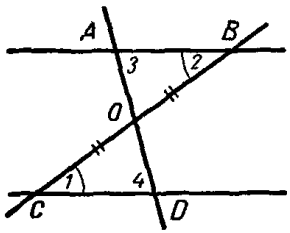


Рис. 187

$\angle 1 = \angle 2$
OB = OC

Доказать
$\angle 3 = \angle 4$

Задача 2

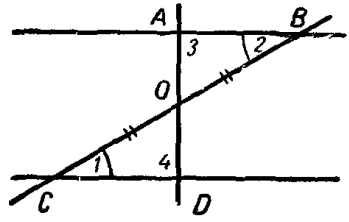


Рис. 188

$\angle 1 = \angle 2$
OB = OC
$\angle 3 = d$

Найти $\angle 4$

прямых с помощью треугольника и линейки; часто бывает, что правильно приложить угольник они не умеют. Можно показать и обычный способ построения при помощи циркуля и линейки прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не лежащую на прямой. Хорошо, если ученики ознакомятся с применением малки и рейсмаса при выполнении конкретных работ в мастерской.

В результате выполняемых учащимися разными способами построений прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку, можно поставить вопрос: сколько таких прямых можно провести?

Учащимся интуитивно ясно, что только одну прямую. Если при построении прямой двумя разными способами получатся две различные прямые, ученик усомнится в правильности построения. Однако учащиеся уже не раз встречались с доказательством очевидных предложений, и сообщение учителя, что предложение «через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной» не может быть доказано, то есть выведено на основании уже известных положений, вызывает удивление школьников. Педагог должен понятно рассказать, как в течение двух тысячелетий многие математики пытались доказать это предложение и только великий русский математик Н. И. Лобачевский в 1826 г. показал, что доказать этого положения нельзя, что оно является аксиомой[1]. После этого следует повторить то, что уже было сказано об аксиомах, или ввести это понятие (см. выше, § 7, стр. 541). При доказательстве последующих теорем надо отчетливо подчеркнуть, что при этом используется аксиома о параллельных.

[1] Данное предложение может быть доказано, если какое-нибудь другое, равносильное ему, будет принято за аксиому. См. [253], гл. I.

Теоремы о свойствах углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, дают возможность предложить учащимся самостоятельно сформулировать теоремы, обратные признакам параллельности. Первая теорема (о соответственных углах) доказывается «от противного», что должно быть использовано для углубления понимания этого способа доказательства [1]. Ученики сами должны сказать, какие предположения о двух соответственных углах они могут сделать, если допустить, что углы не равны. Чтобы ученики ясно поняли все последующие рассуждения, надо, чтобы они сами показали, как должна расположиться на чертеже прямая при построении угла, равного соответственному, если предположить, что соответственные углы не равны, пойдет ли она внутри угла или вне его (для каждого случая).

Все остальные теоремы о свойствах углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, доказываются очень просто и могут быть использованы как задачи на доказательство для самостоятельной работы учащихся. Только после этих теорем можно давать задачи, в которых по двум неравным углам (соответственным, накрест лежащим и т. п.) требуется определить, параллельны ли прямые. Решение таких задач является упражнением на доказательство «от противного» [2]. В результате решения этих задач могут быть сформулированы теоремы, противоположные теоремам о признаках параллельности прямых.

Решение задач, в которых для обоснования вывода приходится пользоваться то прямой, то обратной теоремами, должно способствовать их пониманию. Но, как это указывалось выше, не следует давать преждевременно задач, для решения которых требуется знание обратной теоремы, еще не установленной. Так, например, задачи № 214 (1) и 215 из § 10 задачника Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой следует дать после теорем о свойствах углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей. Задача № 214 (1), в которой предлагается доказать, что две прямые, параллельные каждая одной и той же третьей прямой, параллельны, дает прекрасное упражнение для сознательного применения прямой и обратной теорем [3].

Теоремы об углах с соответственно параллельными и соответственно перпендикулярными сторонами являются хорошим применением теорем о параллельных прямых. Как уже указывалось, перед формулировкой новой теоремы необходимо пред-

---

[1] См. § 7, рис 43, *а* и 43, *б*

[2] См. § 7.

[3] Предполагается, что доказательство проводится без применения метода «от противного».

варительно выявить новые понятия. Выше, приводя примеры самостоятельных работ учеников, мы указывали, что, выполняя ряд построений, они могут образовать углы с соответственно параллельными сторонами[1]. Полезно ввести понятие о направлении лучей, образующих каждый угол, и сравнить направление каждого построенного угла с направлением сторон данного угла[2].

Также и перед теоремой об углах с соответственно перпендикулярными сторонами необходимо выполнить построение таких углов. Надо задать какой-либо угол (острый или тупой) и несколько точек: вне угла, внутри угла, на стороне угла, в его вершине. После выполнения построения ученики сами обнаруживают, что все построенные углы являются углами с соответственно параллельными сторонами (относительно друг друга), и должны обосновать этот вывод. Доказательству теоремы может предшествовать решение задач на вычисление или на доказательство (гл. III, рис. 52, 53). Теорема дает возможность обосновать устройство школьного эклиметра[3].

Следует остановиться еще на одной особенности. Учащиеся на основе своего жизненного опыта и обучения в начальных классах имеют представление о параллельных прямых как о двух прямых, которые равно удалены друг от друга. На уроках ученики иногда упоминают это свойство, принимая его за определение параллельных прямых. Преподавателю приходится обходить этот вопрос, так как понятие о расстоянии между прямыми дается в курсе VII класса, а для учащихся VI класса это понятие не обосновано. Если у учителя остается время, полезно среди задач на доказательство рассмотреть и следующую задачу. «Начертить две параллельные прямые, взять на одной из них две произвольные точки и сравнить расстояния каждой точки до другой прямой». Понятие расстояния от точки до прямой у учащихся есть. Чтобы доказать равенство перпендикулярных отрезков, достаточно провести диагональ полученного прямоугольника и доказать равенство двух прямоугольных треугольников. После этого можно пояснить, что, когда говорят о равном расстоянии между параллельными прямыми, имеют в виду, что все точки одной прямой одинаково удалены от другой прямой.

Если это понятие дано, то может быть рассмотрена и осевая симметрия двух параллельных прямых. Иллюстрировать ее можно перегибанием чертежа, сделанного на кальке, по оси симметрии.

---

[1] См § 9

[2] См [223], стр 161

[3] См [260], № 299.

Понятие о геометрическом месте точек плоскости, удаленных от данной прямой на данное расстояние, тесно связано с рассмотренными вопросами. С ним ученики могут ознакомиться при решении задач на построение в шестом или в седьмом классах.

§ 20. Четырехугольники

Тема «Четырехугольники» — первая тема в курсе геометрии VII класса. Объем темы невелик; она обладает стройной логической структурой. Доказательства теорем дают возможность применить знания из тем «Параллельность» и «Треугольник», а следовательно, и повторить эти разделы. Изучение темы показывает важность предшествующих теорем для обоснования следующих предложений курса геометрии и содействует дальнейшему развитию логической мысли учащихся: классификация четырехугольников и построение определений каждого частного вида; выделение свойств различных четырехугольников и их обоснование; выяснение, является ли каждое из этих свойств достаточным признаком данного вида четырехугольника, что связано с образованием и доказательством обратных теорем. Все это дает богатые возможности для логических упражнений на конкретном материале. В связи с темой могут быть предложены разнообразные задачи на вычисление и доказательство; многие свойства четырехугольников ученики легко могут доказать самостоятельно (например, свойство углов параллелограмма, особое свойство диагоналей ромба и т. п.). В то же время вся тема связана с решением задач на построение четырехугольников. Эти задачи могут предшествовать определению или выявлять достаточность данных для получения четырехугольника определенного вида, что требует доказательства. Примеры задач приведены в главе III. Много хороших задач в задачнике Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой.

Так как в технике, в быту постоянно встречаются фигуры различных четырехугольников, многие задачи могут быть связаны с практикой. Например, выяснить, как проверить, путем перегибания, что кусок материи для платка действительно имеет форму квадрата (см. также § 12).

В эту тему включено и понятие о центральной симметрии (см. § 18, стр. 651).

Начать изучение темы следует с повторения определения многоугольника, выпуклого многоугольника и затем четырехугольника. Относительно определения четырехугольника можно повторить то же, что говорилось относительно определения треугольника, но следует больше остановиться на *понятии выпуклого четырехугольника,* виды которого и будут в основном дальше рассматриваться.

Классификация выпуклых четырехугольников может быть дана различно в зависимости от определения трапеции. В школьном курсе трапеция определяется обычно как четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а другие две — не параллельны. В таком случае выпуклые четырехугольники делятся на 3 вида: трапеции, параллелограммы и четырехугольники, у которых нет ни одной пары параллельных сторон. Другая классификация выпуклых четырехугольников будет, если в определение трапеции включается только параллельность двух сторон. Ознакомиться с ней подробно можно в методике геометрии Н. М. Бескина [1].

Рассмотрев сумму углов четырехугольника, обычно переходят к определению параллелограмма и дальше рассматривают виды параллелограмма. Для каждого вида рассматриваются свойства его сторон, углов, диагоналей, наличие в нем осевой и центральной симметрии. Чрезвычайно существенно, чтобы ученики поняли, что свойство родового понятия присуще каждому виду, но вместе с тем вид имеет и особые свойства.

В таком же плане затем рассматривается и трапеция. Для образования каждого вида четырехугольника может быть использовано подвижное наглядное пособие: шарнирный четырехугольник, у которого может изменяться длина трех его сторон. Однако в VII классе нельзя ограничиваться только наглядным образом каждого вида четырехугольника. Необходимо доказать возможность его построения. Например, рассматривая виды параллелограмма, можно предложить сделать один из углов параллелограмма прямым. Учащиеся легко докажут, почему в таком случае и остальные три угла будут прямыми, так что получится уже знакомый им прямоугольник. Если так же подойти к образованию прямоугольной трапеции, то, построив один прямой угол, учащийся сразу обнаружит, что при другом основании тоже получится прямой угол, но другие два угла не могут быть прямыми (это вызвало бы параллельность другой пары сторон). Об определениях мы уже говорили выше [2].

Для усвоения классификации полезно составлять схемы. Схема классификации параллелограммов по двум основаниям деления (по углам и сторонам) была приведена в части I [3]. Такая же схема может быть составлена для классификации трапеций, так как и в этом случае мы имеем два основания деления: по длине сторон и по виду углов. Одна графа остается пустой, так как равнобочная трапеция не может быть прямоугольной (см. рис. 189).

---

[1] См [221], гл VII.
[2] См § 6, стр. 507
[3] См ч. I, § 9, стр. 67, 68.

	Равнобочные	Неравнобочные
Непрямоугольные		
Прямоугольные		

Рис. 189

Во многих школах применяют плакат, на котором изображена схема классификации четырехугольников по учебнику Н. А. Глаголева[1], что может привести к ошибочному ее пониманию: чертеж частного вида, отнесенный к названию рода, приводит к недоразумениям. Учащиеся часто говорят, что прямоугольник — не параллелограмм, так как соединяют с термином «параллелограмм» определенный образ косоугольного параллелограмма. Если в схему помещаются родовые понятия, то их не надо иллюстрировать никакими чертежами, как это и сделано в книге Н. М. Бескина[2].

К изучению признаков четырехугольников каждого вида можно подходить двумя путями:

1) Исходить из задачи на построение, например: «Построить параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними».

Выполнив построение, ученик должен доказать, что построенный четырехугольник — параллелограмм. Это приводит к теореме, являющейся обратной теореме о свойствах диагоналей.

2) Предложить составить теорему, обратную какой-либо теореме о свойствах параллелограмма, и выяснить справедлива ли она, то есть дает ли она признак параллелограмма. Например, составить теорему. «Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырехугольник параллелограмм».

Такую же работу можно провести и для выяснения признаков видов параллелограмма, что дает материал для задач на доказательство и на построение.

Необходимо выяснить число элементов, определяющих выпуклый четырехугольник. Ученики нередко считают, что треугольник определяется тремя элементами, а четырехугольник — четырьмя. Уже модель шарнирного четырехугольника показы-

---

[1] См. [227], § 114

[2] См [221], гл. VII.

вает, что четыре стороны не определяют четырехугольник — можно образовать различные выпуклые четырехугольники. Затем можно показать на чертеже, что каждый четырехугольник можно разбить на два треугольника. Один треугольник определяется тремя элементами. Для того чтобы второй был определен, нужно задать еще два элемента (так как один элемент у треугольников общий).

Надо выяснить также, что понимается под независимыми данными элементами. Например, показать, что если в параллелограмме дан угол, то тем самым определены и три других угла.

Еще раз напоминаем о необходимости приучать учащихся к разнообразным чертежам одной и той же фигуры. Так, например, многие ученики считают, что во всякой трапеции тупой угол может прилегать только к меньшему основанию, и не могут сделать чертеж к задаче № 458 из задачника Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой.

В заключение приведем примеры упражнений логического характера.

В следующих предложениях заменить многоточие словами: «необходимо и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо».

1) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником..., чтобы его диагонали были равны.

2) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом..., чтобы все его стороны были равны.

3) Для того чтобы четырехугольник был ромбом..., чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делились пополам.

(Во всех этих упражнениях под четырехугольником понимается плоский выпуклый четырехугольник.)

§ 21. Окружность

Тема «Окружность» проходится в VII классе после темы «Площадь многоугольника», включающей теорему Пифагора.

Ее основное содержание: 1) определение положения окружности на плоскости; 2) основные теоремы о зависимости между хордами и дугами в круге; 3) взаимное положение прямой и окружности; 4) взаимное положение двух окружностей; 5) измерение некоторых углов в круге.

Характерной особенностью рассматриваемой темы является ее связь с *идеей положения* — одной из основных идей геометрии. Никакая другая тема (за исключением первой темы стереометрии) не дает стольких возможностей для изучения взаимного расположения геометрических фигур. Эти возможности

должны быть использованы учителем для развития пространственного воображения учащихся.

Изучение темы дает также возможность продолжать работу по развитию логической мысли школьников: образовывать теоремы, обратные рассмотренным (теоремы о диаметре, перпендикулярном хорде, о касательной к окружности и другие), вести доказательство обратных теорем, что требует хорошего понимания логической зависимости между данными и искомыми в каждом случае.

Установление условий, при которых прямая и окружность, а также две окружности имеют одну, две общие точки, позволяет обосновать различные возможные случаи решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, то есть провести исследование.

Измерение вписанных и некоторых других углов дает материал для решения задач на вычисление и доказательство; к числу последних могут быть отнесены и задачи на измерение углов, не включенные в программу, например измерение угла, образованного двумя касательными (описанный угол). Содержание задач может быть гораздо разнообразнее, чем это было прежде, так как может быть использована теорема Пифагора (см. гл. III, § 14, стр. 577, 591).

Рассмотрим некоторые вопросы темы.

Вначале следует вспомнить определение окружности, которое было дано в VI классе, понятия *центр, радиус.* Дальше можно перейти к тому, сколько точек определяет окружность на плоскости, что положение окружности определяется положением ее центра и заданием радиуса, после чего ученики непосредственным построением выясняют, что одна точка не определяет окружности, что, взяв определенный центр, можно провести «сколько угодно» окружностей любого радиуса (рис. 190). После этого задаются две точки. Учащиеся должны найти положение центра окружности, то есть точку, равноотстоящую от двух заданных точек. Учащиеся уже знают, что для этого надо построить перпендикуляр к отрезку, соединяющему две заданные точки, через его середину. Следует вывод, что и две точки не определяют положение окружности, так как можно построить бесконечное множество окружностей, проходящих через эти две точки. Но учащиеся воспринимают наглядно, что положение центра окружности уже более определенное — им может быть только любая точка построенного перпен-

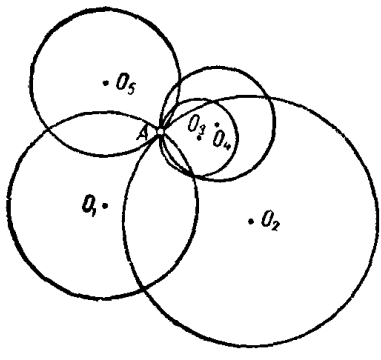


Рис. 190

дикуляра. Положение каждой выбранной точки определяет радиус окружности, он не может быть меньше половины расстояния между данными точками (рис. 191). Три заданные точки, не лежащие на одной прямой, дают определенное решение задачи. Оно вполне может быть найдено учащимися (рис. 192). Ученики могут дать обоснование и тому, что через три точки, лежащие на одной прямой, окружность провести нельзя. Без обоснования принимается, что два перпендикуляра к пересекающимся прямым пересекаются. В программе VI класса такой теоремы нет, доказательство этого очевидного положения трудно воспринимается. Его можно рассмотреть в VII классе перед темой «Окружность» при решении задач на материал VI класса (см. задачу № 723) [1].

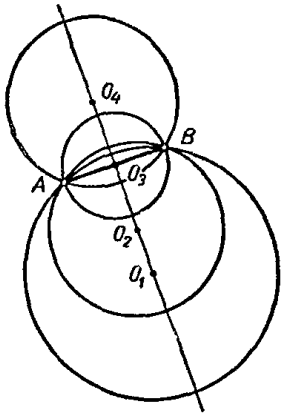


Рис. 191

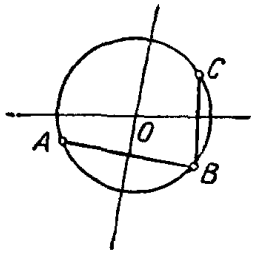


Рис. 192

При решении рассмотренной нами задачи используется понятие геометрического места точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек, что может послужить поводом для повторения и других известных геометрических мест.

Все различные случаи взаимного положения окружности и прямой учащиеся могут установить путем самостоятельного выполнения чертежей, после чего учитель вводит понятие о касательной к окружности [2].

Первая теорема о касательной обосновывает возможность ее построения, которое и может быть выполнено при помощи чертежного циркуля и линейки. Построение касательной из точки, лежащей вне круга, с помощью циркуля и линейки может быть дано после измерения вписанного угла.

Также самостоятельно ученики могут обнаружить все возможные случаи взаимного расположения двух окружностей. Учитель задает определенные радиусы двух окружностей R и

[1] См [258]
[2] См. § 9, стр. 547.

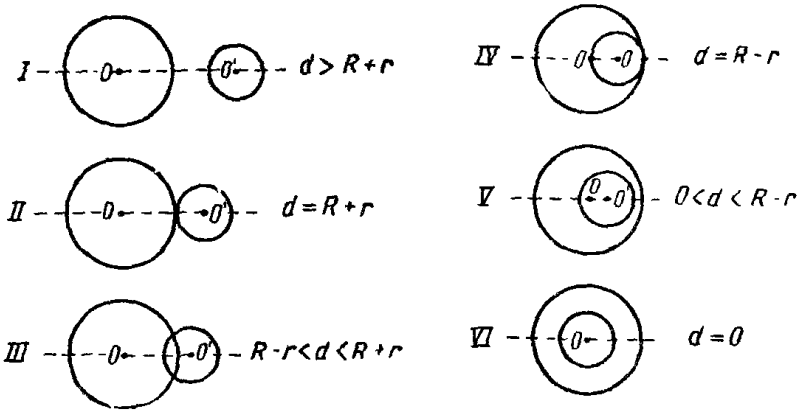


Рис. 193

r ($R>r$) и предлагает изменять расстояние между центрами d. Проще всего начать со случая, когда окружности лежат одна вне другой, и затем как бы приближать одну из них, уменьшая расстояние d. Не все учащиеся сразу находят все возможные положения окружностей, но затем учитель обобщает их работу и дает общую схему на доске или на плакате (рис. 193). Ясное представление о различных положениях двух окружностей может дать и наглядное пособие, на котором один круг начерчен на фанере, а другой — прозрачный с цветным обводом — может передвигаться по линии центров (рис. 194).

После того, как опытным путем установлены все случаи расположения двух окружностей, на каждом чертеже надо рассмотреть зависимость между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами, которое следует из каждого положения. Из того, что каждая из установленных зависимостей исключает все другие, и что они исчерпывают все возможные случаи, вытекает справедливость обратных предложений. В этом можно убедиться, доказав любое из них «от противного». Ученикам надо предложить составить такую же таблицу расположения двух окружностей, имеющих равные радиусы. Они смогут самостоятельно обнаружить, что возможны только три случая расположения окружностей, так как в IV и VI случаях окружности сливаются, а V случай невозможен (см. рис. 193 и 195). Если в дальнейшем будет поставлен вопрос об общей касательной к двум окружностям, то обе эти таблицы могут быть использованы для выяснения числа общих касательных для каждого случая расположения окружностей.

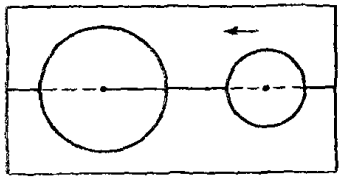


Рис. 194

В некоторых задачах говорится о расстоянии точки от окружности. Для знакомства с этим понятием надо взять точ-

ку вне круга и соединить ее с различными точками окружности. Учащиеся видят, что данная точка различно удалена от разных точек окружности. Им можно предложить найти на окружности точку, самую близкую к данной точке. Ответ обычно дается правильный. (Так же рассматривается случай, если точка дана внутри круга)

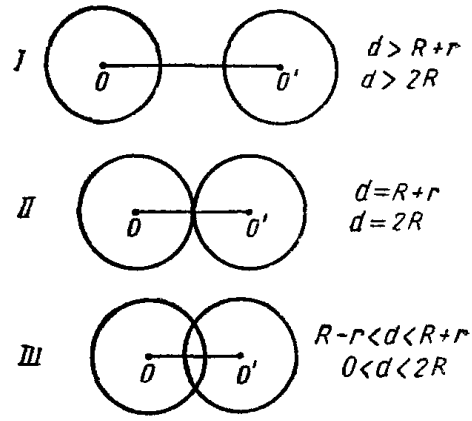


Рис. 195

Приводим таблицу, которая дает систему всех видов углов в круге. Каждая из двух пересекающихся прямых может быть или касательной, или секущей (прямые, не имеющие с окружностью общей точки, не рассматриваются); точка пересечения прямых (вершина угла) может лежать или внутри круга, или на окружности, или вне круга. Если учитывать и расположение секущей относительно центра круга, то получается таблица, изображенная на схеме (рис. 196). Ее составление представляет для учащихся самостоятельную работу творческого характера, помогающую усвоить различные сочетания геометрических образов. Таблица может быть использована для составления задач на вычисление или на доказательство, выясняющих измерение различных углов в круге.

В § 7, стр. 525, мы говорили о возможности образования нескольких обратных теорем, если условие прямой теоремы сложное. Ученики встретятся с этой возможностью при образовании теорем о диаметре, перпендикулярном хорде; в учебнике

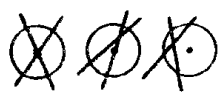
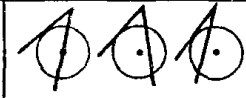
Вершина / Прямые	Внутри круга	На окружности	Вне круга
Две секущие			
Секущая и касательная			
Две касательные			

Рис. 196

Н. Н. Никитина (§ 70) так же, как в учебнике А. П. Киселева (§ 106), формулируются две обратные теоремы, но никаких объяснений к их образованию не дается. В обоих обратных теоремах сохраняется одна и та же часть условия прямой теоремы, что данный отрезок прямой — диаметр, то есть проходит через центр круга. Между тем можно составить обратную теорему, сохранив другую часть условия, например: «Прямая, перпендикулярная хорде и проходящая через ее середину, проходит через центр»[1]. Эта теорема дает способ отыскать центр круга: достаточно провести две непараллельные хорды и через середину каждой из них построить к ней перпендикуляр. Для отыскания центра окружности этим способом можно сконструировать прибор[2].

В геометрии Ж. Адамара отмечается, что в теореме о диаметре, перпендикулярном хорде, имеется как бы пять положений относительно некоторой прямой: 1) быть перпендикулярной хорде, 2) проходить через центр окружности, 3) проходить через середину хорды, 4) и 5) проходить через середину одной из стягиваемых хордой дуг, причем каждые два из этих положений определяют прямую[3]. Таким образом, приняв любые два положения за условие, можно составить теорему. Некоторые из этих теорем могут быть даны как задачи на доказательство.

§ 22. Пропорциональные отрезки. Подобие фигур.

Пропорциональные отрезки.

Для введения понятия подобия фигур необходимо предварительно рассмотреть пропорциональные отрезки. Понятие пропорциональных величин школьники получают в курсе арифметики VI класса; они знают отношения и их свойства, определение пропорции, свойства пропорции, умеют найти неизвестный член пропорции. Чтобы ввести понятие о пропорциональных отрезках, предварительно надо определить, что понимается под отношением двух отрезков.

Отношение отрезков может быть определено независимо от понятия длины отрезка[4]. В этом случае длина отрезка затем определяется как отношение измеряемого отрезка к отрезку, принятому за единицу, после чего доказывается, что отношение двух отрезков равно отношению их длин (если отрезки измерены одной и той же единицей длины).

---

[1] См. [258], задача № 626.

[2] См. «Математика в школе»; 1961, № 3, ст М Н. Трубецкого, черт. 3, 6, 7

[3] См [216], § 63.

[4] См. [216], § 17; [272], [266], ст. А. И. Фетисова.

В школьных учебниках чаще всего определяют отношение двух отрезков как отношение чисел, измеряющих эти отрезки при одной и той же единице длины [1]. Это определение предполагает известным понятие длины отрезка. В научных курсах длина отрезка определяется как некоторое положительное число, которое соотносится данному отрезку, при этом: 1) равным отрезкам соответствуют равные числа; 2) сумме отрезков соответствует число, равное сумме чисел, отнесенных к каждому слагаемому отрезку, и 3) некоторому произвольно выбранному отрезку отнесено число 1 [2]. Чтобы обосновать теорию измерения, должно быть доказано существование несоизмеримых отрезков и введено понятие иррационального числа. Только в области действительных чисел справедливо утверждение, что каждому отрезку соответствует некоторое положительное число, и могут быть доказаны остальные положения, необходимые для введения понятия длины отрезка. Все эти вопросы даже в элементарном изложении, которое давалось в учебниках для VIII класса средней школы, чрезвычайно трудны для учащихся и в программу восьмилетней школы не включены [3]. Поэтому учитель, повторяя измерение отрезков в VIII классе, использует те знания и умения, которые уже есть у учащихся и объем которых был нами изложен выше при рассмотрении первой темы геометрии VI класса [4].

При проведении измерительных работ в VII классе, а также при решении задач на вычисление длины стороны квадрата по заданной его площади и вычислениях длины неизвестной стороны прямоугольного треугольника, используя теорему Пифагора, учащимся неоднократно приходилось выражать длину отрезка приближенно десятичной дробью, находить избыточное и недостаточное значения длины отрезка, определять границу погрешности результата. Хотя отношение двух отрезков учащиеся не изучали, фактически они знакомы с этим понятием. Еще на уроках арифметики они познакомились с числовым масштабом, который выражает отношение длины отрезка на плане к длине соответственного отрезка на местности; в условиях задач по арифметике и по алгебре нередко дается отношение длин отрезков наряду с отношением значений других величин. Приведя некоторые известные ученикам примеры, учитель может ввести определение отношения отрезков, данное в учебнике [5]. Упражнения на нахождение отношения двух отрезков путем их измерения очень элементарны, но могут быть связаны с повторением действий над приближенными

[1] См. [248], § 155; [227], § 166; [258], § 82.
[2] См. [262], [223].
[3] См. [6].
[4] См. § 16, стр. 600.
[5] См. [258].

числами, а также с использованием логарифмической линейки [1]. В этих упражнениях погрешность результата зависит от точности измерений. Полезно провести лабораторную работу, предложив найти отношение отрезков с применением разных инструментов, например: определить отношение сторон прямоугольной пластинки, пользуясь масштабной линейкой, повторить измерения при помощи штангенциркуля и сравнить полученные результаты. Обратим внимание на распространенную ошибку школьников: они считают, что если при делении двух приближенных значений чисел они берут частное с недостатком, то и отношение найдено с недостатком (так же с избытком).

Между тем этот вывод не может быть сделан, если неизвестно, с недостатком или с избытком были взяты значения делимого и делителя. Как известно, чтобы получить недостаточное значение частного, делимое должно быть взято с недостатком, а делитель — с избытком (обратно — при нахождении избыточного значения). Могут быть проведены и упражнения, в которых отношение отрезков находят на основании известных логически установленных зависимостей. Например, отношение катета, лежащего против угла в 30°, к гипотенузе; отношение катета, лежащего против угла в 45° или угла в 60°, к гипотенузе. В последних двух примерах отношения могут быть вычислены с любой заданной точностью. Если раньше ученики находили эти отношения путем построения треугольников и измерения их сторон, то теперь они могут проверить точность результатов своей прошлой практической работы.

Следует доказать, что отношение двух отрезков не зависит от принятой единицы измерения. В учебнике Н. Н. Никитина это показано на частном примере. Приведенные рассуждения следует повторить на других примерах, пользуясь таблицей перевода одних мер в другие, например английских мер в метрические. Если обозначить числа, выражающие длины отрезков, буквами, то рассуждения дадут общий вывод [2].

Определение пропорциональных отрезков аналогично определению пропорциональных величин вообще и поэтому легко может быть сформулировано учащимися. Полезно при этом дать чертеж, показывающий пример пропорциональных отрезков. Предварительно должна быть повторена теорема из курса VII класса о пересечении сторон угла параллельными прямыми, проведенными через концы равных отрезков, последовательно отложенных на одной стороне угла [3]. Затем учащимся можно

---

[1] См. [258], стр. 154; [260], § 26, № 753, 754.

[2] Общее доказательство, включающее и выражение длины числом иррациональным, дано в кн. [227], § 165, 166.

[3] См. [258], § 47; [248], § 95.

показать аналогичный чертеж, на котором две из проведенных прямых выделены другим цветом. На рисунке 197 выделены прямые KL и MN. Рассматривая чертеж, учащиеся называют пары отрезков, образованных точками пересечения этих прямых с одной стороной угла, и находят соответствующие им отрезки на другой стороне угла. Легко устанавливается, что отношение каждой пары отрезков одной стороны угла равно отношению соответствующих им отрезков на другой стороне угла.

После рассмотрения пропорциональных отрезков на частном примере может быть дана формулировка теоремы о пропорциональности отрезков, образующихся на сторонах угла (или на двух прямых), пересеченных несколькими параллельными прямыми, и ее доказательство. Если длины отрезков, отложенных на одной стороне угла (или на одной из данных прямых), выражены целыми числами, то доказательство не вызывает затруднений и может быть дано в общем виде. В § 84 учебника Н. Н. Никитина оно проведено на частном примере, но ученик VIII класса должен уметь провести аналогичное рассуждение, не прибегая к числовым данным. Рассуждение будет примерно таким (см. рис. 197): если дано, что длины отрезков BK и KM выражаются соответственно числами l и q (в одинаковых единицах длины), то отношение отрезков $\frac{BK}{KM}=\frac{l}{q}$; так как

1) $BK:KM=BL:LN$
2) $BK:BM=BL:BN$
3) $BM:KM=BN:LN$

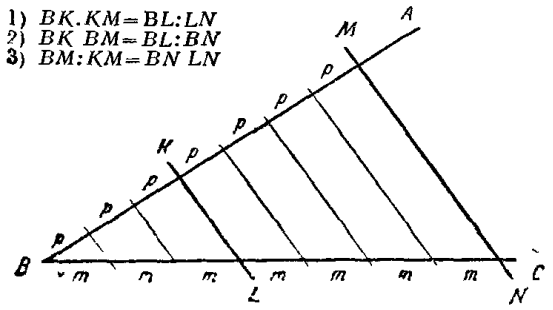


Рис 197

по условию числа l и q целые, то в отрезке BK единица длины откладывается l раз, а в отрезке KM та же единица откладывается q раз. После проведения из точек деления прямых, параллельных прямой KL, устанавливается, что на стороне BC получаются равные между собой отрезки, причем на отрезке BL отложится l таких отрезков, а на отрезке LN — q таких же отрезков. Так как все эти отрезки равны, то длина каждого отрезка выражается одним и тем же числом, обозначим его буквой m. Тогда длина отрезка BL выразится числом ml, а длина отрезка LN выразится числом mq. По определению отношение отрезков равно отношению их длин, следовательно, $\frac{BL}{LN}=\frac{ml}{mq}=\frac{l}{q}$, откуда $\frac{BK}{KM}=\frac{BL}{LN}$.

Чтобы не возникло неясностей, надо условиться, что в этом разделе отрезки мы будем обозначать двумя заглавными буквами, а их длины (то есть числа) — малыми буквами.

Если проводить доказательство для случая пересечения тремя параллельными прямыми двух произвольных прямых, рассуждение остается прежним.

Доказательство может быть проведено несколько иначе: за единицу длины на другой стороне угла (то есть на BC, рис. 197) принимается отрезок m, $m=\frac{BL}{l}$; тогда длина отрезка BL выразится числом l, а длина отрезка LN — числом q. Но введение новой единицы длины и выражение длин неравных между собой отрезков одним и тем же числом вряд ли будет осознано всеми учащимися.

Доказательство теоремы для случая, когда длины отрезков выражаются дробными числами, по существу аналогично, если ввести такую новую единицу длины, при которой длины отрезков выразятся целыми числами. При рассмотрении этого случая можно ограничиться численным примером. Так, если длина первого отрезка 0,75 *дм*, а длина второго отрезка 0,5 *дм*, то за новую единицу длины можно принять 0,01 *дм*, то есть 1 *мм*. Дальнейшие рассуждения известны.

Несоизмеримые отрезки в VIII классе не рассматриваются, и можно было бы ограничиться данным нами материалом, однако, если время позволит, следует хотя бы на частном примере рассмотреть случай, когда берется приближенное значение отношения двух отрезков. Можно показать, что и в этом случае при пересечении сторон угла (или двух прямых) параллельными прямыми приближенное отношение двух отрезков на одной стороне угла, взятое с некоторой точностью, равно отношению соответствующих отрезков на другой стороне угла, взятому с той же точностью (оба отношения берутся с недостатком или оба с избытком).

Возьмем элементарный пример: стороны угла ABC пересечены двумя параллельными прямыми DE и FH (учащимся могут быть показаны чертежи на плакатах). Пусть $BD=1$ *дм*, а $DF=2\frac{2}{7}$ *дм*. На стороне BC образовались соответствующие отрезки BE и EH (рис. 198).

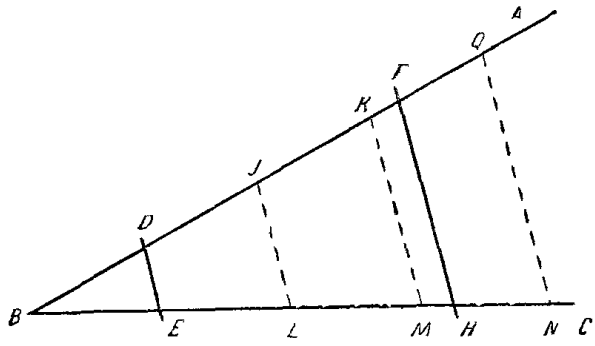


Рис. 198

1) Отложим на отрезке DF отрезок BD (то есть единицу длины). Он отложится на этом отрезке 2 раза и останется остаток $KF<BD$, так как $DF>2$ *дм* и $DF<3$ *дм*. Тогда $\frac{DF}{BD}\approx 2$ с недостатком.

2) Из точек деления проводим параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла. $IL\|DE$ и $KM\|DE$. На другой стороне угла образуются отрезки $EL=LM=BE$ и отрезок $MH<BE$. Можно показать, что если на стороне AB от точки K отложить еще раз отрезок BD, то его конец будет правее точки F; если из конца этого отрезка провести еще одну прямую QN, параллельную DE, то она пересечет сторону BC правее точки H, так как $QN\|FH$. Рассуждая как выше, находим, что длина отрезка EM вдвое больше длины отрезка BE, а отрезок $EH>EM$, то есть $EH>2BE$; $\frac{EH}{BE}\approx 2$ с недостатком.

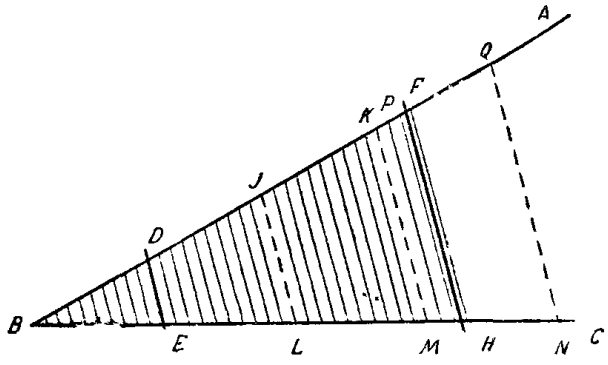


Рис. 199

3) Разделим теперь отрезок BD на 10 равных частей, то есть будем откладывать отрезок, равный $0{,}1\,BD=0{,}1$ *дм* (рис. 199). Этот отрезок, очевидно, отложится в отрезке DK 20 раз и на отрезке KF еще 2 раза, после чего останется остаток $PF<0{,}1\,BD$, то есть $KF>0{,}2\,BD$; $KF<0{,}3\,BD$ и $DF>2{,}2$ *дм*; $DF<2{,}3$ *дм*. Находим $\frac{DF}{BD}\approx 2{,}2$ с недостатком.

4) Как и раньше, из точек, образовавшихся на стороне BA, при откладывании отрезка, равного $0{,}1\,BD$, проводим прямые, параллельные DE, до пересечения со стороной BC. На стороне BC образуются отрезки, равные между собой; каждый из них равен $0{,}1\,BE$. На отрезке MH мы имеем 2 таких отрезка и остаток, который меньше $0{,}1\,BE$. Получаем, что $MH>0{,}2\,BE$ и $MH<0{,}3\,BE$, откуда $EH>2{,}2\,BE$ и $\frac{EH}{BE}\approx 2{,}2$ с недостатком.

5) Дальнейшее рассуждение проводится без выполнения построения. Мы предлагаем учащимся мысленно разделить отрезок BD на 100 равных частей и откладывать на стороне BA отрезок, равный 0,01 BD (или 0,01 *дм*). Этот отрезок отложится в отрезке DK 200 раз и в отрезке PF (прежнем остатке) 8 раз, и снова останется остаток, меньший, чем 0,01 BD. Тогда $KF > 0{,}28\,BD$ и $KF < 0{,}29BD$, то есть $DF > 2{,}28$ *дм* и $\frac{DF}{BD} \approx 2{,}28$ с недостатком.

6) Продолжив мысленно построение и повторив все рассуждение относительно соответственных отрезков на стороне BC, находим, что $\frac{EH}{BE} \approx 2{,}28$ с недостатком.

7) Сопоставляем полученные результаты:

С точностью до 1 $\frac{DF}{BD} \approx 2$ с недостатком; $\frac{EH}{BE} \approx 2$ с недостатком.

С точностью до 0,1 $\frac{DF}{BD} \approx 2{,}2$ с недостатком; $\frac{EH}{BE} \approx 2{,}2$ с недостатком.

С точностью до 0,01 $\frac{DF}{BD} \approx 2{,}28$ с недостатком; $\frac{EH}{BE} \approx 2{,}28$ с недостатком.

Мы установили, что приближенное отношение двух отрезков на одной стороне угла равно приближенному отношению соответственных отрезков на другой стороне угла (отношения взяты с произвольной, но одинаковой точностью по недостатку). Считаем, что отношения соответственных отрезков равны и отрезки пропорциональны $\frac{DF}{BD} = \frac{EH}{BE}$. В данном случае мы знаем точное отношение отрезков:

$$BD = 1 \text{ дм}, \quad DF = 2\frac{2}{7} \text{ дм}, \quad \frac{DF}{BD} = 2\frac{2}{7} = \frac{16}{7}.$$

Это число не выражается конечной десятичной дробью $\frac{16}{7} = 2{,}285714\ldots$ (получается периодическая дробь).

Отметим, что в наших рассуждениях при откладывании меньшего отрезка на большем мы неявно пользовались так называемой аксиомой Архимеда [1]. Аналогичные рассуждения проводятся и в случае выражения отношения несоизмеримых отрезков. Как мы знаем, в этом случае отношение выражается бесконечной непериодической дробью, то есть числом иррациональным. В VIII классе мы этого случая не выделяем, удовлетворяясь тем, что можем вычислить отношения с требуемой нам точностью и что доказанная теорема остается справедливой.

---

[1] См. [248], § 146; [227], § 160.

В учебнике Н. Н. Никитина доказывается теорема о пересечении двух прямых несколькими параллельными прямыми[1]. Необходимо рассмотреть особо случай, когда параллельные прямые пересекают стороны угла, тем более что ее доказательство непосредственно вытекает из соответственной теоремы VII класса[2]. Важно, чтобы ученики освоились с чертежом этой теоремы, так как это облегчит восприятие доказательства леммы о подобии треугольников и решение задач на построение отрезка, четвертого пропорционального, и деления отрезка в данном отношении.

Практическим применением теорем о пропорциональных отрезках является выполнение построений. При этом данные отрезки приходится откладывать измерительным циркулем (если данные числовые, то пользуясь циркулем и масштабной линейкой). В геометрии Н. А. Глаголева в этом же разделе дается обоснование устройства делительного (пропорционального) циркуля[3]. Это позволяет использовать его при построениях, но требует доказательства дополнительных теорем, на что надо иметь время; поэтому можно отложить употребление делительного циркуля до темы «Подобие треугольников». В задачнике Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой имеется также ряд задач на вычисление пропорциональных отрезков. При их решении предлагается пользоваться таблицами и логарифмической линейкой. Следует обратить внимание, умеют ли ученики правильно определять, с какой точностью может быть выражен результат вычисления, учитывая точность данных.

Хорошей задачей на доказательство может быть доказательство теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника[4] Знание этой теоремы может быть использовано для решения многих задач.

Подобие фигур

Тема «Подобие фигур», имеющая большое образовательное, а также и практическое значение, является одной из основных тем курса геометрии. Подобие дает теоретическое обоснование съемке плана земельных участков, определению недоступных расстояний, высоты предметов, устройству и применению многих инструментов и измерительных приборов (пропорциональный циркуль, поперечный масштаб, мензула, пантограф). Это позволяет обратить внимание учеников на связь теории с практикой.

Подобие треугольников дает возможность ввести тригонометрические функции острого угла, то есть новый вид функциональной зависимости, а на основе тригонометрических соот-

[1] См [258], § 84
[2] См [258], § 47
[3] См [227], § 172 и 179
[4] См [248], § 186, [227], § 180

ношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике вводится новый метод решения геометрических задач, в частности практических.

В современной геометрии подобие рассматривается как некоторое точечное геометрическое преобразование, что дает возможность ввести общее определение подобия фигур любой формы [1].

Во многих курсах геометрии предварительно рассматривается *гомотетия*, являющаяся частным случаем подобия. Так построен, например, раздел подобия в геометрии Н. А. Глаголева; определение подобия фигур в этом случае опирается на понятие гомотетии (в книге Н. А. Глаголева употребляется термин «перспективное подобие») [2]. В некоторых курсах геометрии подобие треугольников излагается до введения понятия подобного преобразования или гомотетии, затем вводится понятие гомотетии и после него дается общее определение подобия любых фигур [3].

В программу VIII класса включено подобие треугольников и многоугольников, отношение периметров и площадей подобных многоугольников, построение подобных фигур и практические приложения подобия. В программе говорится о подобии фигур, но конкретно перечисляется только подобие треугольников и многоугольников. О подобии фигур любого вида учащимся может быть дано лишь наглядное представление.

Изучение темы начинается с восприятия конкретных наглядных образов. Учащиеся не раз видели подобные фигуры: увеличенные фотографии, карты одной местности, выполненные в разных масштабах; они сами чертили планы комнаты, несложного участка, пользовались планом для определения расстояния на местности. Им хорошо известно, что отношение длины каждого отрезка на плане к длине соответствующего отрезка на местности для данного плана — число постоянное (числовой масштаб), понятно и то, что каждый угол на плане должен быть равен соответствующему углу на местности (иначе план будет «неверным»). Другими словами, учащиеся вполне подготовлены к формулировке определения подобных многоугольников, которое дается в учебнике [4].

При более строгом изложении определение геометрического понятия сопровождается доказательством его существования, что может быть достигнуто построением соответственной фигуры.

---

[1] См. определение подобия в кн. [262], § 68.
[2] См. [227], гл. VI.
[3] См. [216], кн. III.
[4] См. [258], § 90 и [248], § 168.

Однако, если понятие подобия дается вне связи с понятием подобного преобразования, мы не можем начать с построения многоугольника, подобного данному, так как доказательство требует знания признаков подобия треугольников. Учитель может пойти двумя путями:

1) начать с определения подобных треугольников, что легко связать с построением треугольника, подобного данному; определение подобных многоугольников дать после раздела подобия треугольников или

2) удовлетвориться тем, что ученики подготовлены к восприятию определения подобия многоугольников, их существование не вызывает сомнений, и начать с определения подобия многоугольников, рассматривая затем треугольник как частный вид многоугольника.

Второй путь делает понятным включение в определение подобия треугольников двух свойств: равенства углов и пропорциональности сторон. Это определение обычно и дается в школьных учебниках. Как известно, оно содержит избыточный признак, так как каждое из этих двух свойств может быть выведено из другого[1]. Мы имеем один из примеров, когда в определение включено лишнее свойство, так как этим достигается единообразие в определении подобия любых многоугольников[2].

При введении понятия подобия фигур необходимо широко использовать наглядные пособия. Следует заготовить ряд плакатов, на каждом из которых изображены две подобные фигуры. Рассматривая эти фигуры, легко выяснить, что каждая пара их имеет одинаковую форму, но разные размеры. Это суждение является лишь описанием подобных фигур. Независимо от того, определяются ли подобные многоугольники в начале темы или после определения подобия треугольников, следует предварительно рассмотреть чертеж двух подобных многоугольников, например два плана одного и того же участка местности, вычерченные в разных масштабах. На рисунке 200 вершины соответственно равных углов обозначены одинаковыми буквами и видно, что они расположены в одном порядке. Выяснив, что у этих многоугольников углы соответственно равны, надо определить, какие стороны называют сходственными, и выписать отношение каждой пары сходственных сторон.

---

[1] См § 6, стр 513.

[2] В учебной литературе иногда в определение подобия треугольника включается только равенство углов, см А Давидов, Элементарная геометрия, 1903 и Н А. Глаголев и А. А Глаголев, Геометрия, Учпедгиз, 1958 В этом случае пропорциональность сторон подобных треугольников является теоремой.

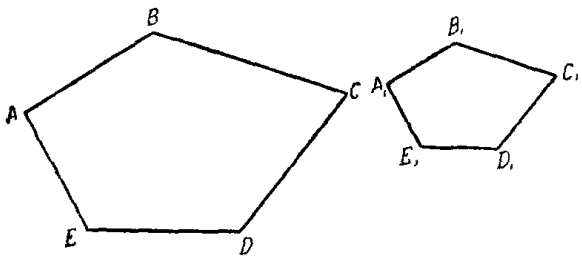


Рис. 200

1) $\angle A=\angle A_1$,
$\angle B=\angle B_1$,
$\angle C=\angle C_1$,
$\angle D=\angle D_1$,
$\angle E=\angle E_1$.

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=$
$=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=\frac{1}{2}$.

При записи пропорциональности сторон следует ввести понятие коэффициента подобия (на рис. 200 $k=\frac{1}{2}$). В дальнейшем использование коэффициента подобия облегчает доказательство некоторых теорем и решение задач на вычисление и построение. Можно дополнительно рассмотреть чертеж, где даны два многоугольника, у которых углы, рассматриваемые в одном и том же порядке, соответственно равны, но нарушена пропорциональность сторон, заключенных между равными углами (рис. 201), и другой чертеж двух многоугольников, у которых стороны пропорциональны, но углы не равны (рис. 202). Эти чертежи наглядно показывают, что в определение подобия многоугольников необходимо включить оба свойства. Для проверки усвоения определения могут быть заданы вопросы: подобны ли два любые прямоугольника, два ромба, два квадрата?

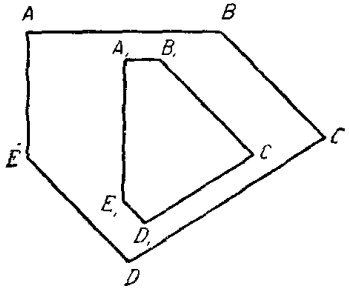


Рис. 201

$\angle A=\angle A_1$,
$\angle C=\angle C_1$
$\angle E=\angle E_1$
$\angle B=\angle B_1$,
$\angle D=\angle D_1$.

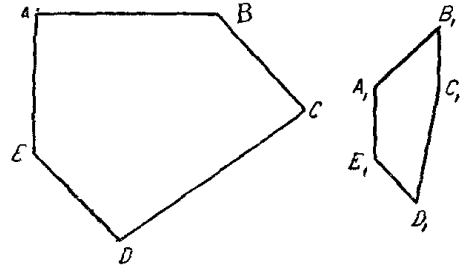


Рис. 202

1) $\angle A\neq\angle A_1$,
$\angle B\neq\angle B_1$,
$\angle C\neq\angle C_1$,
$\angle D\neq\angle D_1$,
$\angle E\neq\angle E_1$.

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=\frac{1}{2}$.

Определение подобных треугольников можно начать с простейшего случая построения треугольника, подобного данному. Для этого достаточно начертить треугольник любого вида и провести в нем среднюю линию. Учащиеся не только по внешнему виду усмотрят подобие двух треугольников, но и легко приведут логическое обоснование этого факта. После этого естественно перейти к пересечению двух сторон данного треугольника любой прямой, параллельной третьей его стороне, что приведет к формулировке так называемой леммы о подобии[1]. Если предварительно рассматривалась теорема о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла, то единственным затруднением при доказательстве леммы может быть проведение дополнительного построения. Можно облегчить доказательство, если предварительно предложить задачу на готовом чертеже (рис. 203).

Задача.

Дано: В $\triangle ABC$ $MN \parallel AC$; $NP \parallel BA$

Доказать: $\frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN}$.

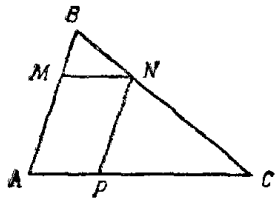


Рис. 203

При доказательстве теоремы желательно рассмотреть и второй вариант дополнительного построения (провести $MQ \parallel BC$).

Чтобы перейти к признакам подобия треугольников, необходимо предварительно напомнить, что для установления равенства двух треугольников мы пользуемся признаками равенства, повторить признаки равенства. Каждый признак дает условие, достаточное, чтобы два треугольника были *равными*. Теперь мы хотим выяснить, какие условия являются достаточными, чтобы два треугольника были *подобны*, то есть устанавливаем признаки подобия треугольников.

Доказательство признаков подобия не вызывает затруднений. Важно, чтобы ученики усвоили, что в каждом случае целью дополнительного построения является получение третьего треугольника, который был бы подобен одному из данных треугольников и равен другому; что для построения этого третьего треугольника используется лемма о подобии, а затем подбирается соответственный признак равенства треугольников.

После доказательства признаков подобия треугольников следует выписать схематически данные каждого признака подобия и соответственного признака равенства треугольников,

[1] Можно рассмотреть и пересечение продолжения двух сторон.

выяснить, что в каждом случае в условии теоремы, устанавливающей признак равенства, имеется на одно данное больше, чем в соответственном признаке подобия. Учащимся иногда кажется, что в признаке равенства треугольников по трем сторонам и в соответственном признаке подобия число данных в условии теоремы одинаково. Следует разъяснить, что хотя по условию теоремы о подобии можно написать три пропорции, третья пропорция вытекает из двух других, то есть мы имеем два независимых данных. Надо также обратить внимание учеников на то, что коэффициент подобия может быть любым положительным числом[1]. Если коэффициент подобия равен единице, то мы имеем равенство треугольников, то есть равенство есть частный случай подобия.

Число рассматриваемых признаков подобия треугольников зависит от того, сколько было установлено признаков равенства[2]. Если учащиеся знают признак равенства по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них, то следует рассмотреть и соответственный признак подобия. Тогда все признаки подобия прямоугольных треугольников явятся следствиями общих признаков подобия. Если дается только три признака подобия, то теорему о подобии прямоугольных треугольников, если катет и гипотенуза одного пропорциональны катету и гипотенузе другого, можно дать в виде задачи на доказательство. Эта задача является полезной самостоятельной работой, так как способ доказательства аналогичен применяемому при доказательстве всех признаков подобия.

В числе упражнений должно быть доказано, что в подобных треугольниках сходственные высоты пропорциональны сходственным сторонам. На этой теореме основывается доказательство теоремы об отношении площадей подобных треугольников[3]. Необходимо научить учащихся устанавливать подобие двух треугольников и выбирать их сходственные стороны при любом расположении треугольников на чертеже. Например, предложить следующую задачу (рис. 204).

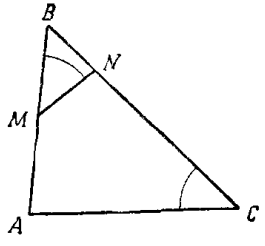


Рис. 204

Дано: $AB=15$ *см*,
$BC=21$ *см*,
$AC=18$ *см*,
$AM=8$ *см*,
$\angle BMN=\angle ACB$.

Определить длину сторон $\triangle MBN$[4].

[1] Понятие об отрицательном коэффициенте подобия, который иногда вводится в связи с преобразованием гомотетии, в VIII классе не рассматривается См. [262], § 62.

[2] См. § 17.

[3] См [260], № 801

[4] См. [260], № 793.

Полезным заданием является также следующее: по чертежу (рис. 205) выписать все пары подобных треугольников и записать пропорциональность сторон каждой пары. Решение задачи можно использовать для установления метрических зависимостей в прямоугольном треугольнике, очень нужных для решения многих задач.

В $\triangle ABC$

$\angle ABC = 90°$,

$BD \perp AC$.

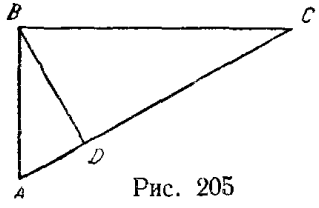


Рис. 205

Надо обратить внимание и на распространенные ошибки учащихся. Так, например, иногда говорят: «Сторона AB пропорциональна стороне A_1B_1» (аналогично об отрезках). Учащиеся должны понимать, что о пропорциональности отрезков можно говорить, имея по крайней мере две пары отрезков.

При решении задач, в которых требуется установить, подобны ли два треугольника по заданным длинам их сторон, ученики иногда механически находят отношения сторон, рассматривая каждую пару в том порядке, в каком записаны их длины. Например, если в условии записано, что длины сторон одного треугольника равны 16 *см*, 20 *см* и 8 *см*, а длины сторон другого треугольника — 4 *м*, 2 *м* и 5 *м*, ученик утверждает, что треугольники не подобны. Если бы задача решалась сознательно, то следовало находить отношение большей стороны одного треугольника к большей стороне другого и т. д.

Основное число задач должно быть отведено практическим применениям подобия треугольников. В учебнике П. Н. Никитина рассмотрено устройство пропорционального циркуля, поперечного масштаба. Как было сказано, каждый ученик должен самостоятельно выполнять построения с помощью этих приборов. Проведение работ на местности должно показать, что знание подобия треугольников дает возможность выполнить эти работы проще и точнее, чем с помощью равенства треугольников [1].

Переходя к подобию многоугольников, лучше всего начать с простейшего способа построения многоугольника, подобного данному. Если *определение подобных многоугольников* не было дано в начале темы, то, имея уже определение подобных треугольников, можно предложить построить многоугольник, углы которого были бы соответственно равны углам данного многоугольника, а стороны, заключенные между равными углами, пропорциональны.

[1] См. § 10.

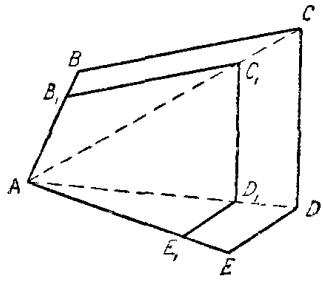


Рис. 206

Если определение уже дано раньше, то, повторив его, переходят к построению. Можно задать любой выпуклый многоугольник (например, пятиугольник) и построить подобный ему многоугольник при заданном коэффициенте подобия (например, $k=\frac{3}{4}$). Выбрав одну из вершин (например, A, рис. 206), проводим из нее все диагонали и разбиваем многоугольник на треугольники. Отложим на стороне (например, AB), исходящей из этой вершины, отрезок AB_1, равный $\frac{3}{4}$ AB ... Продолжение построения может быть проведено двумя способами: 1) из точки B_1 проводим $B_1C_1 \| BC$, затем из точки $C_1 - C_1D_1 \| CD$ и т. д. (рис. 206), в результате получается многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$; остается доказать, что он подобен данному многоугольнику[1]; 2) пользуясь данным коэффициентом подобия, от вершины A откладываются отрезки так, чтобы $\frac{AC_1}{AC}=\frac{AD_1}{AD}=\frac{AE_1}{AE}=\frac{3}{4}$, и, последовательно соединив их крайние точки, получают многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$. И в первом и во втором построениях для доказательства, что полученный многоугольник подобен данному, используется подобие образовавшихся треугольников. Первый способ аналогичен способу, которым строили треугольник, подобный данному; второй способ удобнее для практического выполнения, так как все построение может быть проведено с использованием пропорционального циркуля. Значение второго способа еще в том, что он подготовляет к съемке плана многоугольного участка с помощью мензулы.

Решение задачи показывает частный случай разбиения двух подобных многоугольников на подобные треугольники; после рассмотрения полученного на чертеже разбиения можно перейти к доказательству теоремы, которая понадобится в дальнейшем для установления отношения площадей подобных многоугольников[2].

При съемке плана местности при помощи мензулы чаще применяется так называемый полярный способ[3].

Поэтому целесообразно рассмотреть другой прием построения многоугольника, подобного данному, при котором многоугольник разбивается на треугольники путем проведения из какой-либо точки внутри многоугольника лучей, соединяющих эту точку со всеми вершинами. Если задать коэффициент

[1] Этот способ дан в кн. [248], § 169; [258], § 93.
[2] См. [258], § 90.
[3] См. [258], § 93.

подобия, то построение на лучах точек, являющихся вершинами нового многоугольника, может быть выполнено при помощи пропорционального циркуля (рис. 207).

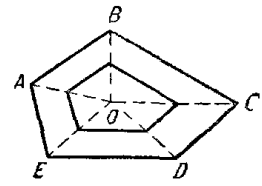


Рис. 207

Согласно программе в VIII классе не дается понятие о гомотетии или подобном расположении фигур; однако следует выяснить особенность в расположении двух подобных многоугольников, которые получились в результате рассмотренных нами построений. В обоих случаях все прямые, проведенные через вершины соответственно равных углов, пересекаются в одной точке (центре подобия); в первом случае эта точка есть общая вершина обоих многоугольников, во втором случае эта точка расположена внутри обоих многоугольников. Эти сведения необходимы для сознательного решения задач на построение, при котором фактически пользуются методом подобия [1].

Мы рассмотрели наиболее простой пример — построение многоугольника, подобного выпуклому многоугольнику. Следует рассмотреть и пример подобия многоугольников невыпуклых, так как они будут встречаться на практике. Надо также выполнить построение многоугольника, подобного данному, при коэффициенте подобия, большем единицы. При этом можно снова напомнить о том, каковы два подобных многоугольника, если коэффициент подобия равен единице.

Одним из основных применений подобия многоугольников является съемка плана местности. Мы уже указали на те построения, которые ученики должны выполнить в классе перед проведением мензульной съемки. Они должны также самостоятельно выполнить построение многоугольника, подобного данному, пользуясь транспортиром. Это подготовит их к проведению съемки плана с помощью астролябии, в частности способом обхода.

Этот раздел дает большой материал для внеклассных занятий с учениками. Учащимся, интересующимся математикой, можно дать *понятие о подобном преобразовании,* рассмотреть его выполнение при различном расположении центра подобия. В завершение может быть рассмотрено построение фигуры, подобной непрямолинейной фигуре, а также объяснено устройство и применение пантографа. Изготовление модели пантографа может быть выполнено членами кружка [2].

Доказательство теоремы об отношении периметров подобных многоугольников вполне может быть дано в общем виде; при этом можно и не рассматривать предварительно свойства ряда равных отношений. Если введено понятие о коэффициенте

[1] См. § 14.
[2] См. [248], § 180; [227], § 203.

подобия, то, выразив с его помощью предыдущий член каждого отношения через последующий, ученики легко докажут требуемую зависимость.

Если обозначить стороны одного многоугольника буквами a, b, c, ..., l, стороны подобного ему многоугольника соответственно a_1, b_1, c_1, ..., l_1 и коэффициент подобия k, то имеем: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\ldots=\frac{l}{l_1}=k$, откуда $a=a_1k$; $b=b_1k$ и т. д.

Получаем:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{a+b+c+\cdots+l}{a_1+b_1+c_1+\cdots+l_1}=\frac{a_1k+b_1k+c_1k+\cdots+l_1k}{a_1+b_1+c_1+\cdots+l_1}=$$

$$=\frac{k(a_1+b_1+c_1+\cdots+l_1)}{a_1+b_1+c_1+\cdots+l_1}=k.$$

Конечно, можно опираться и на свойство ряда равных отношений, предварительно доказав его в общем виде тем же способом.

Если раньше было доказано, что в подобных треугольниках сходственные высоты пропорциональны сходственным сторонам, то теорема об отношении площадей подобных треугольников не может вызвать затруднений. Полезно обратить внимание и на то, что отношение площадей подобных треугольников (и многоугольников) равно квадрату коэффициента подобия. Учащиеся при решении задач, в частности при построении диаграмм, вычислении площади земельного участка по плану, часто допускают ошибки, считая, что если каждая сторона многоугольника увеличена в несколько раз, то и площадь его увеличилась во столько же раз (такие же ошибки делаются и при сравнении объемов тел). Поэтому еще в младших классах следует давать ученикам конкретные чертежи для сравнения площадей квадратов, прямоугольников [1].

В VIII классе тоже недостаточно дать доказательство теоремы об отношении площадей подобных многоугольников, необходимо решение практических задач [2].

§ 23. Тригонометрические функции острого угла и решение прямоугольных треугольников

Тема «Тригонометрические функции острого угла» в VIII классе является первым концентром изучения тригонометрии в средней школе. Изучение тригонометрических функций, связанное со свойствами прямоугольного треугольника,

---

[1] См. § 5, рис 1 и § 25, рис. 232 (*а*, *б*).

[2] См. [260], № 856, 857, 863.

осмысливается учениками более свободно, чем тогда, когда изучение этих функций оторвано от свойств треугольника. Переход от определения функций как отношений сторон в прямоугольном треугольнике к определениям более общим, во втором концентре изучения тригонометрии в старших классах вполне оправдывается с точки зрения психологической как переход от более конкретного к более абстрактному.

Изучение тригонометрических функций сначала только острого угла и применение их к решению практических задач педагогически обосновано тем, что ученикам становится ясным, для чего изучаются новые функции и значение нового математического аппарата, который они осваивают в данной теме. Изучение тригонометрии в два концентра было впервые предложено еще в 1851 г. академиком М. В. Остроградским, в советской школе оно стало общепринятым.

Программой VIII класса предусмотрено изучение тригонометрических функций сразу же после изучения темы «Подобие фигур».

Используя уже известную теорему Пифагора, выясняем возможность при некоторых данных вычислить линейные элементы треугольника, однако становится ясным, что полное решение треугольников остается невозможным, так как геометрический аппарат оказывается для этого недостаточным: он не дает возможности определить численные зависимости между сторонами и углами треугольника. Первоначальное понятие о функции дано уже в VII классе, и потому ученики VIII класса на уроках по теме «Тригонометрические функции» довольно легко понимают, что отношения сторон прямоугольного треугольника являются функциями углов треугольника.

Важно показать, что если из произвольных точек, взятых на одной (любой) стороне острого угла, опустить перпендикуляры на другую сторону угла, то в каждом из полученных треугольников: а) отношение катета, лежащего против вершины данного угла, к гипотенузе есть величина постоянная для данного угла; она не зависит от длины сторон треугольника; б) при изменении величины угла указанное отношение изменяется, то есть зависит от величины угла.

Угол, а также отношение катета к гипотенузе — величины переменные, но каждому произвольно заданному углу соответствует вполне определенное и только одно значение отношения взятых сторон.

Таким образом закрепляется понятие о функции с точки зрения взаимного соответствия значений двух переменных.

Установив, что для каждого угла можно рассмотреть шесть различных отношений между сторонами прямоугольного треугольника, надо сразу же подчеркнуть, что эти отношения выражаются отвлеченными числами. Хотя программа предусматри-

вает изучение в VIII классе только трех функций: синуса, косинуса и тангенса, желательно познакомить учеников и с котангенсом. Необходимо уточнить написание символов-обозначений: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$. Иногда учащиеся по разным причинам произвольно искажают написание этих символов. Этого нельзя допускать, и надо им разъяснить, что обозначения функций приняты одинаковыми во всех странах и у нас в СССР установлены как ГОСТ.

Программы не предусматривают введения в VIII классе понятия о дополнительном угле и функциях его; однако, принимая во внимание, что знание этого материала в некоторых случаях упрощает вычисления, целесообразно после того, как введено понятие о тригонометрических функциях, установить понятие о дополнительном угле. Ученики знают, что сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°.

Установленные функции можно рассматривать по отношению к каждому из острых углов треугольника, и тогда получаем (рис. 208):

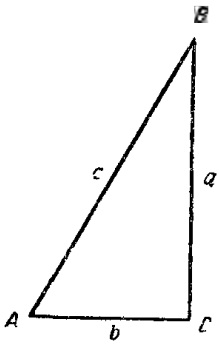


Рис. 208

$\frac{a}{c}=\sin A$, но $\frac{a}{c}=\cos B$, отсюда $\sin A=\cos B$,

или $\sin A=\cos(90°-A)$.

$\frac{b}{c}=\cos A$, но $\frac{b}{c}=\sin B$, отсюда $\cos A=\sin B$,

или $\cos A=\sin(90°-A)$.

$\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A$, но $\frac{a}{b}=\operatorname{ctg} B$, отсюда $\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B$,

или $\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}(90°-A)$.

$\frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A$, но $\frac{b}{a}=\operatorname{tg} B$, отсюда $\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg} B$,

или $\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg}(90°-A)$.

Все эти соотношения восьмиклассники устанавливают самостоятельно без каких-либо затруднений; учителю остается обобщить эти выводы.

Два угла, составляющие в сумме 90°, называются взаимно дополнительными; две тригонометрические функции, отличающиеся начальным слогом «ко» называются взаимно дополнительными (но не обратными) функциями или кофункциями.

Рассмотренные соотношения приводят к следующему выводу: функция данного угла равна кофункции дополнительного угла. Так как углы в 15° и 75° взаимно дополнительные, то $\sin 15°=\cos 75°$, $\cos 15°=\sin 75°$ и т. д.

После введения понятия тригонометрической функции возникают две задачи: вычисление значений функций заданного

острого угла и построение угла по заданному значению какой-либо функции его.

Допустим, дан угол и надо вычислить значения тригонометрических функций этого угла. Для решения этой задачи опустим из любой точки одной из сторон угла перпендикуляр на другую сторону; получим прямоугольный треугольник. Измерив с возможной точностью стороны полученного треугольника, получаем ряд нужных отношений, выражающих значения соответствующих функций заданного угла.

Такого рода лабораторную работу должны провести учащиеся самостоятельно. Работу можно организовать так: учитель разъясняет ученикам предстоящую работу и дает домашнее задание: 1) на форматках миллиметровой бумаги размером $1{,}2 \times 1{,}2$ *дм*^{2} заготовить чертежи четверти круга с радиусом в 100 *мм* (или 20 клеток), 2) с помощью транспортира разделить дугу на 9 равных частей (через 10°), в точках деления отметить число градусов дуги, 3) соединить точки деления с центром дуги и спроектировать эти точки на горизонтальный радиус. Следует предупредить учащихся о том, что результат работы будет тем лучше, чем аккуратнее будут выполнены чертежи; выполнять чертежи надо хорошо очиненным карандашом и хорошими инструментами (транспортир, угольник или линейка).

На уроке учитель указывает, что на чертежах ученики получили прямоугольные треугольники с острыми углами в 10°, 20°, 30°, ..., 80°; противоположные этим углам катеты удобно обозначить буквами a_1, a_2, ..., a_8, а прилежащие катеты соответственно буквами b_1, b_2, ..., b_8 (рис. 209).

Необходимо объяснить учащимся, что длина радиуса в 100 *мм* взята для удобства подсчетов. Затем ученикам предлагается произвести возможно точнее с помощью миллиметровой линейки измерения сторон и вычислить значения всех тригонометрических функций: для углов в 10° и 20° — одной группе, для углов в 30° и 40° — другой, 50° и 60° — третьей группе и 70° и 80° — четвертой. За работой следует наблюдать, исправлять ошибки и недочеты, следить за аккуратностью выполнения работы, результаты каждого можно и оценить.

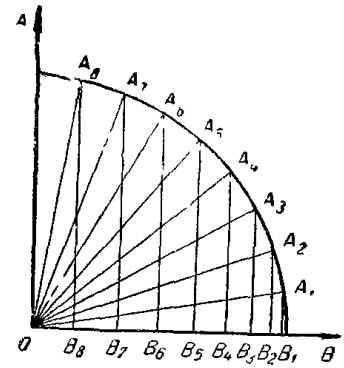


Рис. 209

Полученные результаты следует сопоставить, выбрать из них наиболее точные, близкие к табличным; надо указать и на расхождения результатов в виду ошибок при построениях, измерениях и вычислениях.

Рассмотренное свойство дополни-

тельных углов поможет проверить правильность вычислений, это же свойство будет служить объяснением при ознакомлении со структурой сводной таблицы, которую целесообразно составить сразу, так же как составлены таблицы натуральных значений тригонометрических функций в справочнике Брадиса.

Таблица 3

α	$\sin\alpha$	
10°	0,174	80°
20°	0,342	70°
30°	0,500	60°
40°	0,643	50°
50°	0,766	40°
60°	0,866	30°
70°	0,940	20°
80°	0,985	10°
	$\cos\alpha$	α

Таблица 4

α	$\operatorname{tg}\alpha$	
10°	0,176	80°
20°	0,364	70°
30°	0,577	60°
40°	0,839	50°
50°	1,192	40°
60°	1,732	30°
70°	2,747	20°
80°	5,671	10°
	$\operatorname{ctg}\alpha$	α

Таким образом будут составлены учащимися таблицы значений функций для углов, кроме 0° и 90°. Из таблицы видно, что синус с ростом угла увеличивается и приближается к 1, косинус — уменьшается и приближается к нулю, тангенс быстро увеличивается, котангенс — уменьшается. Эти изменения функций для острых углов полезно иллюстрировать и на чертеже.

Заключительную беседу учитель строит так, чтобы ученики сделали вывод, что, разделив дугу на 18 равных частей, можно получить значения функций для углов через каждые 5°, а при большем числе частей дуги — и для меньших углов. Значения функций для углов в 0° и 90° в VIII классе давать не следует [1].

На основании принятых определений тригонометрических функций решается и вторая, обратная, задача: построение угла по заданному значению его функции.

Построение угла по заданному значению синуса или косинуса сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе (точнее, по отношению их), построение угла по тангенсу сводится к построению треугольника по отношению катетов.

При ознакомлении учеников с таблицами натуральных значений тригонометрических функций (лучше, когда использу-

[1] Рассматриваются углы прямоугольного треугольника.

ются для этого сразу же таблицы Брадиса), следует еще раз остановиться на постоянстве значений их для каждого угла и отметить, что значения функций для таблиц вычислены иными способами, чем это делали учащиеся. Отыскание значений функций для углов, отличающихся целым числом градусов, а затем на 6′, не вызывает у учащихся затруднений. Не вызывает затруднений и обратная операция, когда заданное значение функции совпадает с помещенным в таблицах, то есть когда не приходится пользоваться поправками. Пользование поправками вызывает у восьмиклассников затруднения, требует много времени, практически же поправки могут понадобиться весьма редко. Поэтому в VIII классе можно поправки не изучать, сославшись на то, что углы с точностью, большей чем до 6′, рассматривать не будем.

Решение прямоугольных треугольников.

При изучении темы «Решение прямоугольных треугольников» прежде всего необходимо показать, что из определений тригонометрических функций вытекает ряд формул:

$$\sin A=\frac{a}{c}\begin{cases}a=c\sin A,\\ c=\dfrac{a}{\sin A},\end{cases}\qquad \cos A=\frac{b}{c}\begin{cases}b=c\cos A,\\ c=\dfrac{b}{\cos A},\end{cases}$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}\begin{cases}a=b\operatorname{tg} A,\\ b=\dfrac{a}{\operatorname{tg} A},\end{cases}\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}\begin{cases}b=a\operatorname{ctg} A,\\ a=\dfrac{b}{\operatorname{ctg} A}.\end{cases}$$

Эти равенства позволяют вычислить все основные элементы прямоугольного треугольника по двум заданным элементам, из которых хотя бы один элемент линейный. Все возможные задачи сводятся к четырем основным: а) даны гипотенуза и катет, б) даны гипотенуза и острый угол, в) даны катет и острый угол, г) даны два катета. Значительная часть задач должна носить практический характер, чем подчеркивается связь теории с жизнью.

Приводим ряд таких задач.

Задачи на определение угла.

1. Высота ступеньки лестницы равна 173 *мм*, а ширина ее равна 277 *мм*. Найти угол наклона лестницы к плоскости пола.

2. Дорога на протяжении 186 *км* имеет подъем в 18 *м*. Найти угол наклона пути.

Задачи на определение длины отрезка.

А. Дано: катет и острый угол.

1. Башня высотой в 16 *м* на берегу реки видна с другого берега под углом в 16°. Определить ширину реки.

2. Вагонетка с грузом весит 300 *кг*. Какой силой можно удержать вагонетку на наклонной плоскости, если плоскость наклонена к горизонту под углом в 17°?

В этой задаче скатывающая сила равна удерживающей.

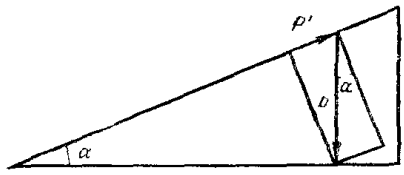


Рис. 210

Решение: $P_1 = P \sin \alpha$; $P_1 = 300 \cdot \sin 17° = 300 \cdot 0{,}292 \approx 87{,}600$ (*кГ*).

Б. Дано: гипотенуза и острый угол.

3. Двускатная крыша наклонена к горизонтальной линии под углом в 35°. Длина стропильной ноги кровли AB равна 2,8 *м*. Найти пролет кровли AC и ее высоту BO.

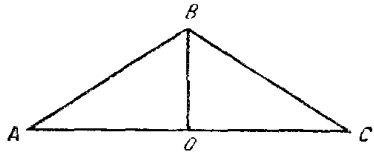


Рис. 211

4. К вертикальной стене приставлена пожарная лестница длиной в 14 *м*. Нижний край лестницы отстоит от стены на 5 *м*. Найти угол наклона лестницы к земле.

5. Мачта укреплена тросами длиною 46 *м*, прикрепленными на высоте 26 *м*. Под каким углом к земле натянуты тросы?

При решении задач геометрического характера с помощью тригонометрии полезно использовать и графический метод. Предварительное графическое решение задачи позволяет ученикам при помощи чертежа представить реальные величины искомых элементов фигуры и воспользоваться ими для контроля аналитического решения.

Графическое решение задач по геометрии имеет и самостоятельное значение как особый метод, который при достаточно аккуратном выполнении чертежа и измерений часто позволяет сравнительно быстро и с достаточной точностью определить искомые величины.

Например, решить треугольник, если дано: $AC = 62$ *мм*, $A = 34°$, $BK = 23$ *мм*.

Графическое решение состоит в том, что строится треугольник по заданным отрезкам и углу, затем измеряются искомые элементы треугольника. Построение и непосредственные измерения приводят в заданной задаче к следующим результатам: $AB=42$ *мм*, $BC=34$ *мм*, $C=41°$.

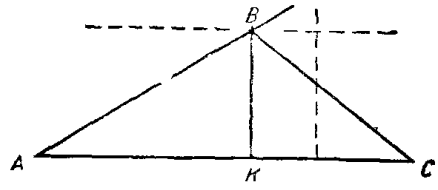


Рис. 212

Аналитическое решение с помощью тригонометрии приводит приблизительно к таким же результатам.

$$AB=\frac{BK}{\sin A}=\frac{23}{0{,}56}\approx 41;\quad \frac{BK}{AK}=\operatorname{tg} A;\quad AK=\frac{23}{\operatorname{tg} 34°}=\frac{23}{0{,}674}\approx 34{,}1;$$

$$KC=AC-AK=62-34{,}1\approx 27{,}9;\quad \operatorname{tg} C=\frac{BK}{KC}=\frac{23}{27{,}9}\approx 0{,}82,$$

$$C=39°30';$$

$$BC=\frac{BK}{\sin C}=\frac{23}{0{,}64}\approx 36.$$

Для проверки правильности вычислений полезно воспользоваться теоремой Пифагора:

$$23^2+34{,}1^2\approx 1700\approx 42^2.$$

Весьма полезно, если ученики самостоятельно вычислят значения трех функций для углов в 30°, 45° и 60° (эти вычисления могут служить материалом и для домашнего задания).

Известно, что в прямоугольном треугольнике с углом $A=30°$ $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$, но $\frac{a}{c}=\sin A$, следовательно, $\sin 30°=\frac{1}{2}$. Знаем, что $\sin 30°=\cos 60°$, следовательно, $\cos 60°=\frac{1}{2}$.

Для вычисления $\cos 30°=\sin 60°$ надо определить b, пользуясь теоремой Пифагора $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$; тогда $\cos 30°=\frac{b}{c}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, но $\cos 30°=\sin 60°$, значит $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для вычисления $\operatorname{tg} 30°$ имеем: $\operatorname{tg} 30°=\frac{a}{b}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, но $\operatorname{tg} 30°=\operatorname{ctg} 60°$, значит $\operatorname{ctg} 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Для вычисления $\operatorname{tg} 60°$ имеем: $\operatorname{tg} 60°=\frac{b}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$. $\operatorname{tg} 60°=\operatorname{ctg} 30°$, значит $\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}$.

Рассматривая равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с углом $C=90°$, имеем: $c=a\sqrt{2}$; $\sin 45°=\cos 45°=\frac{a}{c}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, из равенства катетов в этом случае следует, что $\operatorname{tg} 45°=\operatorname{ctg} 45°=1$. Таблицу с этими данными учащиеся должны иметь в своих тетрадях и постепенно запомнить.

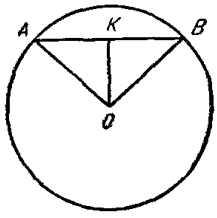


Рис. 213

Полученных знаний у восьмиклассников достаточно для того, чтобы использовать тригонометрию не только для решения задач, но и для теоретических выводов в дальнейшем курсе геометрии. Полезно в последних темах по геометрии использовать тригонометрию для вывода общих выражений сторон, апофем, площадей правильных многоугольников при заданном радиусе описанного круга.

Так, полагая хорду AB равной стороне правильного n-угольника, находим из треугольника AOK выражение для нее $a_n=2R\sin\frac{360°}{2n}=2R\sin\frac{180°}{n}$; из того же треугольника находим общее выражение для апофемы OK; $OK=R\cos\frac{180°}{n}$; обозначим OK через h_n, тогда площадь правильного многоугольника с числом сторон n будет

$$S_n=\frac{a_n h_n\cdot n}{2}=\frac{2R\left(\sin\frac{180°}{n}\cdot R\cos\frac{180°}{n}\right)n}{2}=R^2\left(\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}\right)n.$$

Эти общие выражения позволяют выразить через радиус элементы правильного треугольника, квадрата, шестиугольника и др. Во внеклассной работе полезно установить значения тригонометрических функций и для углов в 0° и 90°.

Для этого сначала надо принять, что в случае когда гипотенуза OA (подвижный радиус) совпадет с начальным положением радиуса (с горизонтальной осью), то угол между подвижным радиусом и неподвижным считается равным 0°.

Рассматривая величину синуса угла в 0°, легко установить, что в этом случае длина противоположного катета становится равной 0 и потому $\sin 0°=\frac{0}{AO}=0$; в случае же, когда угол равен 90°, этот катет совпадет с подвижным радиусом (вертикальной осью) и отношение их станет равным 1, то есть $\sin 90°=1$.

Для угла, равного 0°, прилежащий катет OB совпадет с подвижным радиусом (с его начальным положением или с го-

ризонтальной осью) и отношение их станет равным 1, то есть cos 0°=1; для угла, равного 90°, длина прилежащего катета станет равной 0 и потому cos 90°=0.

Рассматривая изменение тангенса, ученики замечают, что при увеличении угла от 0° до 90° противолежащий катет растет, а прилежащий уменьшается; по этим причинам отношение катетов быстро растет и может стать сколь угодно большим числом, но для угла 90° прилежащий катет станет равным 0, отношение выразится дробью со знаменателем, равным нулю, что не имеет смысла; потому считается, что тангенса угла 90° не существует.

Подобное рассуждение приводит к тому, что котангенс для угла в 90° равен 0, а для угла 0° не существует.

В связи с этими рассуждениями можно сформулировать общий вывод:

1) При изменении угла от 0° до 90° синус угла увеличивается от нуля до единицы.

2) При увеличении угла от 0° до 90° косинус угла уменьшается от единицы до нуля. Значения синуса и косинуса не могут быть больше единицы.

3) При увеличении угла от 0° до 90° тангенс угла увеличивается от 0 неограниченно.

4) При увеличении угла от 0° до 90° котангенс угла уменьшается до нуля.

Пользуясь приобретенными знаниями по тригонометрии, восьмиклассники в конце учебного года (весной) могут выполнить ряд измерительных работ на местности (см. § 10).

§ 24. Элементарные сведения по стереометрии

Элементарные сведения по стереометрии даются в VII классе в теме «Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы» и в VIII классе в темах: «Тригонометрические функции острого угла» и «Вычисления площадей и объемов геометрических тел».

Основным содержанием стереометрического материала является вычисление площадей поверхностей и объемов геометрических тел. Но усвоение его не может быть успешным без предварительной подготовки. Следует прежде рассмотреть основные свойства геометрических тел и взаимное расположение прямых и плоскостей.

Указанный материал является не только вспомогательным, подготавливающим учащихся к усвоению раздела о вычислении площадей поверхностей и объемов геометрических тел. Он имеет и самостоятельное значение. Одной из целей обучения геометрии в восьмилетней школе является развитие пространственных представлений и пространственного воображения

учеников. Изучение основных взаимных положений прямых и плоскостей и свойств геометрических тел помогает ученикам расширить область пространственных представлений. Это приближает курс геометрии к практической жизни, так как предметы окружающего мира трехмерны.

Слабое развитие пространственного воображения учащихся затрудняет усвоение ими элементов стереометрии. Кроме того, стереометрический материал, включенный в программу восьмилетней школы, не представляет собой логически связанной системы знаний. Усвоение, особенно запоминание, такого материала тоже затрудняет учащихся. Поэтому изучению его нужно уделить достаточно места и внимания.

Как указывалось выше[1], основным методом изучения элементов стереометрии является индуктивно-опытный метод. Изложение осуществляется преимущественно в форме беседы, в процессе которой учитель ставит перед учениками вопросы, посильные задания, побуждающие их к целенаправленному наблюдению и воспитывающие умение делать из этих наблюдений правильные выводы. Ученики наблюдают не только рассматривая готовые наглядные пособия, но и тогда, когда сами конструируют модели, делают развертки и чертежи геометрических тел.

Первые представления о трехмерных объектах создаются у школьников в процессе рассмотрения различных предметов, их окружающих, и специальных моделей геометрических тел. Но эти представления недостаточны для развития пространственного воображения учащихся. Следует приучать школьников отвлекаться от конкретных тел и систематически формировать в их сознании представления о взаимных положениях прямых и плоскостей вообще.

В этой работе большую роль играет продуманная система необходимых наглядных пособий. Каждый новый образ следует вначале наблюдать на хорошо знакомых учащимся объектах: на моделях известных им тел, на предметах окружающей обстановки, затем на объектах, новых для учащихся — на моделях различных многогранников и, наконец, на чертежах. В заключение желательно показать данное взаимное положение прямых и плоскостей на пластинках и палочках — на моделях прямых и плоскостей, отвлеченных от конкретных тел. Имеет значение и характер конструкции моделей. Взаимные положения двух ребер многогранника целесообразно рассмотреть сначала на каркасных моделях, а потом на сплошных. Взаимные положения двух граней нагляднее представляются сплошными моделями. В этом случае сплошные модели должны предшествовать каркасным.

---

[1] Ч. IV, § 3.

Большинству изучаемых понятий можно дать определение. Если признаки некоторой группы объектов будут усвоены хорошо, то определение только облегчит их запоминание. Усвоение определений не должно затруднить учащихся, навыки формулирования определений у них есть. Кроме того, многие определения аналогичны изученным в планиметрии (сравните, например, определение параллельных прямых и параллельных плоскостей). Там, где это возможно, следует давать общепринятые определения понятий, чтобы в дальнейшем не изменять их. В тех случаях, когда на основе имеющихся у учащихся знаний определение формулировать трудно, можно ограничиться описанием.

Названия некоторых взаимных положений прямых и плоскостей знакомы учащимся из жизненной практики или быстро угадываются *по аналогии* с соответствующими планиметрическими образами (параллельные плоскости, перпендикулярные плоскости), поэтому можно вводить новые термины до их определения. Это облегчит изложение.

К изучению стереометрического материала нужно готовить учащихся еще в курсе *планиметрии*. Во всех случаях, где это возможно, надо не ограничиваться рассмотрением планимегрических образов, а допускать «выход в пространство». Выше указывалось [1], что при изучении определения параллельных прямых следует дать наглядный образ скрещивающихся прямых. Можно и при решении задач на нахождение множества точек: 1) удаленных от данной точки на данное расстояние, 2) удаленных от данной прямой на данное расстояние — предложить отыскать соответствующие образы в пространстве и т. п.[2]. Наряду с этим при изучении стереометрического материала полезно сопоставлять рассматриваемые пространственные объекты и соответствующие им плоские фигуры. Так, например, можно предложить следующие вопросы: 1) Сколько ребер куба, перпендикулярных к его ребру AB, проходит через вершину A? 2) Сколько прямых, перпендикулярных к данной прямои, можно провести через точку на данной прямой: а) в пространстве, б) на плоскости?

Рассмотрим методику введения отдельных стереометрических понятий.

Изучение элементов стереометрии в VII классе следует начать с повторения. Пользуясь наглядными пособиями (рис. 214), надо напомнить учащимся понятия геометрического тела, поверхности, линии, точки [3], повторить, что прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, вся лежит в этой плоскости и

[1] Ч. IV, § 6, стр. 511.
[2] См. § 14, стр. 580—588.
[3] § 16

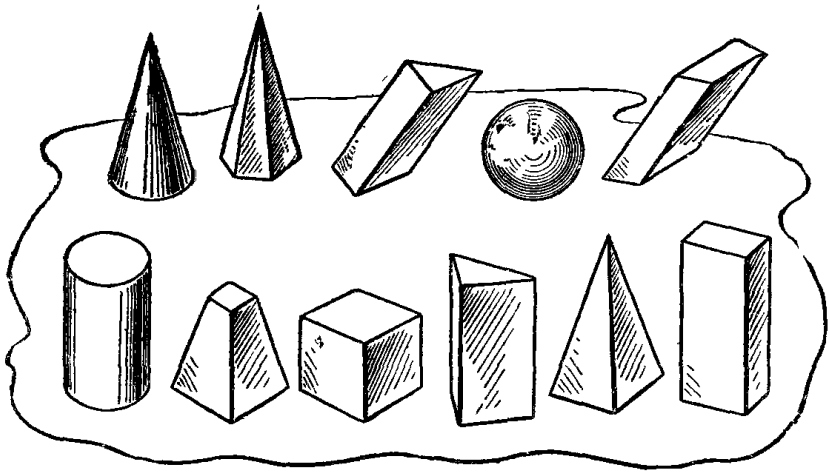


Рис. 214

основанный на этом свойстве способ проверки того, что испытуемая поверхность плоская. Следует снова рассмотреть известные уже ученикам куб, любой прямоугольный параллелепипед, их грани, ребра, вершины; выяснить на моделях, что грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники, ребра — отрезки прямых, вершины — точки; напомнить, как изображается прямоугольный параллелепипед (и в частности, куб), как начертить его развертку.

Новый материал целесообразно начать с введения понятия «многогранник». Модели различных многогранников могут быть затем использованы как объекты для наблюдения взаимных положений прямых и плоскостей.

Понятие многогранника формируется у учащихся в результате рассмотрения набора геометрических тел, среди которых имеются многогранники и круглые тела (рис. 214). Учитель предлагает выбрать из набора те геометрические тела, которые ограничены только многоугольниками. Такие тела называем *многогранниками.* Для закрепления можно предложить выбрать многогранники из другого набора геометрических тел, а также привести примеры многогранников из окружающей действительности. Надо указать, что куб и любой прямоугольный параллелепипед — виды многогранников. Полезно найти и подсчитать число граней, ребер и вершин нескольких многогранников по их моделям.

Методика изучения взаимных положений прямых и плоскостей.

Знакомство с различными взаимными положениями прямых и плоскостей можно начать с взаимных положений граней многогранников, так как пересекающиеся и параллельные плоскости ученики часто встречали в повседневной практике.

Прежде всего рассматриваются пересекающиеся грани. Наблюдая модель куба (рис. 215), учащиеся замечают, что по ребру AB пересекаются грани $ABCD$ и ABB_1A_1. Предлагается показать другие пересекающиеся грани куба и ребра, по которым они пересекаются. Обращается внимание на то, что две пересекающиеся грани всегда имеют одно и только одно общее ребро. Далее ученики находят на моделях других многогранников пары пересекающихся граней и их общие ребра. Указывается, что две противоположные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 215) не пересекаются. Учащиеся обычно сами называют эти грани параллельными. Можно предложить найти несколько пар параллельных граней других многогранников, а также у различных предметов, окружающих нас.

Далее желательно перейти к понятию взаимных положений двух плоскостей. Напомнив ученикам, что грань многогранника — многоугольник, то есть часть плоскости, прикладываем к ней пластинку значительно больших размеров (рис. 216) и таким образом создаем модель той плоскости, частью которой является данная грань. Рассматриваем эту модель отдельно. Сообщаем ученикам, что всякую плоскость, как и прямую линию, мы воображаем бесконечной.

Прикладываем пластинки к двум параллельным граням многогранника (рис. 216) и предлагаем мысленно продолжить их. Делаем вывод, что плоскости, в которых лежат эти грани, не имеют общих точек. Показываем с помощью двух параллельных пластинок две параллельные плоскости отдельно от модели многогранника. Даем определение двух параллельных плоскостей как плоскостей, не имеющих общих точек. Приводим примеры параллельных плоскостей.

Аналогично вводится понятие пересекающихся плоскостей.

Далее рассматриваем грани многогранников, не имеющие общих точек. Прикладывая пластинки к различным парам таких граней, устанавливаем, что их плоскости параллельны или пересекаются по прямой. Иллюстрацией последнего случая

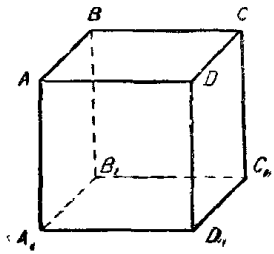


Рис. 215

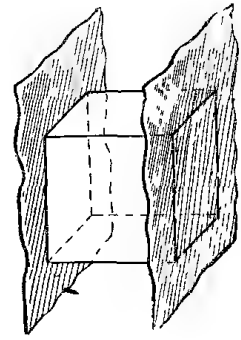


Рис. 216

могут служить две боковые грани призмы с трапецией в основании, проходящие через боковые стороны трапеции

В заключение можно сделать общий вывод о возможных взаимных положениях двух плоскостей в пространстве.

Понятие двугранного угла возникает в результате рассмотрения пересекающихся граней куба, любого прямоугольного параллелепипеда. Наблюдение двугранных углов на разнообразных объектах закрепляет это понятие и подготавливает к восприятию видов двугранных углов. Представление о прямом двугранном угле создается тоже в процессе рассмотрения моделей куба, любого прямоугольного параллелепипеда. Сопоставляя затем двугранные углы этих тел с двугранными углами прямой призмы, в основании которой косоугольный четырехугольник, замечаем, что не все двугранные углы призмы прямые. Вводится понятие тупого и острого двугранных углов. Прикладывая столярный угольник к двугранным углам данных многогранников, показываем, как проверить, являются ли двугранные углы прямыми, тупыми или острыми. Для закрепления полезно предложить такие вопросы: 1) Какого вида двугранный угол образуют: а) стена и пол комнаты, б) стена дома и прислоненная к ней лестница, в) крыша и прислоненная к ней лестница? 2) Сколько граней куба, перпендикулярных к плоскости его основания $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 215), проходит через ребро AA_1?

Полезно продемонстрировать с помощью двух пластинок модель двугранного угла (рис. 217) и виды двугранных углов. Можно предложить изготовить модели из дерева, картона и других материалов.

Взаимные положения двух прямых на плоскости известны ученикам из VI класса. Остается только рассмотреть их на конкретных пространственных фигурах и дать определение скрещивающихся прямых.

Повторив с учащимися определения двух параллельных и двух пересекающихся прямых, следует обратить внимание на то, что через пару параллельных или пересекающихся прямых можно провести плоскость, и притом только одну. Затем предлагается выяснить, каковы взаимные положения пар ребер, принадлежащих одной грани куба, любого прямоугольного параллелепипеда. Параллельность противоположных ребер одной грани обосновывается тем, что грань — прямоугольник. Полезно рассмотреть взаимные положения ребер, лежащих в одной грани, в других многогранниках. Делается вывод, что ребра, лежащие в одной грани, параллельны или пересекаются. Напомнив учащимся, что ребра — отрезки прямых, предлагаем им указать взаимные положе-

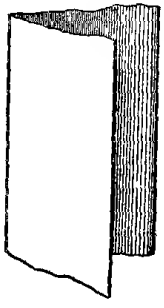


Рис. 217

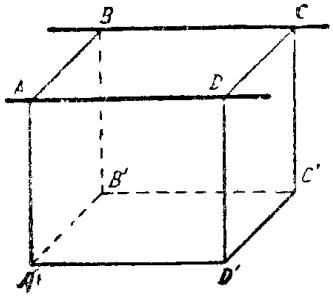


Рис. 218

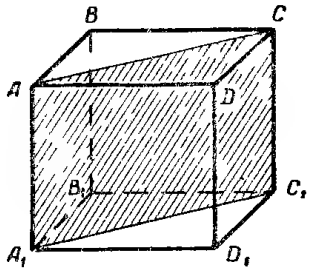


Рис. 219

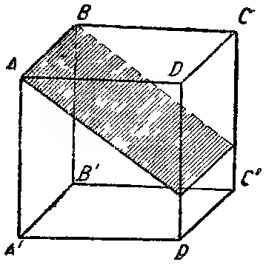


Рис. 220

ния прямых, которым принадлежат пересекающиеся или параллельные ребра многогранника. С этой целью прикладываем к соответствующим ребрам палочки значительно большей длины (рис. 218); констатируем, что две прямые в пространстве могут быть тоже параллельны или пересекаться. Создаем с помощью двух палочек модели двух параллельных, двух пересекающихся прямых. В качестве упражнения на закрепление можно предложить указать взаимные положения ребер AA' и CC' на каркасной модели куба (рис. 219). Чтобы подтвердить, что эти ребра параллельны, вкладываем в модель куба пластинку $AA'C'C$ и убеждаемся, что AA' и CC' лежат в одной плоскости. Параллельность же ребер следует из того, что противоположные стороны четырехугольника $ACC'A'$ попарно равны.

Далее предлагается выяснить взаимное положение ребер AB и DD'. Прикладывая пластинку к этим ребрам (рис. 220), устанавливаем, что через них нельзя провести плоскость (если плоскость проходит через ребро AB, то она пересекает ребро DD' или его продолжение, и наоборот), значит, эти ребра не параллельны и не пересекаются. Два ребра, через которые нельзя провести плоскость, называем *скрещивающимися*.

Определение двух скрещивающихся прямых как таких прямых, через которые нельзя провести плоскость, следует предпочесть определению их как прямых, которые не параллельны и не пересекаются. Как мы видели, этим определением удобно пользоваться на практике: когда нужно узнать, являются ли два ребра скрещивающимися, прикладываем к ним пластинку и выясняем, можно ли через них провести плоскость. Этому определению соответствует и тот образ скрещивающихся прямых, который был дан в VI классе в связи с изучением параллельных прямых [1].

---

[1] § 6, стр. 511.

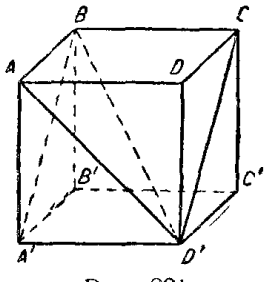


Рис. 221

После упражнений в нахождении скрещивающихся ребер различных многогранников создаем модель двух скрещивающихся прямых и вводим определение.

В заключение следует перечислить все возможные взаимные положения двух прямых в пространстве.

Для закрепления можно предложить такие вопросы: 1) Дан куб (рис. 221). Каково взаимное положение прямой $A'B$ и каждой из прямых BD', CD', AD'? 2) Лежат ли в одной плоскости: а) три попарно параллельные ребра куба, б) три ребра, проходящие через одну вершину? 3) Как расположены между собой ребра AA' и $C'D'$ куба (рис. 221), перпендикулярные к ребру $A'D'$? 4) Всегда ли параллельны два перпендикуляра к одной прямой: а) на плоскости, б) в пространстве?

Изученные взаимные положения прямых и плоскостей можно повторить в процессе рассмотрения какой-нибудь технической детали [1].

Перед введением понятия прямой, перпендикулярной к плоскости, желательно показать на моделях куба, любого прямоугольного параллелепипеда три возможных взаимных положения ребер и граней этих многогранников: ребра могут лежать в гранях, пересекать их и быть им параллельны. Наблюдение моделей других многогранников и предметов окружающей действительности позволяет сделать вывод о существовании трех взаимных положений прямой и плоскости.

Понятие перпендикуляра к плоскости следует ввести одновременно *с понятием наклонной к плоскости.* Это полезно сделать, во-первых, с целью сопоставления перпендикуляра и наклонной к плоскости, во-вторых, с целью аналогии с понятиями перпендикуляра и наклонной к прямой, изученными в планиметрии.

Вначале рассматриваем на нескольких моделях разных многогранников расположение их боковых ребер относительно плоскости основания. Обращаем внимание учащихся на то, что боковые ребра прямой и наклонной призм различно наклонены к плоскости основания. Для выяснения особенностей расположения боковых ребер проводятся наблюдения на каркасных моделях прямоугольного и наклонного параллелепипедов, в основании которых через вершину A' протянуты нити, иллюстрирующие прямые, проходящие через точку A' (рис. 222, 223). Предлагается найти углы, образуемые ребром AA_1 прямоугольного параллелепипеда, с прямыми, проходящими на плоскости

[1] См. К. П Федорова, О связи преподавания математики с производственной деятельностью учащихся, «Математика в школе», 1960, № 2.

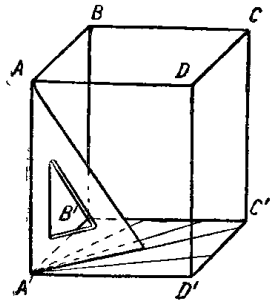


Рис. 222

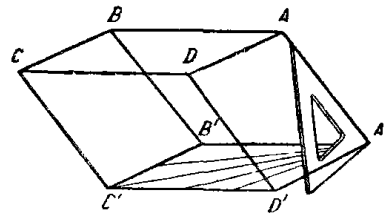


Рис. 223

грани $A'B'C'D'$ через вершину A' (рис. 222). Учащиеся отмечают перпендикулярность ребра AA' к сторонам основания и затем с помощью чертежного угольника устанавливают перпендикулярность того же ребра ко всем прямым, проведенным в плоскости грани $A'B'C'D'$ через точку A'. Так же, прикладывая угольник катетом к ребру AA' наклонного параллелепипеда (рис. 223), убеждаются, что это ребро не перпендикулярно к прямым, проходящим в плоскости грани $A'B'C'D'$ через точку A'. Называем ребро перпендикулярным к грани, если оно перпендикулярно ко всем прямым, проведенным в плоскости грани через его конец, и наклонным, если оно этим свойством не обладает. Далее создаем с помощью палочек и пластинки модели прямых, перпендикулярной и наклонной к плоскости. Перпендикулярность проверяется угольником. Следует привести из жизни примеры прямых, перпендикулярных к плоскости: столб для волейбольной сетки, установленный на спортплощадке, перпендикулярен к площадке; шнур висящей электролампы перпендикулярен к полу и потолку и др. Дается общее определение прямой, перпендикулярной к плоскости, как прямой, которая пересекает плоскость и перпендикулярна к любой прямой, проведенной в этой плоскости через точку пересечения. Прямая, пересекающая плоскость и не обладающая этим свойством, называется наклонной к плоскости. Для упрощения формулировок следует ввести термин *основание перпендикуляра* (и наклонной). Демонстрируются разные положения плоскости в пространстве и перпендикулярной к ней прямой. Полезно указать, что отвесная прямая всегда перпендикулярна к горизонтальной плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости появляется в результате решения следующего вопроса: чтобы убедиться, что некоторая прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к этой плоскости, надо ли проверять перпендикулярность ее ко многим прямым, проходящим на плоскости через ее основание? Выясняем, не достаточно ли, чтобы прямая, пересекающая плоскость, была перпендикулярна только

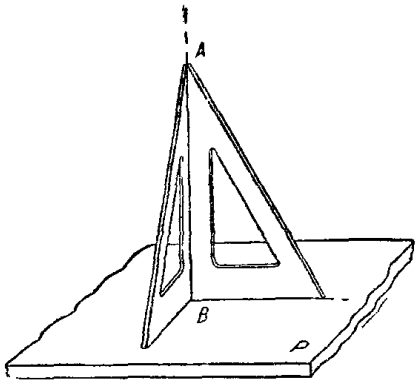


Рис. 224

к одной прямой, проведенной на этой плоскости через точку ее пересечения с плоскостью. Для этого проводим на плоскости прямую a и прикладываем к ней катет чертежного угольника, второй катет b вращаем вокруг прямой a. Замечаем, что катет b, перпендикулярный к прямой a, оказывается в общем случае наклонным к данной плоскости. Проверяем, достаточно ли для перпендикулярности прямой к плоскости, чтобы она была перпендикулярна к двум прямым, проведенным на этой плоскости через ее основание. Строим модель из двух чертежных угольников, имеющих общий катет и поставленных на данную плоскость (рис. 224). С помощью третьего угольника убеждаемся, что общий катет перпендикулярен к данной плоскости. Вспоминаем, что и ребро куба, перпендикулярное к двум сторонам основания, перпендикулярно к плоскости основания. Делаем вывод, что если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к двум прямым, проведенным на этой плоскости через основание данной прямой, то это условие достаточно для перпендикулярности прямой и плоскости. Это предложение называем *признаком перпендикулярности прямой и плоскости*, так как с помощью его можно узнать, перпендикулярны ли данные прямая и плоскость. Целесообразно провести аналогию с понятиями признаков равенства треугольников и признаков параллельности прямых.

Для закрепления признака перпендикулярности прямой и плоскости можно предложить такие вопросы: 1) Сколько прямых и как надо начертить на поверхности деревянного бруса, чтобы, направив по ним пилу, получить плоскую поверхность распила, перпендикулярную к ребру бруса? 2) Как проверить, что установленная на крестовине новогодняя елка перпендикулярна к плоскости пола? 3) Почему можно утверждать, не проверяя угольником, что ребро $A'D'$ куба (рис. 221) перпендикулярно прямой BA'?

Полезно показать, что из данной точки к данной плоскости можно провести только один перпендикуляр. Для этого через данную точку, кроме перпендикуляра к плоскости, проводим еще одну прямую, пересекающую плоскость, и, пользуясь чертежным угольником, устанавливаем, что она не перпендикулярна к этой плоскости.

---

[1] См. также задачи в кн. [260], § 19.

По аналогии с понятием расстояния от точки до прямой можно дать понятие расстояния от точки до плоскости. С помощью палочек или шнуров показываются, а затем измеряются расстояния от заданных вершин до заданных граней на каркасных моделях призм и пирамид. Эти упражнения подготавливают учеников к восприятию понятия высот призм и пирамид.

Понятие угла между наклонной и плоскостью рассматривается в VIII классе в теме «Тригонометрические функции острого угла». Перед введением его следует повторить возможные взаимные положения прямой и плоскости, определения перпендикуляра и наклонной к плоскости.

Необходимость введения определения угла между наклонной и плоскостью осознается учащимися в результате наблюдения наклонных, составляющих разные углы с плоскостью. Ученики видят, что одни прямые наклонены «совсем близко к плоскости», другие «почти перпендикулярны к ней», поэтому надо выяснить, с помощью какого угла можно охарактеризовать величину этого наклона.

Учитель указывает, что так как мы умеем измерять углы между двумя прямыми, то надо найти на плоскости такую прямую, чтобы угол между нею и данной наклонной характеризовал наклон данной прямой к плоскости.

Полезно показать, что не каждая прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, может быть выбрана для этой цели, так как: 1) одна и та же наклонная может составлять разные углы с прямыми, проходящими на плоскости через ее основание; 2) прямые, различно наклоненные к плоскости, могут составлять один и тот же угол с прямой, лежащей на плоскости.

Первое утверждение иллюстрируется на модели, представляющей собой планшет с укрепленным на нем наклонным металлическим стержнем a (рис. 225). С этим стержнем соединен второй стержень b, вращающийся в плоскости планшета. К последнему прикреплен двусторонний транспортир, пользуясь которым можно измерять углы между двумя данными стержнями.

Второе утверждение иллюстрируется на модели, отличающейся от первой тем, что стержень, расположенный на плоскости, закреплен неподвижно, а наклонный стержень вращается вокруг него.

Чтобы найти на плоскости прямую, которая могла бы служить стороной искомого угла, напоминаем учащимся решение задачи на определение высоты предмета (см., например, учебник Н. Н. Никитина, работу № 3, стр. 166). Изображаем прямоугольный треугольник $A'BC'$ (рис. 226), который строится при определении высоты предмета $A'C'$. Пользуясь моделью, по-

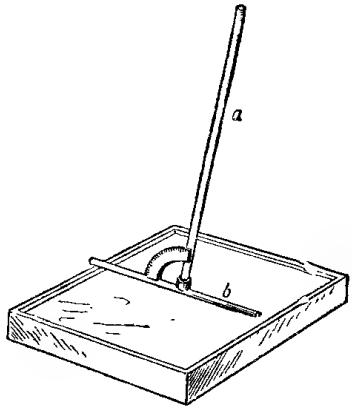


Рис. 225

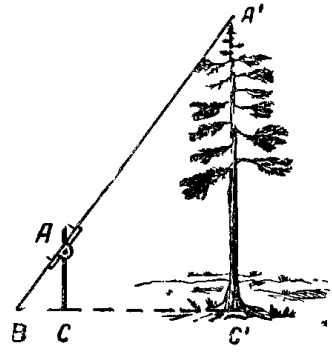


Рис. 226

казываем, что гипотенуза $A'B$ такого треугольника тем больше наклонена к плоскости, на которой стоит измеряемый предмет, чем этот предмет ниже. При этом угол, который она образует с катетом BC', проведенным на плоскости, становится меньше. Значит, угол $A'BC'$ характеризует наклон прямой BA' к плоскости. Поэтому его можно принять за угол между наклонной и плоскостью.

Чтобы дать определение угла между наклонной и плоскостью, следует ввести понятие проекции наклонной на плоскость. Проекцией наклонной на плоскость называем прямую, проходящую через основание наклонной и основание перпендикуляра, опущенного из любой точки наклонной на эту плоскость. Угол между наклонной и плоскостью определяется как острый угол между наклонной и ее проекцией на эту плоскость. Для закрепления могут быть предложены упражнения на нахождение углов, образуемых с плоскостью основания куба диагональю боковой грани, диагональю куба; на нахождение углов между ребром пирамиды и а) стороной ее основания, б) плоскостью ее основания и др. Углы находятся непосредственным измерением на каркасных моделях, поставленных на плоскость. Можно решать также задачи на вычисление угла между наклонной и плоскостью, пользуясь чертежом. Примером такой задачи служит следующая: «В прямоугольном параллелепипеде (рис. 227) найти угол наклона отрезка A_1C к плоскости основания, если известно, что стороны основания параллелепипеда равны 3 *см* и 4 *см*, а высота равна 5 *см*».

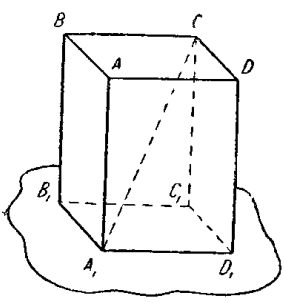


Рис. 227

О введении понятий некоторых видов многогранников.

Понятие призмы дается в VII классе. Показывая модели различных многогранников, обращаем внимание учеников на то, что у прямоугольного параллелепипеда (в частности, у куба) противоположные грани параллельны и равны между собой. Назовем одну пару параллельных граней основаниями, остальные грани — боковыми гранями, а ребра, по которым они пересекаются,— боковыми ребрами. Замечаем, что боковые ребра прямоугольного параллелепипеда параллельны между собой. Предлагаем ученикам выбрать из нескольких многогранников такие, у которых есть два равных и параллельных основания, а боковые ребра параллельны между собой. Вводим определение: многогранник, две грани которого равны и параллельны, а остальные пересекаются по параллельным прямым, называется *призмой.* Прямоугольный параллелепипед (и, в частности, куб) тоже призма. Указываем, что у одних призм боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания, а у других наклонны. Призмы, у которых боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания, называем прямыми призмами. Предлагаем выбрать прямые призмы из данного набора призм. Обращаем внимание на то, что у всех прямых призм боковые грани — прямоугольники. Выясняем, являются ли прямыми призмами куб, любой прямоугольный параллелепипед. Даем понятие о различных видах прямых призм, в зависимости от формы основания. Ставим упражнения на отыскание в данном наборе прямых призм — призм определенного вида. Целесообразно привести из окружающей действительности примеры прямых призм (карандаш, масштабные линейки с основанием в форме треугольника, прямоугольника, трапеции, тетрадь и др.). Следует выполнить упражнения в определении взаимных положений боковых граней, ребер, видов двугранных углов, образуемых гранями прямой призмы. Можно предложить и вопросы, подобные следующим: 1) назвать призму с наименьшим числом граней, 2) определить вид прямой четырехугольной призмы с прямоугольником в основании, у которой все ребра равны, и др.

Полезно дать задание изготовить модель прямой призмы из пластилина или другого легко режущегося материала. В процессе этой работы учащиеся не только повторят основные свойства прямой призмы, но и закрепят многие практические навыки, например приемы проверки перпендикулярности боковых ребер к плоскости основания, проверки того, что грани плоские, и др.

Понятие высоты прямой призмы не вызывает затруднений у учащихся. Еще в V классе решались задачи, в которых задавалась высота прямоугольного параллелепипеда. Теперь выясняется, что для построения высоты призмы надо опустить пер-

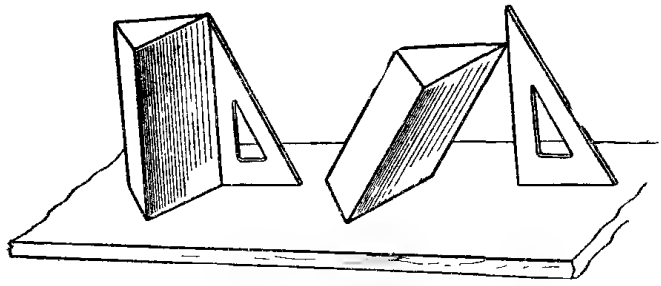


Рис 228

пендикуляр из какой-либо точки одного основания на плоскость другого; отрезок этого перпендикуляра, заключенный между двумя основаниями, и будет высотой.

В прямой призме ее боковое ребро является высотой. Полезно указать, что это не справедливо для наклонной призмы. Для наглядной иллюстрации вывода можно поставить (основаниями) на одну плоскость две модели прямой и наклонной призм, имеющих равные боковые ребра (рис. 228). Приложив угольник, показываем высоту наклонной призмы.

Следует дать задачи на вычисление высот прямых призм, например: основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 *см* и 4 *см*. Найти высоту призмы, если площадь наибольшей боковой грани равна 25 $см^2$.

Показывая учащимся картонные развертывающиеся модели прямых призм, знакомим их с различными развертками призм. Целесообразно предложить сделать развертки призм по данным размерам, например: развертку четырехугольной призмы высотой в 8 *см* с трапецией в основании, если основания и боковая сторона трапеции соответственно равны 2 *см*, 3 *см* и $1\frac{1}{2}$ *см*, а угол между большим основанием и данной боковой стороной трапеции равен 30°. Можно поставить и упражнения в определении вида призмы по данной ее развертке.

Используя навыки, полученные учениками на уроках черчения, следует предложить изобразить призмы разных видов в прямоугольных и аксонометрических проекциях, а также определить вид призмы по ее проекциям на две или три взаимно перпендикулярные плоскости и вычислить элементы призмы (см. § 15, рис. 122, 124).

Правильная призма может быть определена как такая прямая призма, у которой основанием является правильный многоугольник, при этом следует повторить не только определение прямой призмы, но и основные взаимные положения прямых и плоскостей.

Понятие пирамиды вводится в процессе сопоставления ее с прямой призмой. Обращается внимание на то, что оба многогранника имеют нижнее основание — многоугольник. Боковые грани призмы — прямоугольники, боковые грани рассматриваемого многогранника — треугольники. Следует определение: пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (называемая основанием) есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани (называемые боковыми) — треугольники, имеющие общую вершину. Дается понятие о различных видах пирамид в зависимости от вида многоугольника, лежащего в основании. На моделях и чертежах выполняются упражнения в определении взаимных положений ребер, граней пирамид.

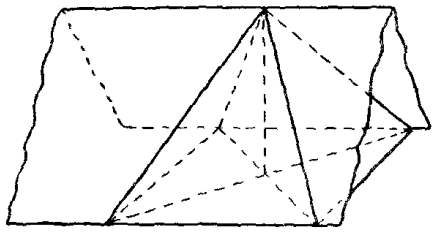


Рис. 229

Ученики легко укажут прямую, которая является линией пересечения плоскостей двух смежных граней пирамиды. Однако, рассматривая две несмежные ее боковые грани, учащиеся видят, что эти грани имеют одну общую точку, и обычно не могут указать линию пересечения плоскостей этих граней. Можно показать на модели, что и в этом случае две плоскости пересекаются по прямой, при этом удобнее использовать модель правильной четырехугольной пирамиды, приложив к каждой из двух несмежных ее граней пластинки (рис. 229).

Полезно проделать также упражнения в определении углов между ребрами и основаниями пирамид, между их гранями.

По аналогии с понятием высоты призмы вводится понятие высоты пирамиды. Наблюдая каркасные модели пирамид различного вида, замечаем, что их высоты, вообще говоря, не совпадают с боковыми ребрами. Высоты могут занимать различные положения относительно пирамид: проходить внутри или вне их, совпадать с одним из ребер. Особо рассматриваются модели пирамид, основания которых — правильные многоугольники. Пирамиды подбираются так, что их высоты располагаются различно относительно самих пирамид. Выбрав из них пирамиду, высота которой проходит через центр основания. вводим *понятие правильной пирамиды.*

О телах вращения.

В восьмилетней школе тела вращения в системе не изучают, но в программу включено в VII классе рассмотрение цилиндра, а в VIII классе — вычисление площади поверхности и объема конуса и шара. Эти вопросы преимущественно связаны с решением задач практического и производственного характера.

Отметим, что первое знакомство с цилиндром, конусом, шаром ученики получают еще на уроках рисования в IV классе, а затем встречаются с этими понятиями на уроках труда, географии, физики, черчения и др. На первых уроках геометрии в VI классе демонстрируются модели разных тел и предметы различной формы, в том числе некоторые тела вращения. При введении понятия плоскости сравнивают плоскую поверхность с поверхностями цилиндра и шара. В VII и VIII классах снова рассматриваются модели тел вращения, знакомых учащимся, но теперь следует по возможности использовать имеющиеся у школьников сведения о взаимных положениях прямых и плоскостей в пространстве. Так, например, рассматривая в VII классе прямой круговой цилиндр, можно выяснить, что его основания (равные круги) лежат в параллельных плоскостях; прикладывая к боковой поверхности цилиндра линейку, установить, что это поверхность не плоская, и выявить ее различие с поверхностью шара; напомнить понятие перпендикуляра к плоскости и показать высоту цилиндра, прикладывая угольник. Полезно для сравнения иметь модель наклонного цилиндра.

Как и всегда, необходимо рассмотреть различные предметы цилиндрической формы (не только такие, как ведро или литровая кружка, но и такие, как монета, прямой кусок проволоки круглого сечения и т. п.).

При рассмотрении конуса также дается наглядное представление о его образующей. В восьмилетней школе изучается только прямой круговой конус, но полезно показать и модели наклонного кругового конуса.

Для иллюстрации понятия высоты конуса хорошо иметь модель, боковая поверхность которой прозрачна, внутри натянута нить, изображающая высоту.

В число практических работ учащихся необходимо включить изготовление разверток и моделей цилиндров и конусов. Среди наглядных пособий следует иметь и разборную модель шара, на которой можно показать его части.

§ 25. Вопросы измерения. Вычисления площадей и объемов

«Вопросы измерения геометрических величин ввиду их большого практического значения распределены по всему курсу»[1]. Методика рассмотрения этих вопросов в V классе была нами изложена в § 5. О понятии длины отрезка сказано в § 22. В настоящем параграфе мы рассмотрим основные вопросы измерения, включенные в программу по геометрии VII и VIII классов.

[1] См. [6], «Объяснительная записка».

Площадь многоугольника[1].

Относительно понятия площади и его рассмотрения в восьмилетней школе можно сделать замечания, аналогичные высказанным о понятии длины отрезка. В научных курсах геометрии площадь определяется как некоторое положительное число, которое ставится в соответствие каждому многоугольнику, причем выполняются следующие положения: 1) равным многоугольникам соответствуют равные числа (иначе, равные многоугольники имеют равные площади); 2) если данный многоугольник составлен из нескольких частей, то число, ему соответствующее, равно сумме чисел, соответствующих каждой его части (иначе, площадь многоугольника, состоящего из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей); 3) некоторому определенному многоугольнику соответствует число 1 (площадь некоторого многоугольника принимается за единицу). В теоретических курсах геометрии доказывается возможность выполнения этих положений[2].

Такое построение темы не может быть проведено в восьмилетней школе. Отметим, что у каждого ученика еще в начальных классах образуется представление о площади конкретной фигуры как о величине части плоскости, ограниченной контуром этой фигуры. Однако еще в IV классе ученики знают, что найти площадь прямоугольника — значит найти некоторое число, показывающее, из скольких квадратных единиц может быть составлен данный прямоугольник. В V классе учитель показывает, что площадь прямоугольника может быть и дробным числом, показывающим, из скольких определенных долей квадратной единицы может быть составлен прямоугольник[3]. Так же ставится вопрос и при вычислении площади треугольника. Таким образом, у учащихся образуется представление о площади фигуры как о некотором числе, определяющем размер части плоскости, ограниченной контуром фигуры. Хотя в программе VI класса нет упоминания о площади, учащиеся и в этом классе применяют свое умение вычислять площадь некоторых фигур при решении конкретных задач на уроках арифметики, а также на уроках физики и труда.

Переходя в VII классе к теме «Площадь многоугольника», учитель должен опереться на имеющиеся у учеников представления и знания, привести их в систему, дополнить, дать некоторые обоснования. Впервые явно вводится *понятие равновеликости*. Учащиеся имеют понятие о равенстве двух фигур: равными они называют такие две фигуры, которые при наложении могут быть совмещены (равенство отрезков, углов, дуг,

---

[1] В изложении мы имеем в виду только «простые» многоугольники.

[2] См. [262], § 58; [216], кн. IV, гл. I.

[3] См. § 5 этой части.

треугольников, симметричных фигур[1]. При измерении отрезков ученики воспринимали как очевидное, что равные отрезки имеют равные длины и отрезки, имеющие равные длины, равны. Формулировка этого положения вызвала бы только удивление учащихся. Теперь, говоря о площади многоугольника, можно вспомнить об этом свойстве отрезков, чтобы подчеркнуть, что, хотя равные многоугольники имеют равные площади, обратное предложение может быть неверным. Учащиеся уже встречались с этим фактом и знают, что площадь треугольника может быть равной площади прямоугольника, что равные по площади прямоугольники могут не совпадать при наложении и т. п. После рассмотрения ряда примеров может быть введен термин «равновеликость» и дано его определение. Ученики могут сами привести жизненные примеры (разные формы комнат, имеющих одинаковые площади, огородные участки и проч.).

В теории площадей есть еще одно важное понятие — *равносоставленность*. Излагая методику рассмотрения геометрического материала в V классе, мы уже упоминали об этом понятии[2]. Для учащихся очевидно, что две фигуры, составленные из одинакового числа попарно равных частей, имеют равные площади, как очевидны и общие положения о площадях, перечисленные нами выше. Обратное положение не очевидно. Теорема о том, что любые два равновеликие многоугольника равносоставлены, была доказана в XIX в. венгерским математиком Вольфганом Болиаи (1832) и немецким математиком Гервином (1833) и носит название теоремы Болиаи — Гервина[3]. Эта теорема дает возможность вывести все формулы для вычисления площадей различных многоугольников, пользуясь свойством равносоставленности, если известна формула для вычисления площади какого-либо одного вида многоугольника. В научных курсах геометрии чаще всего исходят из формулы вычисления площади треугольника. Изложение теории площадей в этих курсах очень формально и для учащихся средней школы недоступно[4]. Из учебников для средней школы можем указать геометрию Н. А. Глаголева, в которой вопрос о вычислении площади многоугольников излагается на основании равносоставленности (в основу положена площадь прямоугольника).

Программа по геометрии для восьмилетней школы не предполагает введения понятия равносоставленности. Однако при выводе формулы для вычисления площади какого-либо вида многоугольника вполне можно пользоваться построением фигуры, вычисление площади которой уже известно и которая

---

[1] В научной литературе принят термин «конгруэнтность фигур».
[2] См. § 5 этой части
[3] См. [245].
[4] См. [216], (*прибавление*); [223], § 42.

равносоставлена с данной. (Так сделано в учебнике Н. Н. Никитина при выводе формулы площади параллелограмма по чертежу 272, *а*.) Фактическое выполнение построения двух равносоставленных фигур дает наиболее наглядное представление *их равновеликости; обоснование* этого факта вытекает из общих положений о площадях, которые в школе даются без доказательства. Отметим, что построение фигуры, равносоставленной с данной, может быть выполнено различными способами и дает поэтому богатый материал для творческой самостоятельной работы учащихся. Подготовкой к этой работе могут служить упражнения на составление фигур из прямолинейных частей заданной фигуры, которые в большом числе имеются в учебнике Н. Н. Никитина [1].

Первый урок темы «Площадь многоугольника» во многом повторяет материал, уже известный ученикам, и может быть проведен в форме живой беседы. При этом можно вспомнить, как в младших классах дети непосредственно подсчитывали число квадратных единиц, из которых можно составить данный прямоугольник. Это дает повод познакомить учеников с палеткой, пользуясь которой мы также подсчетом квадратных единиц находим площадь фигуры. В классе должна быть модель палетки на кальке, на которую нанесена сетка из квадратных дециметров, и другая модель, на которой квадратные дециметры разделены на квадратные сантиметры. Прикладывая эту сетку к фигурам, изображенным на плакатах или на доске, учащиеся подсчитывают квадратные единицы и находят площадь фигуры с точностью до 1 *кв. дм*, затем — с точностью 1 *кв. см*. Хорошо, если каждый ученик изготовит маленькую палетку на кальке и с ее помощью произведет измерение площади какого-либо участка по его плану [2]. С помощью палетки можно провести измерение площади прямоугольника с разной точностью. Затем можно, повторив определение равенства фигур, дать понятие и определение равновеликости.

Ученики уже знают формулу для вычисления площади прямоугольника и треугольника и понимают, что на практике обычно площадь многоугольника находят не непосредственным измерением части плоскости квадратными единицами, а косвенным путем, то есть вычислением, измеряя некоторые отрезки линейными единицами. Отсюда следует естественный переход к выводу формулы для *вычисления площадей четырехугольников* различного вида, которые изучались в предыдущей теме. Вывод этих формул, в отличие от проводимого в V классе, дается уже дедуктивным путем, а не только на основании на-

---

[1] См. в кн. [258] черт. 71, 181, 247.
[2] См [260], № 472.

глядности. Если известна формула площади прямоугольника, то вывести все остальные формулы уже нетрудно, причем порядок введения этих формул может быть различен в зависимости от способа их обоснования.

Вывод формулы площади прямоугольника в V классе был подробно рассмотрен нами в § 5. Теперь нам надо выяснить, как дать ученикам VII класса более строгий вывод. Очевидно, вполне строгое доказательство не может быть дано, так как не рассматривается вопрос о несоизмеримых отрезках, нет понятия о действительных числах. Следовательно, длины основания и высоты выражаются целыми или дробными числами. Для первого случая ход доказательства аналогичен изложенному для V класса, но оно может быть проведено в общем виде, то есть длины сторон выражены буквами; должно быть обосновано, что после проведения прямых, параллельных основанию и высоте прямоугольника, получается разбиение прямоугольника на равные квадраты, каждый из которых является квадратной единицей. При доказательстве ученики применяют свойства параллельных прямых и признаки параллелограмма.

Доказательство справедливости формулы для случая, когда длины основания и высоты — числа дробные, может быть проведено двумя способами: или путем введения новой линейной единицы, а затем соответствующей ей новой квадратной единицы, или аналогично изложенному выше в § 5. Первый способ дается в учебниках Н. Н. Никитина, А. П. Киселева и Н. А. Глаголева на частных примерах. Учеников обычно затрудняет объяснение, в какой зависимости находятся новая и прежняя квадратные единицы и как выразить площадь, вычисленную в новых квадратных единицах, через прежние квадратные единицы. Ученик может решить конкретный числовой пример, но ему трудно провести общее рассуждение.

При проведении вывода вторым способом мы избегаем введения новой квадратной единицы. Применение прямоугольных долей квадратной единицы не должно затруднять учащихся, если они привыкли пользоваться ими на уроках арифметики. В V классе вывод делается на частном примере[1], но учащиеся VII класса могут провести те же рассуждения, заменив числа буквами. Предварительно надо выяснить, как выразится площадь прямоугольной доли квадратной единицы. Если одну сторону квадрата разделить, например, на n равных частей, а смежную сторону — на m равных частей и провести через точки деления прямые, параллельные сторонам квадрата, то квадрат разделится на равные прямоугольники, число которых будет равно mn. Следовательно, каждый прямоугольник является $\frac{1}{mn}$ долей квадрата. Если данный квадрат принять за

[1] См. ч. IV, § 5, рис. 4.

квадратную единицу, то площадь каждой доли равна $\frac{1}{mn}$ квадратной единицы. После этого вывод формулы площади прямоугольника может быть сделан в общем виде. Достаточно задать длину основания дробью $\frac{p}{q}$ (линейных единиц), длину высоты $\frac{m}{n}$ (линейных единиц). Все рассуждения аналогичны сделанным на частном примере, повторяют, а немногие тождественные преобразования буквенных выражений не могут затруднить учащихся и явятся применением их знаний по алгебре. В результате получится площадь прямоугольника $S_{\square}=\frac{1}{qn}\cdot pm=\frac{pm}{qn}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$ (кв. единиц).

Следует еще раз указать, что, измеряя основание и высоту прямоугольника с точностью 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. линейной единицы, мы можем найти площадь с любой точностью, которую допускают применяемые измерительные приборы.

Полезно провести экскурсию в цех завода, в котором выполняются такие измерения.

Вывод формулы для вычисления площади треугольника, параллелограмма, трапеции может быть проведен различными путями. Можно применить метод преобразования каждой фигуры в равносоставленный прямоугольник; в этом случае теоремы могут быть даны в любом порядке. Различные способы преобразования данной фигуры в прямоугольник могут быть найдены и учащимися в порядке решения задач. В § 5 даны рисунки (11—13 и 15), показывающие преобразование треугольника в прямоугольник. Если площадь параллелограмма дана независимо от площади треугольника, то можно преобразовать треугольник в равносоставленный параллелограмм (рис. 230, III, IV). Показываем также преобразования парал-

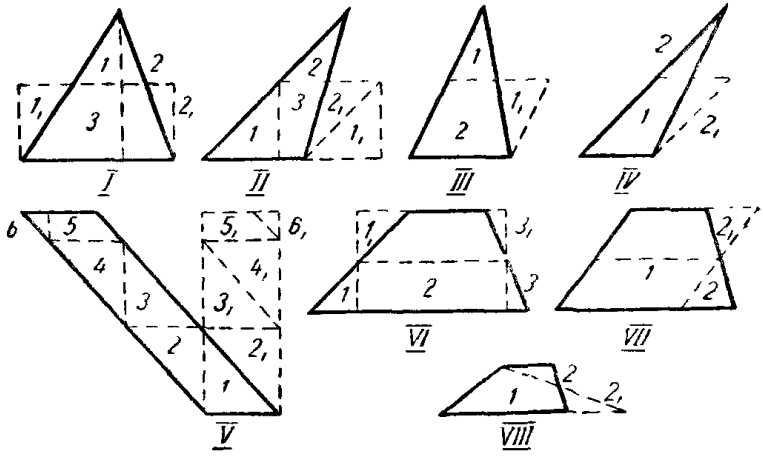


Рис. 230

лелограмма, у которого высота не имеет общих точек с основанием, в прямоугольник (рис. 230, V). На рисунках 230, VI, VII, VIII показано преобразование трапеции в прямоугольник, треугольник, параллелограмм. Вывод формулы для вычисления площади может быть дан и путем разбиения фигуры на части (например, площадь трапеции[1]) и методом дополнения (площадь параллелограмма и треугольника[2]). Доказательства, данные в учебнике, могут быть самостоятельно рассмотрены учащимися по книге. Другие способы могут служить материалом для задач на доказательство, так как ученик должен не только дать преобразование данной фигуры в другую, но и доказать их равносоставленность, а тем самым их равновеликость.

При решении задач полезно предложить ученикам найти и другую формулу для вычисления площади ромба: площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Эта формула удобна для применения при измерениях. Ее вывод может быть сделан разными путями (рассматривая ромб как сумму двух равных треугольников или преобразуя ромб в прямоугольник, как показано на рис. 231, *б* и *в*). Интересно выяснить, что полученная формула справедлива и для других видов выпуклых четырехугольников, диагонали которых взаимно перпендикулярны.

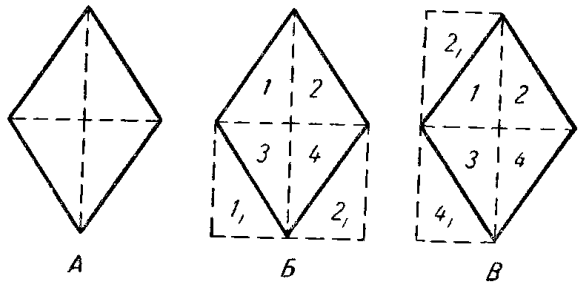


Рис. 231

Можно формулу для вычисления площади трапеции выразить иначе, то есть как произведение длин средней линии трапеции и ее высоты. Тогда та же формула будет справедлива для вычисления площади треугольника и параллелограмма (в частном случае прямоугольника).

Вычисление площади любого многоугольника путем разбиения его на треугольники не может вызвать затруднений. Этот прием широко применяется при проведении практических изме-

[1] См [258], § 61.
[2] См. [258], § 59 (черт. 272, б) и § 60.

рительных работ (например, измерение площади земельного участка по плану и на местности с применением эккера).

В дальнейшем в VII классе ученики применяют полученные знания для вычисления площади поверхности прямой призмы.

В VIII классе дается вычисление площади правильного многоугольника; учащиеся могут вывести эту формулу самостоятельно. Формула применяется затем для вычисления площади поверхности правильной призмы и правильной пирамиды.

Теорема об отношении площадей подобных многоугольников будет дана только в VIII классе, однако уже в VII классе надо обратить внимание на изменение площади фигуры при увеличении или уменьшении ее линейных размеров в несколько раз. Часто при определении площади участка по плану встречается, например, такая ошибка: найдена площадь участка на плане, масштаб которого 1 : 100, полученный результат ученик умножает на 100. Для предупреждения подобных ошибок следует рассмотреть изменение площади некоторых фигур на чертежах, как это могло быть сделано и в V классе для прямоугольника и квадрата (см. рис. 232)[1], а в VII классе можно использовать и буквенные формулы, например показать, что при увеличении стороны квадрата в 3 раза площадь его увеличится в 9 раз. Пусть длина стороны квадрата a лин. ед. Площадь его $S_1=a^2$ кв. ед.

$$S_2=(3a)^2=9a^2 \text{ (кв. ед.), то есть } \frac{S_2}{S_1}=9=3^2;$$

или в общем виде (n — натуральное число) $S_1=a^2$, $S_2=(an)^2=a^2n^2$, следовательно, $\frac{S_2}{S_1}=n^2$, если $\frac{a_2}{a_1}=n$.

Для сравнения полезно рассмотреть, как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить (уменьшить) на

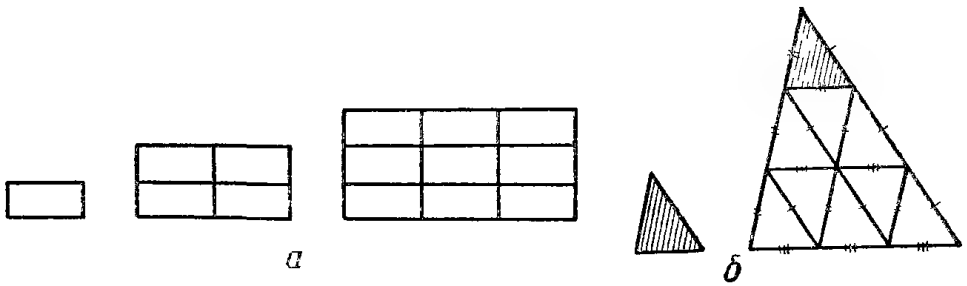


Рис 232

[1] См. также § 5, рис. 1$_3$

некоторый отрезок. Изображение на чертеже даст графическую иллюстрацию формулы квадрата суммы двух чисел [1].

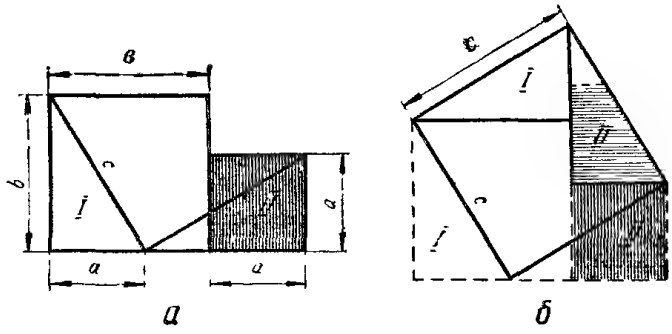
При решении вычислительных задач на площадь квадрата предлагаются не только задачи на вычисление площади по заданной длине стороны квадрата, но и обратная задача. Тем самым ученики знакомятся с понятием квадратного корня, вернее, с его арифметическим значением. Вопрос о существовании корня квадратного из любого положительного числа не ставится, так как понятия об иррациональном числе не дается. Учащиеся начинают с задач, в которых площадь данного квадрата выражается полным квадратом, и находят длину стороны подбором или по таблице. Затем они встречаются со случаем, когда нельзя найти такое число, квадрат которого точно равен заданной площади. Например, при построении квадрата с площадью, равной 2 кв. ед. Тогда находят приближенные значения длины стороны квадрата с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком. Оба числа возводят в квадрат, чтобы оценить точность полученного ответа. Затем по таблице находят значения с точностью до 0,01 или 0,001. В результате выясняется, что мы можем вычислить длину стороны квадрата с любой точностью.

Теорема Пифагора.

В тему «Площадь многоугольника» VII класса включена теорема Пифагора. По прежней программе она давалась только в VIII классе. Более раннее знакомство с теоремой Пифагора дает возможность решать многие практические задачи, связанные с метрическими соотношениями в треугольнике и круге. Классическое доказательство теоремы, данное Евклидом, воспринимается учениками с трудом [2]. В объяснительной записке к программе указывается, что доказательство теоремы Пифагора может быть дано «любым из известных способов на основе равносоставленности соответствующих фигур». Действительно, применение равносоставленности дает наиболее наглядный образ и показывает, как можно, разрезав на части 2 квадрата, построенных на катетах, составить из этих частей квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника.

Доказательство, данное в учебнике Н. Н. Никитина, легко может быть усвоено семиклассниками, но оно не показывает, как составить из двух квадратов новый квадрат, равновеликий их сумме. Следует также отчетливо различать геометрический смысл теоремы: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах этого треугольника» и смысл записи $c^2=a^2+b^2$. В последней записи a, b и c — числа, и мы имеем числовую зависи-

[1] См. [258], § 61 (7), § 62 (1 и 2), [260], № 489, 490.
[2] См. [248], § 257.



а б

Рис. 233

мость: квадрат числа, выражающего длину гипотенузы треугольника, равен сумме квадратов чисел, выражающих длины его катетов (при одной и той же единице длины). Может быть затем дана обычная сокращенная формулировка.

Рекомендуем показать учащимся доказательство теоремы, основанное на равносоставленности. На чертежах 233, *а* и *б* показано, как разбиваются на 3 части два любых квадрата и из этих частей составляется новый квадрат. Стороны данных квадратов являются катетами, а сторона нового квадрата — гипотенузой прямоугольного треугольника. Мы не описываем преобразований и доказательства, так как они ясны из приведенных чертежей. Полезно изготовить из фанеры или картона разборную модель, на которой путем перестановки треугольников I и II можно образовать обе фигуры (рис. 233).

Рассмотрение теоремы Пифагора в классе можно начать с частного случая построения квадрата, площадь которого равна сумме площадей двух равных квадратов. Для этого достаточно разделить каждый из данных квадратов по диагонали. Доказательство теоремы для равнобедренного прямоугольного треугольника, вытекающее из построения, предлагается в качестве задачи в учебнике Н. Н. Никитина [1]. Сформулировав теорему, можно перейти к одному из общих доказательств.

Интересным материалом для внеклассной работы с учащимися является история теоремы Пифагора и различные способы ее доказательства. Ученики могут самостоятельно подготовить небольшие сообщения [2].

Укажем еще один способ доказательства зависимости между длинами катетов и гипотенузы в прямоугольном треугольнике. Его можно рассмотреть после того, как пройдены формулы для вычисления площади треугольника и трапеции. Этот

---

[1] См. [258], § 58, упражнение 1.
[2] См. [102]; [90], ч. II.

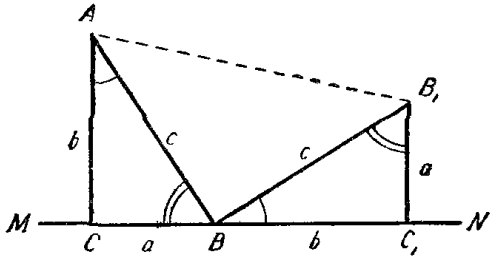


Рис. 234

вывод всегда поражает учащихся своей простотой.

Два равных прямоугольных треугольника (рис. 234) приложены к одной прямой MN. Их вершины, не лежащие на этой прямой, соединены отрезком. В результате получается трапеция AB_1C_1C, основания которой соответственно равны катетам данного прямоугольного треугольника, а высота — сумме этих катетов. Вычисляем площадь трапеции:

$$S_{\text{тр}}=\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

С другой стороны, сумма площадей трех треугольников, на которые разбита трапеция, равна $2\cdot\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$. Откуда, приравнивая результаты, получаем $\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2}$, или $a^2+b^2=c^2$.

Учителю нельзя забывать, что доказательство теоремы Пифагора не дает основания для суждения о том, является ли треугольник прямоугольным, если даны длины его сторон. Известно, что учащиеся не всегда различают зависимости, выраженные в условиях прямой и обратной теорем, и считают вывод, что треугольник, у которого длины сторон равны 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*, прямоугольный, следствием теоремы Пифагора. В более полных систематических курсах геометрии доказывались теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого угла и стороны, лежащей против тупого угла [1]. Совокупность трех теорем, рассматривающих все возможные случаи числовых зависимостей между сторонами треугольника, причем каждая зависимость исключает остальные две, обосновывает справедливость всех трех обратных теорем, то есть и теоремы, обратной теореме Пифагора. Если учитель найдет возможным, он может предложить ученикам в качестве задач вывести формулы для квадрата стороны, лежащей против острого угла, и для квадрата стороны, лежащей против тупого угла. Их вывод является применением теоремы Пифагора (понятие о проекции у учащихся уже есть). Тогда теорема, обратная теореме Пифагора, легко доказывается «от противного».

Для того чтобы иметь возможность доказать эту теорему «от противного», достаточно предварительно доказать, что квадрат стороны, лежащей против острого угла, меньше, а квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше, чем сумма квадра-

[1] См. [248], § 194—196, [227], § 218—220.

тов двух других сторон треугольника [1]. Доказательство этих теорем не вызывает затруднений, но оно требует знания зависимостей между сторонами и углами двух треугольников, у которых соответственно равны две стороны. Последние теоремы не включены в программу школы, они для учеников трудны. Доказательство их может быть проведено различными способами [2].

Отметим, что у Евклида непосредственно после теоремы Пифагора дается доказательство обратной теоремы; оно проводится независимо от свойств сторон треугольника, лежащих против острого и тупого углов [3].

Если учитель не имеет времени для доказательства теоремы, обратной теореме Пифагора, можно все же сформулировать ее и, выяснив значение, рассказать, например, о так называемом египетском треугольнике

Объем призмы и пирамиды.

О понятии объема многогранника [4] можно высказать те же положения, которые были сформулированы выше относительно понятия площади многоугольника; достаточно в каждом из них слово «многоугольник» заменить словом «многогранник» и слово «площадь» словом «объем» [5].

Однако в теории объемов многогранников имеется по сравнению с теорией площадей многоугольников одно существенное отличие. Если о двух равновеликих многоугольниках мы можем утверждать, что они равносоставлены, то это положение, вообще говоря, не справедливо для многогранников. Теорема, дающая необходимое условие для того, чтобы два равновеликих многогранника были равносоставлены, была доказана М. Деном (1901), более простое доказательство дано В. Ф. Каганом (1903) [6]. Следствием этой теоремы является, например, доказательство невозможности преобразовать правильный тетраэдр в равновеликий ему прямоугольный параллелепипед. (Напомним, что мы можем любой треугольник преобразовать путем разбиения его на части в равновеликий ему прямоугольник.) Вследствие того, что две равновеликие пирамиды не всегда равносоставлены, при выводе формулы объема пирамиды пользуются методом пределов.

С другой стороны, может быть доказано, что две равновеликие призмы являются равносоставленными, что используется в учебнике геометрии Н. А. Глаголева.

---

[1] См. П. А. Компанийц, Треугольники в школьном курсе математики, «Известия АПН РСФСР», вып. 95, М., 1958, § 53, 54.

[2] См. [248], § 52; [227], § 64.

[3] См. [238], кн. I, предложение 48.

[4] Здесь и дальше мы подразумеваем простые выпуклые многогранники.

[5] См [216], ч. II, гл. II, § 418, 419, [223], § 47.

[6] См [245] или [174], т. I.

В VII классе рассматривается только объем треугольной и четырехугольной прямых призм. Как и при изучении площадей многоугольников, учитель пользуется тем, что у учеников имеется наглядное представление об объеме тела. Могут быть сформулированы общие положения об объемах, которые также принимаются учащимися как очевидные. Вывод формулы объема прямоугольного параллелепипеда фактически повторяет вывод, сделанный в V классе. Если измерения параллелепипеда выражены целыми числами, то ученики легко могут сделать вывод в общем виде, пользуясь буквенными обозначениями чисел. Однако если при выводе формулы для вычисления площади прямоугольника в VII классе учащиеся могут доказать, что при проведении прямых, параллельных сторонам прямоугольника, внутри его образуются равные квадраты, то при выводе формулы объема прямоугольного параллелепипеда мы пользуемся только наглядными представлениями. Если измерения прямоугольного параллелепипеда выражены дробными числами, то вывод также может быть дан путем разбиения параллелепипеда на равные доли кубической единицы, как это показано в § 5 (рис. 6), или путем введения новой линейной единицы, а затем и соответствующей ей новой кубической единицы, как это изложено в учебнике Н. Н. Никитина. Вывод может быть сделан на числовых примерах.

Чтобы вывести формулу *объема треугольной прямой призмы,* естественно поставить вопрос о преобразовании ее в равновеликий прямоугольный параллелепипед, объем которого ученики уже умеют вычислять. Если раньше рассматривалось преобразование треугольника в прямоугольник, то может быть применен любой из показанных выше способов[1]. На рисунке 235, *в* показано, как основание треугольной призмы преобразуется в прямоугольник.

Призма разрезается на 3 части, из которых составляется новая призма, являющаяся прямоугольным параллелепипедом. Его основание равновелико основанию данной призмы, а вы-

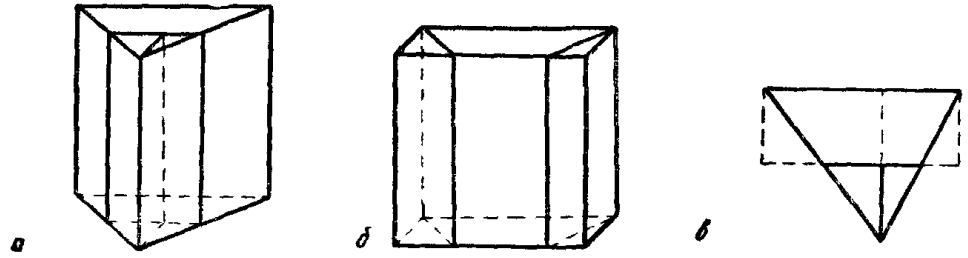


Рис. 235

[1] См. рис. 230 (I, II) и § 5, рис. 12 и 13.

соты этих призм равны. На рисунке 235, *а* и *б* показано это преобразование, но в классе лучше применить разборные модели, которые могут быть изготовлены из дерева или из картона в школьной мастерской. Изготовление моделей из картона требует предварительного выполнения разверток призм, что является полезной практической самостоятельной работой.

В учебнике вывод формулы делается путем дополнения данной призмы до прямоугольного параллелепипеда, что тоже может быть иллюстрировано на модели [1].

Если известна формула для вычисления объема треугольной прямой призмы, то легко может быть выведено, что по этой формуле может быть вычислен объем любой прямой призмы, так как, какой бы многоугольник ни являлся основанием, его можно разбить на треугольники и затем разбить данную призму на несколько прямых треугольных призм [2].

Формула для вычисления объема правильной призмы дается только в VIII классе после вывода формулы площади правильного многоугольника и может быть выведена учащимися самостоятельно.

Объем пирамиды.

Как мы уже выяснили, вывод формулы объема треугольной пирамиды нельзя осуществить путем преобразования ее в призму. Поэтому справедливость этой формулы может быть только показана на частном примере. Наиболее наглядным пособием является так называемый куб Кюстера. На нем можно показать, как разрезать куб на три равные пирамиды. Очевидно, что объем каждой пирамиды составляет $\frac{1}{3}$ объема куба. На рисунке 236 показано, как располагаются эти пирамиды в кубе. Как видно, основанием каждой пирамиды является грань куба (на рисунке взяты нижняя, боковая и задняя грани), а высотой — ребро куба. Таким образом, площадь основания пирамиды равна площади основания куба и длина высоты пирамиды равна длине высоты куба. Получаем формулу $V_{пир}=\frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания пирамиды, H — ее высота [3].

Пользуясь кубом, можно также показать другой частный случай, дающий вывод той же формулы. Куб разбивается на 6 равных правильных четырехугольных пирамид (рис. 238). Объем каждой пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема куба. Основанием пирамиды опять является грань куба, но высота равна $\frac{1}{2}$ ребра куба (вершины

---

[1] См. [258], § 68 (1).

[2] См. [258], § 68 (2).

[3] На рисунке 237 дана развертка одной пирамиды.

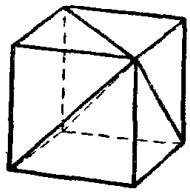


Рис. 236

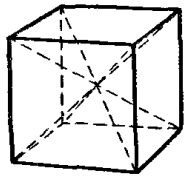


Рис. 238

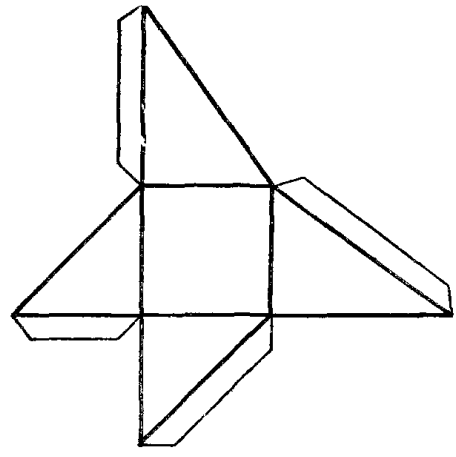


Рис. 237

всех пирамид лежат в точке пересечения диагоналей куба). Если обозначить длину высоты пирамиды буквой H, а площадь основания S, то получаем $V_{\text{куба}}=S\cdot 2H$; $V_{\text{пир.}}=\frac{1}{6}2SH=\frac{1}{3}SH$. Конечно, надо иметь модели, показывающие оба способа разбиения куба (рис. 239, 240).

Остается объяснить ученикам, что выведенная формула справедлива для вычисления объема любой пирамиды. Проверить зависимость между объемом пирамиды и объемом призмы с тем же основанием и высотой мы можем опытным путем. В кабинете школы надо иметь несколько полых металлических моделей призм и для каждой из них полую модель пирамиды (основание и высота пирамиды соответственно равны основанию и высоте призмы). Путем переливания воды или пересыпания мелкого песка можно убедиться в том, что вместимость призмы в 3 раза больше вместимости пирамиды.

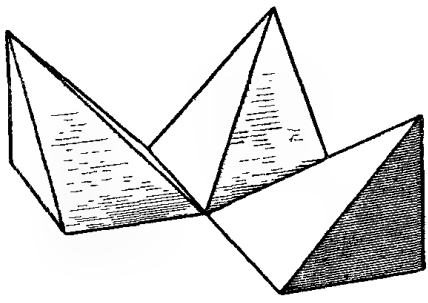


Рис. 239

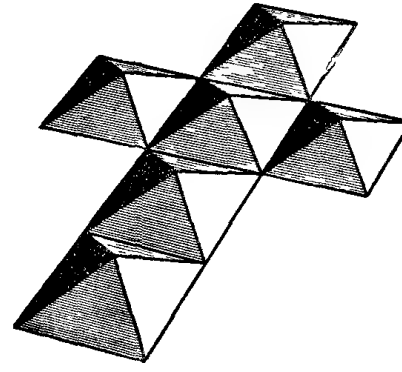


Рис. 240

Длина окружности.

Вычисление длины окружности и площади круга включены в программу VII класса. В научных курсах геометрии, как известно, прежде всего дается определение длины окружности (или вообще длины кривой линии); при этом пользуются или понятием предела последовательности, или аксиомой непрерывности [1]. В восьмилетней школе можно ограничиться представлением о длине окружности как о длине отрезка прямой, который получается, если окружность «выпрямить». Это представление основано на практических измерениях, которые проводят ученики. В VI классе было высказано утверждение, что отрезок прямой короче всякой другой линии, проведенной через точки, лежащие на его концах, в том числе и кривой линии.

Измерять окружность путем обведения круга шнуром явно затруднительно, а иногда и невозможно, что делает понятным постановку вопроса об отыскании отношения длины окружности к длине отрезка прямой, связанного с окружностью, с длиной ее диаметра или радиуса.

Очевидным является, что чем больше радиус окружности, тем больше и окружность. Можно рассмотреть чертеж, на котором изображен вписанный в круг правильный шестиугольник. Ученики легко выведут, что сторона его равна радиусу окружности, откуда можно будет заключить, что отношение длины окружности к длине ее диаметра больше трех. Если описать около окружности квадрат, то также можно показать, что это отношение меньше четырех.

Лучше всего провести в классе лабораторную работу, предложив каждому ученику путем непосредственного измерения найти отношение длины окружности к длине ее диаметра. В кабинете школы должны быть разные предметы цилиндрической формы, в том числе деревянные круги разной величины. Для измерения длины окружности лучше всего заготовить полоски миллиметровой бумаги. Длину диаметра можно предложить измерить при помощи так называемой мерной вилки (рис. 78), если ее нет, можно использовать масштабную линейку и два чертежных угольника (рис. 241); в зависимости от размеров измеряемых деталей можно провести измерения и с помощью штангенциркуля. Каждый ученик проводит измерения с возможной для его инструментов точностью несколько раз и находит требуемые отношения. Заранее должна быть намечена схема записи:

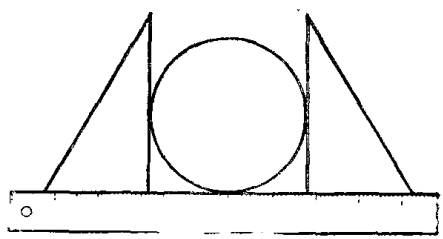


Рис. 241

[1] См. [216], ч. I, гл. VII; [262], § 51; [223], § 39.

Длина окружности $C \approx$; длина диаметра $D \approx$; отношение длины окружности к длине ее диаметра $\frac{C}{D} \approx$.

Учащимся ясно, что их измерения не могут быть точными. Многие ученики слышали, что отношение равно дроби 3,14, и считают это число точным. Следует выписать несколько ответов на доске; обычно они различаются не более чем на 0,1. Учитель сообщает, что существуют способы вычислить отношение длины окружности к ее диаметру с любой точностью, что оно выражается бесконечной десятичной (непериодической) дробью и обозначается греческой буквой $\pi = 3{,}141592653\ldots$. При практических вычислениях берут приближенное значение числа π с требуемой точностью, чаще всего с точностью до 0,01, то есть $\pi \approx 3{,}14$ (с недостатком). При более точных расчетах: $\pi \approx 3{,}1416$ (с избытком).

Записав отношение в общем виде $\frac{C}{D} = \pi$, учащиеся легко выведут формулу для вычисления длины окружности, то есть $C = \pi D$, а также $C = 2\pi R$.

Упражнения на применение формулы могут проводиться с использованием таблиц. При этом должны решаться и задачи, в которых по данной длине окружности требуется найти длину ее диаметра или радиуса. Если задача решается вычислением, то удобно деление на приближенное значение числа π заменить умножением на число, ему обратное. Поэтому ученики должны записать: $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ (с изб.); $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$ (с недост.)[1].

Площадь круга.

Семиклассники подходят к вычислению площади круга, уже изучив тему «Площадь многоугольника». Естественно напомнить ученикам, что надо найти число квадратных единиц (или их долей), на которые можно разбить часть плоскости, ограниченную окружностью. Измерение площади фигуры при помощи палетки уже знакомо учащимся; можно показать плакат, на котором на сетке квадратов начерчена окружность (рис. 242), и предложить найти площадь круга путем подсчета квадратных единиц. Подсчет выполняется приближенно: учитываются целые квадраты и части квадратов, если они больше половины. Чтобы вывести формулу для вычисления площади круга, надо найти отношение площади круга к площади квадрата, построенного на его радиусе. По чертежу видно, что площадь круга меньше учетверенной площади квадрата, построенного на его радиусе. Что-

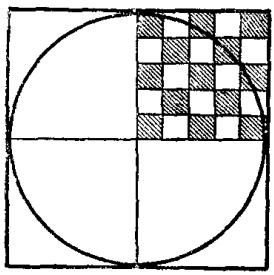


Рис. 242

[1] $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886\ldots$

бы найти более точную зависимость, можно предложить каждому ученику выполнить самостоятельно следующую работу: начертить окружность на миллиметровой бумаге и, узнав путем подсчета клеточек площадь круга, найти отношение полученного числа к площади квадрата, построенного на радиусе. Для этого достаточно подсчитать квадратные единицы внутри полукруга или четверти круга. Работа может быть задана на дом. При тщательном выполнении работы результат получается близким к 3,14. Учитель сообщает, что отношение площади круга к площади квадрата, построенного на его радиусе, в действительности равно отношению длины окружности к длине ее диаметра, то есть числу π, о котором уже говорилось выше: $\frac{S_{кр.}}{R^2} = \pi$, откуда $S_{кр.} = \pi R^2$.

При решении практических задач берут приближенное значение числа π. Часто удобнее пользоваться зависимостью площади круга от длины его диаметра, что дает $S_{кр.} = \frac{\pi D^2}{4}$.

Связь между формулами, выражающими длину окружности и площадь круга, может быть показана на так называемом индусском круге[1]. Следует иметь несколько моделей кругов, разрезанных на равные секторы, причем обе половины каждого круга окрашены в разные цвета. Один круг разрезан на 6 равных секторов, второй — на 12, третий — на 24. Располагая секторы каждого круга, как показано на рисунке 243, мы видим, что получается фигура, похожая на параллелограмм. Чем больше число секторов, тем ближе фигура к параллелограмму, основанием которого является половина окружности данного круга, а высотой — его радиус. Это дает формулу $S_{кр} = \frac{1}{2} CR$ или $S_{кр.} = \pi R \cdot R = \pi R^2$. Указанный способ вывода формулы, конечно, не является доказательством. Необходимо выяснить, что отношение площадей двух кругов равно квадрату отношения их радиусов (или диаметров), и использовать тот вывод при решении конкретных задач.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Для внеклассных занятий большую помощь может оказать книга В. Литцмана [101].

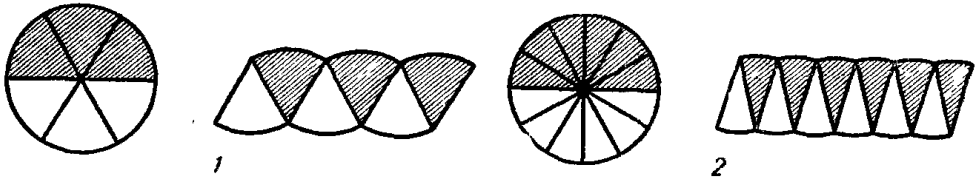


Рис. 243

[1] Этот способ применялся индийским математиком Ганези около трех тысячелетий назад.

Площадь поверхности и объем цилиндра[1]

При изготовлении модели цилиндра ученики знакомятся с его разверткой. Это дает наглядное представление о том, что если развернуть боковую поверхность цилиндра и как бы «выпрямить» ее, то получается прямоугольник, длина основания которого равна длине окружности, лежащей в основании цилиндра, а высота равна высоте цилиндра.

Отсюда легко получаются формулы для вычисления боковой поверхности цилиндра.

Чтобы пояснить, как найти объем цилиндра, можно напомнить вычисление объема прямой призмы. Надо найти число кубических единиц (или их долей), на которые можно разбить призму; для этого мы разбиваем ее на слои; в каждом слое содержится столько кубических единиц, сколько квадратных единиц лежит в основании призмы, а число слоев определяется высотой призмы. Также и при вычислении объема цилиндра, площадь его основания дает число кубических единиц, заключенных в одном слое, а высота — число слоев. Получаем формулу $V_{\text{цил.}}=\pi R^2 H$ или $V_{\text{цил.}}=\frac{\pi D^2 H}{4}$, где H — высота цилиндра, а D — длина диаметра его основания[2].

Выведенные формулы дают возможность решать многие практические задачи, причем ученики могут пользоваться различными измерительными приборами, таблицами и применять правила приближенных вычислений.

* *
*

В заключение рассмотрим некоторые модели для иллюстрации формул, даваемых в VIII классе. Желательно иметь несколько полых металлических моделей цилиндров и конусов, причем основания цилиндра и соответствующего ему конуса равны между собой так же, как и их высоты. Переливанием воды или пересыпанием мелкого песка можно убедиться, что вместимость цилиндра в 3 раза больше вместимости конуса.

Другой набор пособий: полые цилиндр, конус и шар, составленный из двух полушарий, причем диаметр основания конуса и диаметр основания цилиндра равны их высоте и равны диаметру шара[3]. Путем переливания воды можно показать, что половина

---

[1] Рассматривается прямой круговой цилиндр.

[2] Длина окружности, площадь круга, площадь поверхности и объем цилиндра рассматриваются во 2-й главе книги П. А. Компанийца «Некоторые вопросы школьного курса математики», Известия АПН РСФСР, вып. 95, М., 1958; в ней можно найти много материала для самостоятельной и внеклассной работы учащихся. См. также П. А. Компанийц, Особенности преподавания геометрии в I—VI классах, гл. III и VII.

[3] Это так называемые тела Архимеда.

шара равновелика конусу, то есть ее объем составляет $\frac{1}{3}$ объема цилиндра, откуда следует, что объем всего шара равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, диаметр которого равен диаметру шара и высоте цилиндра. Это же можно показать, если перелить в цилиндр жидкость, вмещающуюся в двух полушариях: для заполнения цилиндра надо еще добавить жидкость, вмещающуюся в конусе.

Обозначив длину радиуса шара буквой r, получим:

$$V_{\text{цил}}=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3, \text{ иначе } V_{\text{цил}}=\frac{\pi D^3}{4};$$

$$V_{\text{кон}}=\frac{2\pi r^3}{3}=\frac{2}{3}\pi r^3, \quad \text{»} \quad V_{\text{кон}}=\frac{\pi D^3}{12};$$

$$V_{\text{шара}}=\frac{2}{3}\pi r^3\cdot 2=\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{»} \quad V_{\text{шара}}=\frac{\pi D^3}{6}.$$

Отметим, что вывод формул для вычисления объема цилиндра, конуса и шара может быть сделан на основании принципа Кавальери [1].

[1] Итальянский математик XVII века. Применение принципа Кавальери изложено в кн. [248], ч. II, § 89 и 147.

ЛИТЕРАТУРА

К первой части

Общая методика

1. Брадис В. М., Методика преподавания математики в средней школе, изд. 3, Учпедгиз, 1954.
2. Зерченинов Н. Т., Методика преподавания математики (Методическое пособие для заочников), Учпедгиз, 1948.
3. Ланков А. В., К истории развития передовых идей в русской методике математики, Учпедгиз. 1951.
4. Ленин В. И., Философские тетради, М., Госполитиздат, 1947.
5. Потоцкий М. В., О педагогических основах обучения математике, Учпедгиз, 1963.
6. Программы восьмилетней школы. Математика, М., Учпедгиз, 1964.
7. Программы средней школы. Математика, М., Учпедгиз, 1963.
8. Прудников В. Е., Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков, Учпедгиз, 1956.
9. Репьев В. В., Очерки по общей методике математики, Горький, 1955
10 Репьев В. В, Общая методика преподавания математики. Учпедгиз, 1958.
11. Энгельс Ф., Анти-Дюринг, М., Госполитиздат, 1948.
12. Энциклопедия элементарной математики, т. I—VI, 1951—1964 г.

Отдельные вопросы методики

13 Аракелян О. А., Некоторые вопросы повторения математики в средней школе, Учпедгиз, 1960.
14 Богушевский К. С., Сикорский К. П. Сборник задач по математике для повторения, М., Учпедгиз, 1953
15. Вопросы преподавания математики в средней школе, Сборник статей работников кафедр педагогических институтов Уральской зоны, Учпедгиз, 1958.
16. Валецкий Г., Вопросы элементарной математики, Госиздат, 1926.
17. Градштейн И. С., Прямая и обратная теорема, Физматгиз, 1959.
18. Компанийц П. А., О сознательности знаний учащихся. Учпедгиз, 1953.
19. Компанийц П. А., Некоторые вопросы школьного курса математики, изд. АПН РСФСР, 1958.
20. Менчинская Н. А. Психология обучения арифметике, Учпедгиз, 1955.
21. Молодший В. Н., Очерки по вопросам обоснования математики, Учпедгиз, 1958.

22. Никитин В. В., Рупасов К. А. Определение математических понятий в курсе средней школы, Учпедгиз, 1963.
23. Трефилов И. П., Как заинтересовать математикой учащихся средней школы, Учпедгиз, 1957.
24. Хинчин А. Я., Основные понятия математики и математические определения в средней школе, Учпедгиз, 1940.
25. Хинчин А. Я., Педагогические статьи, изд. АПН РСФСР, 1963.
26. Фаермарк Д. С., Развитие интереса к математике, Учпедгиз, 1962.

Политехническое обучение

27. Дубинчук Е. С. и др., О преподавании математики в связи с трудовым и производственным обучением, Учпедгиз, 1962.
28. Калашников А. Г. (редакция), Вопросы политехнического обучения в школе, изд. АПН РСФСР, 1953.
29. Костина З. Н., Практические задачи по математике, Учпедгиз, 1956.
30. Прочухаев В. Г., Связь теории с практикой в преподавании математики, Учпедгиз, 1958.
31. Прочухаев В. Г., Виды практических работ на уроках математики, Учпедгиз, 1955.
32. Трубецкой М. Н., Развитие способностей учащихся к техническому творчеству на уроках геометрии, Учпедгиз, 1963.
33. Чуканцев С. М., Лабораторные работы по математике, Учпедгиз, 1961.
34. Яковлев Ф. И. и др., Лабораторно-практические работы учащихся, изд. АПН РСФСР, 1963.

Способы и средства вычислений

35. Абольник Б. С., Руководство к логарифмической линейке, Гостранснздат, 1931
36. Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, 1951.
37. Артемов А. К., Степени и корни, Учпедгиз, 1959.
38. Брадис В. М., Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1954.
39. Брадис В. М., Как надо вычислять, Учпедгиз, 1960.
40. Грибанов В. У., Приближенные вычисления в средней школе, Учпедгиз, 1964.
41. Гурнов В. К., Счетная линейка, Учпедгиз, 1958.
42. Митропольский А. К., Краткие математические таблицы, Физматгиз, 1959.
43. Образ К. И., Эппель Б. С., Логарифмическая линейка, Учпедгиз, 1962.
44. Панкратов А. Л., Математические таблицы для составления и решения задач, Учпедгиз, 1959.
45. Попов И. Г., Математические таблицы, Учпедгиз, 1952.
46. Прочухаев В. Г., Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся, Учпедгиз, 1961.
47. О'Рурк, Таблицы умножения, Госстатиздат, 1955.
48. Тишин С. Д., Таблицы возведения в степень, Госстатиздат, 1952.
49. Юрьев Н. П., Счетная техника, Госстатиздат, 1952
50. Яковкин М. В., Таблицы умножения и деления многозначных чисел на двузначные, Учпедгиз, 1952.
51. Яковкин М. В., Вычислительные таблицы, Учпедгиз, 1958.
52. Яковкин М. В., Вычислительные действия над многочленами, Учпедгиз, 1961.

53. Шевченко И. Н., Начальные сведения о приближенных вычислениях, изд. АПН РСФСР, 1958.

О наглядных пособиях

54. Громов А. П., Диафильмы и кино на уроках математики в средней школе, Учпедгиз, 1961.
55. Дорф П. Я., Наглядные пособия по математике, Учпедгиз, 1960.
56. Знаменский М. Е., Геометрические фигуры в технических формах, Учпедгиз, 1959.
57. «Изготовление наглядных пособий», Сборник под ред. Семушина А. Д. изд. АПН РСФСР, 1953.
58. Кабанов Г. И., Мой опыт изготовления и применения пособий по математике, Учпедгиз, 1958.
59. Мосянский Е. И., Самодельные учебные наглядные пособия по математике, Кострома, 1955.
60. «Наглядные пособия по математике». Сборник статей, Учпедгиз, 1962.
61. «Новые пособия по математике». Сборник статей, вып. 2, изд. АПН РСФСР, 1962.
62. Сахаров Б. А., Самодельные наглядные пособия по арифметике, для V—VI классов, Учпедгиз, 1959.

О измерениях на местности

63. Дорф П Я., Румер А. О. Измерение на местности, изд. АПН РСФСР, 1957.
64. Знаменский М. А., Измерительные работы на местности, Учпедгиз, 1957.
65. Начапкин Ф. Л., Школьный теодолит, изд. АПН РСФСР, 1957.
66 Смычников Д. М., Измерительные работы на местности. Учпедгиз, 1953.
67. Трунов И. П., Измерительные работы на местности, Учпедгиз, 1954.

История математики

68 Беллюстин В. К., Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики, М., 1940.
69. Глейзер Г. И., История математики в школе, Учпедгиз, 1964.
70. Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, Физматгиз, М., 1959.
71. Выгодский М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, 1941.
72. Гнеденко Б. В., Краткие беседы о зарождении и развитии математики, изд. АПН РСФСР, 1946.
73. Гнеденко Б. В., Очерки по истории математики в России, ГТТИ, 1950.
74. Депман И. Я., История арифметики, Учпедгиз, 1959.
75. Депман И. Я., Мир чисел, Детгиз, 1963.
76. «Историко-математические исследования», т. I—XIV, Физматгиз, 1948—1962.
77. Кольман Э., История математики в древности, Физматгиз, 1961.
78. Кропотов А. И., Марон И. А., Остроградский М. В. Учпедгиз, 1961.
79. Рыбников К. А., История математики, ч. I, изд. МГУ, 1960.
80 Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века, ГТТИ, 1938
81. Цейтен Г. Г., История математики в XVI—XVII вв., ОНТИ, 1938,

82. Шереметьевский В. П., Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.
83. Юшкевич А. П., История математики в средние века, Физматгиз, 1961.

Внеклассная работа

84. Белый Б. Н., Бернштейн А. М., Школьное общество любителей математики, Учпедгиз, 1962.
85. Балк М. Б., Организация и содержание внеклассных занятий по математике, Учпедгиз, 1956.
86. Германович П. Ю., Математические викторины, Учпедгиз, 1959.
87. Депман И. Я., Возникновение системы мер и способы измерения величин, Учпедгиз, 1956.
88. Депман И. Я., Рассказы о решении задач, Детгиз, 1957.
89. Доморяд А. П., Математические игры и развлечения, Физматгиз, 1961.
90. Еленьский Щепан, По следам Пифагора, Детгиз, 1961.
91. «Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе». Сборник статей под редакцией П. В. Стратилатова, Учпедгиз, 1955.
92. Кондратов А. М., Числа и мысль, Детгиз, 1963.
93. Кондратов А. М., Числа вместо интуиции, изд. «Знание», 1963.
94. Колосов А. А., Внеклассная работа по математике. Учпедгиз, 1955.
95. Кордемский Б. А., Математическая смекалка, Физматгиз, 1963.
96. Кордемский Б. А., Очерки о математических задачах на смекалку, Учпедгиз, 1958.
97. Кордемский Б. А. и Русанов Н. В., Удивительный квадрат, ГТТИ, 1952.
98. Крылов А. Н., Мои воспоминания, изд. Академии Наук, 1945.
99. Линьков Г. И., Внеклассная работа по математике, Учпедгиз, 1954.
100. «Люди русской науки (математика, механика, астрономия, физика, химия)», Физматгиз, 1961.
101. Литцман В., Старое и новое о круге, Физматгиз, 1960.
102. Литцман В., Теорема Пифагора, Физматгиз, 1960.
103. Лоповок Л. М., Школа юных математиков, Учпедгиз, 1963.
104. Молодший В. Н., Элементы истории математики в школе, Учпедгиз, 1953.
105. Нагибин Ф. Ф., Математическая шкатулка, Учпедгиз, 1958.
106. Островский А. И. и Кордемский Б. А., Геометрия помогает арифметике, Физматгиз, 1960.
107. Перельман Я. И., Живая математика, ГТТИ, 1946.
108. Перельман Я. И., Занимательная арифметика, ГТИ, 1932.
109. Перельман Я. И., Занимательная алгебра, ГТИ, 1949.
110. Перельман Я. И., Занимательная геометрия, ГТИ, 1950 (есть более поздние издания книг Я. И. Перельмана).
111. Попов Г. Н., Сборник исторических задач по элементарной математике, ОНТИ, 1938.
112. Рымарев А. Ф., Сборник задач для внеклассных занятий по математике в V—VI классах средней школы, Минск, Учпедгиз, 1958.
113. Серпинский В., 100 простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики, Учпедгиз, 1961
114. Чистяков В. Д., Математические вечера в средней школе, Учпедгиз, 1958.
115. Чистяков В. Д., Сборник старинных задач по элементарной математике, Минск, 1962.
116. Чистяков В. Д., Рассказы о математиках, Минск, 1963.

Ко второй части

117. Абаляев Р. Н., Сборник задач по арифметике с практическим содержанием, Учпедгиз, 1961.

118. Александров И. И. и Александров А. И., Методы решения арифметических задач, М., Учпедгиз, 1953.

119. Андронов И. К., Арифметика натуральных чисел, Учпедгиз, 1954

120. Андронов И. К., Арифметика дробных чисел и основных величин, Учпедгиз, 1955.

121. Андронов И. К. и Брадис В. М., Арифметика, Учпедгиз, 1957.

122. Арифметика, учебное пособие для V класса восьмилетней и средней школы, под ред. Спатару Н. Х., Кишинев, «Картя Малдовеняскэ», 1960.

123. Арнольд И. В., Операторное толкование числа в курсе элементарной математики, Известия АПН РСФСР, вып. 4, 1946.

124. Артоболевский А. Н., Арифметические задачи с производственным содержанием, М., Учпедгиз, 1961.

125. Билибин Н. И., Теоретическая арифметика, 1911.

126. Берг М. Д., Знаменский М. А. и др., Рабочая книга по математике для пятого года обучения в городской школе, М., Гиз. 1929.

127. Березанская Е. С., Методика арифметики, Учпедгиз, 1955.

128. Березанская Е. С., Сборник задач и упражнений по арифметике, М., Учпедгиз, 1953.

129. Берман Г. Н., Приемы счета, Физматгиз, 1959.

130. Богушевский К. С. и Сикорский К. П., Сборник задач по математике для повторения, для V—VII классов, Учпедгиз, 1953.

131. Борель Э., Элементарная математика. I. Арифметика и алгебра, Госиздат Украины, 1923.

132. Брадис В. М. и др., Ошибки в математических рассуждениях, М., Учпедгиз, 1959.

133. Буняковский В., Арифметика, 1852.

134. Волков И. Ф. и Парно И. К., О преподавании десятичных дробей в V классе, Кишинев, 1950.

135. Волков И. Ф., Парно И. К., Спатару Н. Х., О преподавании обыкновенных дробей после десятичных, Кишинев, 1962.

136. Воронин С. В., Решение сложных арифметических задач, Калуга, 1952.

137. Грацианский И. И., Рабочая книга по математике для пятого года обучения, М., Госиздат, 1928.

138. Грацианский И. И., Сборник арифметических задач для IV и V года обучения, изд. «Начатки знаний», 1924.

139. Германович П. Ю., Сборник задач на сообразительность, Учпедгиз, 1960.

140. Глебов И. И., Упражнения по привитию вычислительных навыков учащимся в V—VIII классах, Учпедгиз, 1959.

141. Годыцкий М. Г., Дорофенко М. П., Сборник самостоятельных и контрольных работ по арифметике для 5—6 классов, Минск, 1963.

142 Гребенча М. К., Арифметика, М., Учпедгиз, 1947.

143. Гребенча М. К. и Ляпин С. Е., Арифметика, М., Учпедгиз, 1952.

144. Егоров Ф. И., Методика арифметики, 1893.

145. Зайцева Н. Я., Планы уроков по арифметике в V классе, Учпедгиз, 1952.

146. Зайцева Н. Я., Зыкус А. И. и Эрастова А. Н., Планы уроков по арифмегике в V классе, Учпедгиз, 1954.

147. Иванова М. И., Русские счеты, Учпедгиз, 1953

148. Игнатьев В. А. и др., Сборник задач по арифмегике, Учпедгиз, 1952.

149. Каверин Н. В., Методы решения арифметических задач в средней школе, Учпедгиз, 1952.
150. Калиткин Н. М., Методика обучения вычислениий на счетах в V классе, Учпедгиз, 1956.
151. Каменский А. П., Либерман И. Н., Сборник задач по арифметике, М., Учпедгиз, 1939.
152. Киселев А. П., Систематический курс арифметики, 1891.
153. Компаниец П. А., Очерки по методике преподавания математики в I—IV классах школы, Ленинградский городской институт усовершенствования учителей, 1940.
154. Компаниец П. А., Простейшие графические расчеты, М., Учпедгиз, 1957.
155. Корницкий Н. Д., Производственные вопросы и задачи прикладной арифметики, ч. I, Гиз, 1924, ч. II, Гиз, 1926.
156. Крогиус В. и др., Арифметика, Учебник для пятого года ФЗС и первого года ШКМ, М., Учпедгиз, 1932.
157. Лебедева Л. Н., О преемственности в обучении IV и V классов, изд. АПН РСФСР, М., 1959.
158. Лебединцев К. Ф., Счет и мера, ч. I и II, Госиздат, 1923.
159. Малинин А. и Буренин К., Арифметика, 1895.
160. Малинин А., Курс арифметики, 1894.
161. Нешков К. И., Система изложения курса арифметики в V классе, изд. АПН РСФСР, 1963.
162. Никитин Н. Н., Устные вычисления на уроках арифметики, Учпедгиз, 1950.
163. Песков Т. А. и др., Сборник задач по арифметике для V—VI классов, Учпедгиз, 1963.
164. Пономарев С. А. и Сырнев Н. И., Сборник задач и упражнений по арифметике, М., Учпедгиз, 1964.
165. Попов И. Г., Устные вычисления, Учпедгиз, 1950.
166. Пчелко А. С., Методика преподавания арифметики в начальной школе, Учпедгиз, 1949.
167. Саговская Е. Н., Методические разработки по арифметике V класса, Учпедгиз, 1956.
168. Саговская Е. Н., Планы уроков по арифметике VI класса, Учпедгиз, 1957.
169. Самодурова З. С., *Сборник самостоятельных работ по арифметике* для V—VI классов, Учпедгиз, 1958.
170. Стальков Г. А., Устный счет, Учпедгиз, 1955.
171. Стратилатов П. В., Решение задач в курсе арифметики 5—6 классов, Учпедгиз, 1963.
172. Сырнев Н. И., Планы уроков по арифметике в VI классе, Учпедгиз, 1955.
173 Теннери Ж., Курс теоретической арифметики, 1913.
174. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики, Спб, 1913.
175. Тулинов В. А. и Чекмарев Я. Ф., Арифметика для педагогических училищ, Учпедгиз, 1946.
176. Уметский В. А., Некоторые вопросы преподавания арифметики в V—VI классах, Учпедгиз, 1959.
177. Филичев С. В. и Чекмарев Я. Ф., Сборник задач и упражнений по арифметике для 5—6 классов средней школы, Учпедгиз, 1949.
178. Филичев С. В. и Чекмарев Я. Ф., Руководство к решению арифметических задач, М., Учпедгиз, 1948.
179. Чекмарев Я. Ф., Сборник арифметических задач и упражнений по устному счету, Учпедгиз, 1947.
180. Чекмарев Я. Ф., Методика преподавания арифметики в V—VI классах, Учпедгиз, 1962.

181. Чичигин В. П., Методика преподавания арифметики, Учпедгиз, 1949.
182. Шевченко И. Н., Арифметика, Учебник для 5—6 классов, Учпедгиз, 1963.
183. Шевченко И. Н., Методика преподавания математики для V—VI классов, изд. АПН РСФСР, 1961.
184. Широков В. Ф., Сборник арифметических задач на соображение, Учпедгиз, 1949.
185. Шохор-Троцкий С. И., Методика арифметики, Учпедгиз, М., 1936.
186. Шохор-Троцкий С. И., Методика арифметики для учителей средних учебных заведений, 1916.
187. Шрамко О. С., Практические работы по арифметике в V—VI классах на макете дома, М., Учпедгиз, 1958.
188. Щербина К. М., О преподавании систематического курса обыкновенных дробей, Отчеты Киевского физико-математического общества за 1911 г.
189. Щербина К. М., Математика в русской средней школе, 1908.

К третьей части

190. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Алгебра, ч. I, Учпедгиз, 1940.
191. Арнольд И. В., Отрицательные числа в курсе алгебры, изд. АПН РСФСР, 1947.
192. Баранова И. В. и Ляпин С. Е., Задачи на доказательство по алгебре, Учпедгиз, 1954.
193. Барсуков А. Н., Алгебра, М., Учпедгиз, 1964.
194. Барсуков А. Н., Первые уроки алгебры в VI классе, Учпедгиз, 1951.
195. Барсуков А. Н., Уравнения 1-й степени в средней школе, Учпедгиз, 1952.
196. Березанская Е. С. и Нагибин Ф. Ф., Упражнения для устных задач по алгебре, Учпедгиз, 1949.
197. Березанская Е. С. и Нагибин Ф. Ф., Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии, Учпедгиз, 1951.
198. Богушевский К. С. и Сикорский К. П., Сборник задач по математике для повторения, Учпедгиз, 1953.
199. Бронштейн С. С., Методика алгебры, Учпедгиз, 1935.
200. Бронштейн С. С., Алгебра и ее преподавание в семилетней школе, Учпедгиз, 1946.
201. Гибш И. А., Уравнения первой степени в средней школе, Учпедгиз, 1957.
202. Гибш И. А., Методика обучения алгебре в VI классе, изд. АПН РСФСР, 1963.
203. Гончаров В. Л., Начальная алгебра, изд. АПН РСФСР, 1955.
204. Денисова Т. Н. и Георгиевская В. С., Планы уроков по алгебре в 7 классе, Учпедгиз, 1954.
205. Игнатьев В. А., Пономарев С. А., Обуховская Е. Н., Сборник задач по математике, Учпедгиз, 1952.
206. Истомина Н. С., Планы уроков по алгебре в VI классе, Учпедгиз, 1954.
207. Ларичев П. А., Сборник задач по алгебре, ч. I, М., Учпедгиз, 1964.
208. Майер Р. А., Из опыта изучения свойств функций в восьмилетней школе, изд. АПН РСФСР, 1963.
209. Николаева Н. Н., Уравнения 1-й степени с одним неизвестным, изд. АПН РСФСР, 1956.

210. Полозова Н. Н., Задачник по алгебре, Учпедгиз, 1949.
211. Репьев В. В., Очерки по методике преподавания алгебры, Горький, 1958.
212. Соминский И. С., Задачи для пропедевтического курса уравнений, Новгород, 1954.
213. Соминский И. С., Составление уравнений в курсе VI класса, Новгород, 1954.
214. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Алгебра, Физматгиз, 1960.
215. Чистяков И. И., Методика алгебры, Учпедгиз, 1934.

К четвертой части

216. Адамар Ж., Элементарная геометрия, Планиметрия, ч. I, М., Учпедгиз, 1957; ч. II, 1958.
217. Адлер, Теория геометрических построений, М., Учпедгиз, 1957.
218. Астряб А. М., Задачник по наглядной геометрии, М., 1924.
219. Астряб А. М., Курс опытной геометрии, Гиз, 1925.
220. Барыбин К. С., Сборник задач по геометрии, Учпедгиз, 1958.
221. Бескин Н. М., Методика геометрии, Учпедгиз, 1947.
222. Березанская Е. С., Колмогоров Н. А., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С., Сборник задач и вопросов по геометрии, Учпедгиз, 1962.
223. Богомолов С. А., Геометрия (систематический курс), М., Учпедгиз, 1949.
224. Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике, М., изд. «Наука», 1964.
225. Гангнус Р. В. и Гурвиц Ю. О., Геометрия, Методическое пособие, ч. 1 и 2, М., Учпедгиз, 1935.
226. Герхер, Учебник элементарной геометрии. Планиметрия, М., Госиздат, 1922.
227. Глаголев Н А., Элементарная геометрия, ч. I, Планиметрия, М., Учпедгиз, 1954.
228. Глаголев А. Н., Элементарная геометрия и собрание геометрических задач, М., 1895.
229. Гурвич Т. Л. и Тутаев Л. К., Устные вопросы по геометрии, Минск. Учпедгиз, 1957.
230. Гурвиц Ю. О. и Гангнус Р. В., Систематический курс геометрии, ч. I, М., Учпедгиз, 1933.
231. Давидов А. Ю., Элементарная геометрия, 1864—1922.
232. Дакацьян У. В., Проверка знаний у учащихся по математике, М., изд. АПН РСФСР, 1963.
233. Данилова Е. Ф., Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач, Учпедгиз, 1961.
234. Денисова Т. Н., Планы уроков по геометрии в VII классе, Учпедгиз, 1953.
235. Дубнов Я. С., Измерение отрезков, Физматгиз, 1962.
236. Дубнов Я. С., Ошибки в геометрических доказательствах, ГТТИ, 1953.
237. Душин Н., Курс элементарной геометрии для рабфаков, проф. школ и техникумов, Харьков, изд. «Путь просвещения», 1923.
238. Евклид, Начала, М., ГТИ, 1948—1950.
239. Зыкова В. И., Формирование практических умений на уроках геометрии, изд. АПН РСФСР, М., 1963.
240. Извольский Н. А., Геометрия на плоскости, 1948.
241. Извольский Н. А., Методика геометрии, 1923.
242. Истомина Н. С., Планы уроков по геометрии в VI классе, Учпедгиз, 1952.
243. Кавун И. Н., Как обучать геометрии в четырехлетней школе (методическое руководство для учителей), 1927.

244. Кавун И. Н., Начальный курс геометрии, ч. 1 и 2, Госнздат, 1924.
245. Каган В. Ф., О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933.
246. Калиткин Н. М., Теорня и практика прн решении геометрических задач, Учпедгиз, 1953.
247. Карнацевич Л. С. н Карнацевнч В. С., Сборнк вопросов и задач по планиметрии, Учпедгиз, 1961.
248. Киселев А. П., Геометрия, ч. I, Учпедгиз, М., 1958 (1-е издание 1893 г.).
249. Компаниец П. А., Особенности преподавання геометрии в I—VI классах, изд. АПН РСФСР, 1961.
250. Кузьмина С. А., О доказательстве теорем в курсе геометрии VI класса, изд. АПН РСФСР, 1961.
251. Кулишер А. Р., Учебник геометрни. I ступень, Госиздат, 1922.
252. Кулишер А. Р., Методнка и дидактика подготовительного курса геометрни, 1918.
253. Кутузов Б. В., Геометрия Лобачевского и элементы основанний геометрии, М., Учпедгиз, 1950.
254. Лиман М. М., Практические задачи по геометрии для восьмилетней школы, Учпедгиз, 1961.
255. Ломов Б. Ф., Формнрование графических знаний и навыков у учащихся, изд. АПН РСФСР, 1959.
256. Маслова Г. Г., Методика обучения решению задач на построение в восьмилетней школе, изд. АПН РСФСР, 1961.
257. Немытов П. А., Сборник задач на доказательство по геометрии для 6—7 классов, Учпедгиз, 1956.
258. Никитин Н. Н., Геометрия, Учпедгиз, 1961—1964.
259. Никитин Н. Н., Краткие методические указания к новому учебнику геометрии, ч. I, Учпедгиз, 1957.
260. Никитин Н. Н. и Маслова Г. Г., Сборник задач по геометрии, ч. I, Планиметрия, Учпедгиз, 1964.
261. Перельман Я. И., Новый задачник по геометрии, 1928.
262. Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрин, ч. I, ГТТИ, 1948.
263. Притуло Ф. Ф., Методика изложения геометрических доказательств в средней школе, Учпедгиз, 1958.
264. Рыбкин Н., Сборник задач по геометрии, ч. I, М., 1962.
265. Сборнчк статей под редакцией Стратилатова П. В. «Из опыта преподавания математики в V—VII классах», М., Учпедгиз, 1954.
266. Сборник статей «О преподавании математики в восьмилетней школе», изд. АПН РСФСР, 1961.
267. «Сборник статей по вопросам преподавання геометрии в средней школе», под ред. П. В. Стратилатова, Учпедгиз, 1958.
268. Семенович А. Ф. и Воробьев Г. В., Первые уроки геометрии, Учпедгиз, 1958.
269. Семенович А. Ф., Геометрия для VI класса, Ульяновск, 1961.
270. Семенович А. Ф., Геометрия для VII класса, Ульяновск, 1962.
271. Стражевский А. А., Задачи на геометрические места точек в курсе геометрин средней школы, Учпедгиз, 1954.
272. Фетисов А. И., Геометрия. Учебник для VIII—IX классов средней школы, М., Учпедгиз, 1957.
273. Фетисов А. И., О доказательствах в геометрии, М., ГТТИ, 1954.
274. Холингер А., Геометрия для VI класса, М., Учпедгиз, 1961.
275. Четверухнн Н. Ф., Методы геометрическнх построений, М., Учпедгнз, 1952.
276. Шоластер Н. Н., Первые уроки геометрии в VI классе, Учпедгиз, 1952.
277. Беленький Н. С., Таблицы обратных чисел, Госстатиздат, 1955.
278. Берман Г. Н., Число и наука о нем, Физматгиз, 1960.

279. Ефимчик А. А., Изучение первых геометрических понятий и доказательств, Минск, 1961.
280. Крельштейн Б. И., Необходимые и достаточные условия, Учпедгиз, 1961.
281. Людмилов Д. С., Задачи без числовых данных, Учпедгиз, 1961.
282. Пойа Д., Как решать задачу, Учпедгиз, 1959.
283. Развитие логического мышления учащихся в процессе преподавания в средней школе, Учпедгиз, 1958.
284. Трубецкой М. Н., Развитие способностей учащихся к техническому творчеству на уроках геометрии, Сборник, Учпедгиз, 1963.
285. Березанская Е. С., Вопросы стереометрии в восьмилетней школе, изд. «Просвещение», 1964.
286. Великиина П. Я., Сборник задач по геометрии для восьмилетней школы, изд. «Просвещение», 1964.
287. Вопросы перестройки обучения математике в школе (сборник статей под редакцией И. А. Гибша), АПН, 1963.
288. Ермаков И. Ь., Атеистическое воспитание при обучении арифметике, изд. «Просвещение», 1964.
289. Муравин К. С., Крейдлин Е. Г., Сборник задач по алгебре для 6—8 классов, изд. «Просвещение», 1964.
290. Орехов Ф. А., Графические лабораторные работы по геометрии, изд. «Просвещеиие», 1964.

Серафима Алексеевна Гастева,
Борис Ильич Крельштейн,
Сергей Евгеньевич Ляпин,
Мария Мечиславовна Шидловская

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

Редактор *А. А. Свечников.*
Переплёт *И. В. Царевич.*
Художественный редактор *В. Е. Эрденко.*
Технический редактор *Е. К. Полукарова.*
Корректоры *Н. М. Данковцева, Т. А. Кузнецова.*

Сдано в набор 27/VIII 1964 г.
Подписано к печати 16/II 1965 г.
$60\times90^1/_{16}$. Печ. л. 46.5. Уч.-изд. л. 45.93.
Тираж 89 000 экз. А 00070. (Пл. 1964 г. № 144).

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41.

Типография издательства «Уральский рабочий».
Свердловск, проспект Ленина, 49
Цена без переплёта 1 р. 24 к., переплёт 15 к.
Заказ 671.